Dynamische Mathematik mit GeoGebra
30. März – 1. April 2009

Angebote für Fortgeschrittene

Thema 1

Gegeben ist ein beliebiges Dreieck. Über die Seiten des Dreiecks werden Quadrate errichtet. In zwei Ecken des Dreiecks (zB A und B) werden die aneinander stoßenden Seiten zweier benachbarter Dreiecke zu einem Parallelogramm ergänzt. Die dabei entstehenden vierten Ecken der beiden Parallelogramme werden mit der dritten Ecke des Dreiecks (hier C) zu einem Dreieck verbunden.

Kannst Du für dieses Dreieck Vermutungen aufstellen?
Beweise diese Vermutung!

Thema 2

Die merkwürdigen Punkte des Dreiecks sind wohl bekannt. Damit sind aber auch die Ortslinien dieser Punkte oft behandelt, wenn eine Ecke des Dreiecks auf einer Geraden wandert. Es gibt aber noch anderen untersuchenswerte Ortslinien:

Bestimme die Ortslinie der Schnittpunkte von

a) Seitensymmetrale und Höhe

b) Winkelsymmetrale und Höhe

c) Winkelsymmetrale und Schwerlinie

d) welche Varianten sind noch möglich?

Thema 3

Gegeben sind zwei Kreise, einer davon mit variablem Radius. Konstruiere die gemeinsamen Tangenten an die beiden Kreise und die Mittelpunkte der Strecken zwischen den Berührungspunkten. Finde die Ortslinie dieser Mittelpunkte, wenn der variable Kreis seinen Radius ändert.

Versuche, die Gleichung der Ortslinie zu bestimmen.

Hinweis: (Ergebnis laut GeometryExpressions – und durch Nachrechnen mit DERIVE bestätigt!)

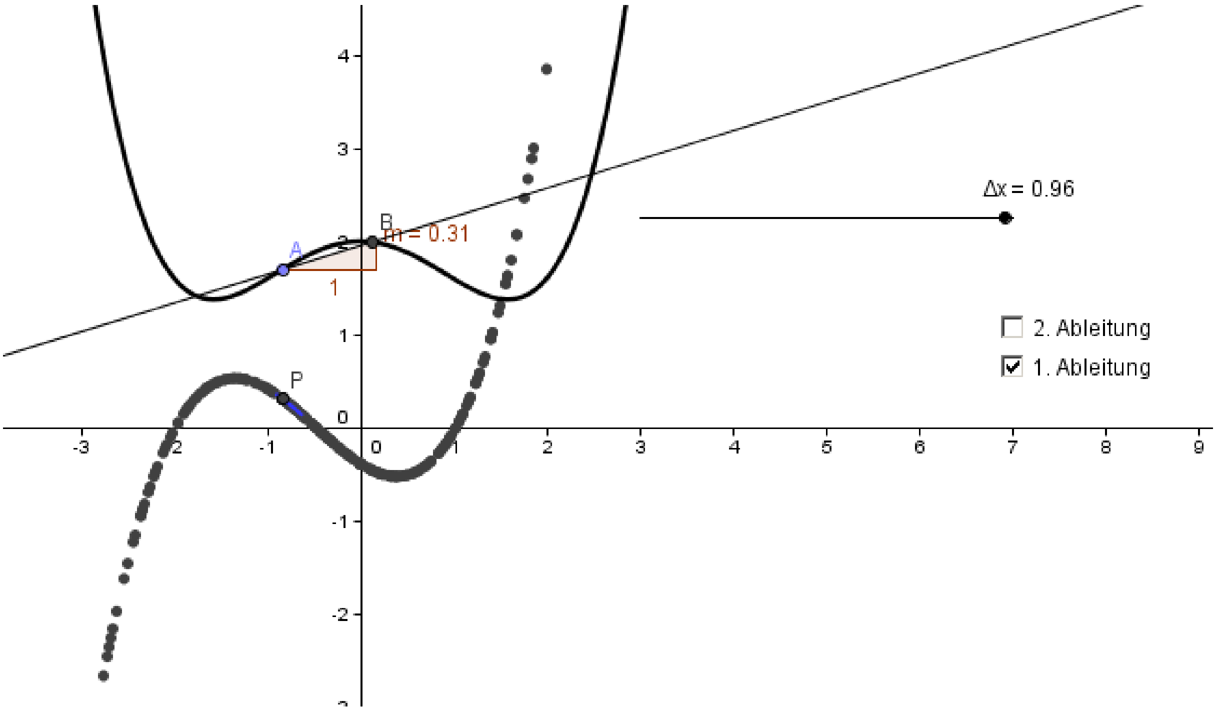
$$\Rightarrow 4\cdot X^4+8\cdot X^2\cdot Y^2+4\cdot Y^4-12\cdot X^3\cdot a-12\cdot X\cdot Y^2\cdot a+a^4-a^2\cdot s^2+Y^2\cdot\left(4\cdot a^2-4\cdot s^2\right)+X^2\cdot\left(13\cdot a^2-4\cdot s^2\right)+X\cdot\left(-6\cdot a^3+4\cdot a\cdot s^2\right)=0$$

So sollte das Ergebnis aussehen!

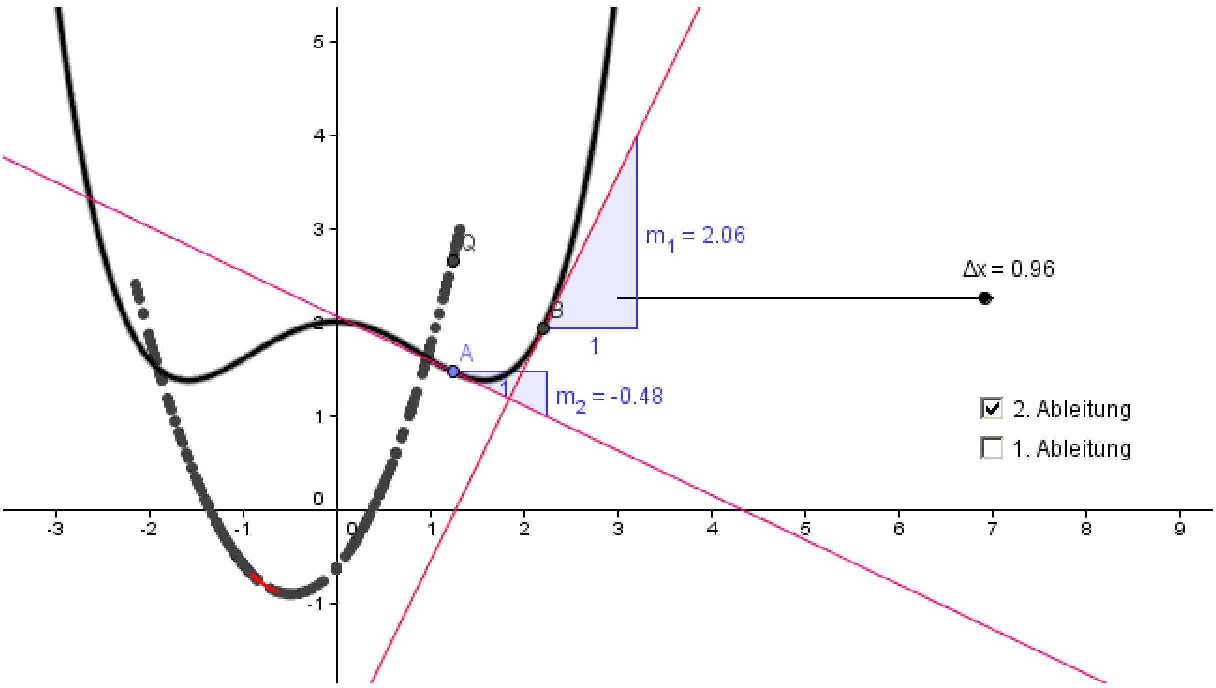
(Dabei wird der Radius des Kreises mit seinem Mittelpunkt im Ursprung *r* veränderlich angesehen, während der Kreis mit M(*a*,0) und Radius *s* fix ist.)

Thema 4

Entwirf ein GeoGebra-Arbeitsblatt zur Visualisierung von erster und zweiter Ableitung als Grenzwerte der entsprechenden Differenzenquotienten.



Für die erste Ableitung ist der Differenzenquotient der Funktionswerte der übliche Einstieg. Hier können wir über einen Schieberegler auch das Δx variieren.

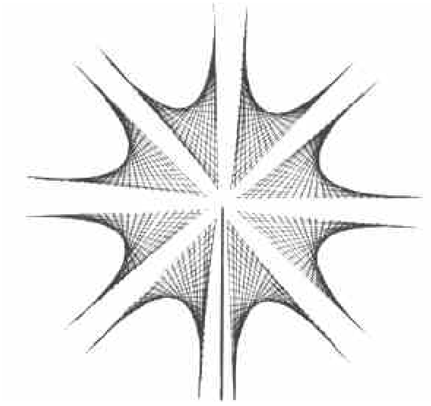


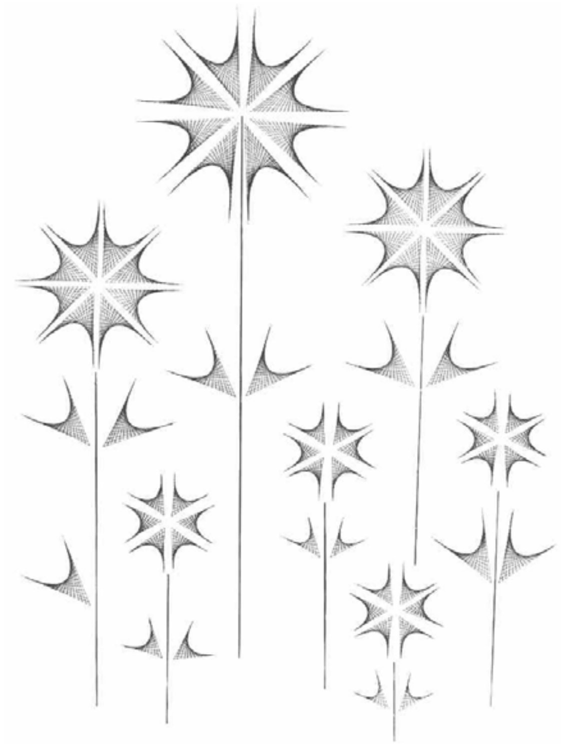
Die zweite Ableitung entsteht über den Differenzenquotient der Anstiege in den benachbarten Punkten (= Beschleunigung in der Mechanik) – und nicht als erste Ableitung der ersten Ableitung, sondern direkt aus der Funktion über deren Tangentenanstiege.

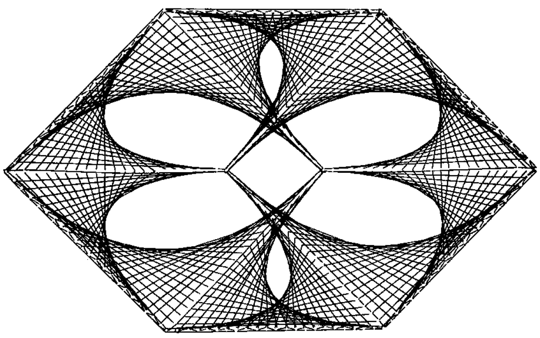
Thema 5

Fadengrafiken mit GeoGebra

Eine Komposition aus Streckenscharen:

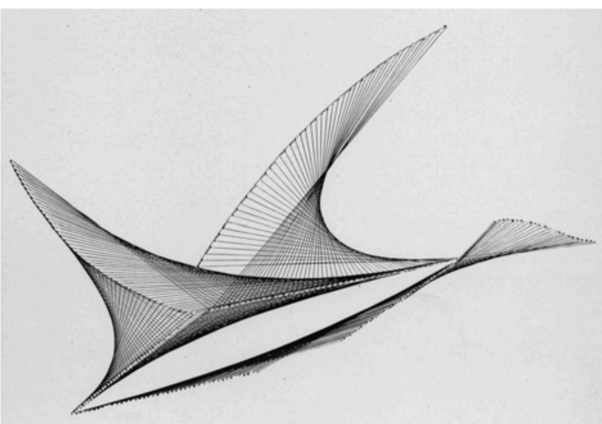


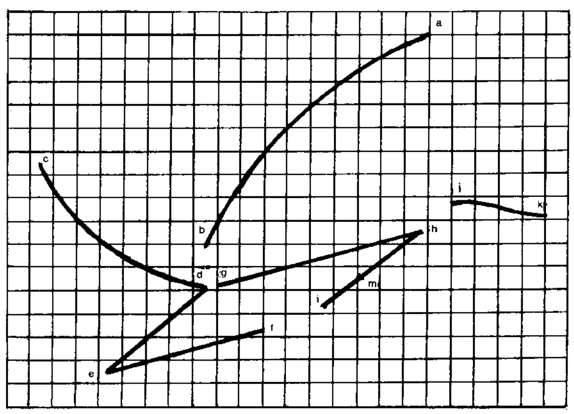


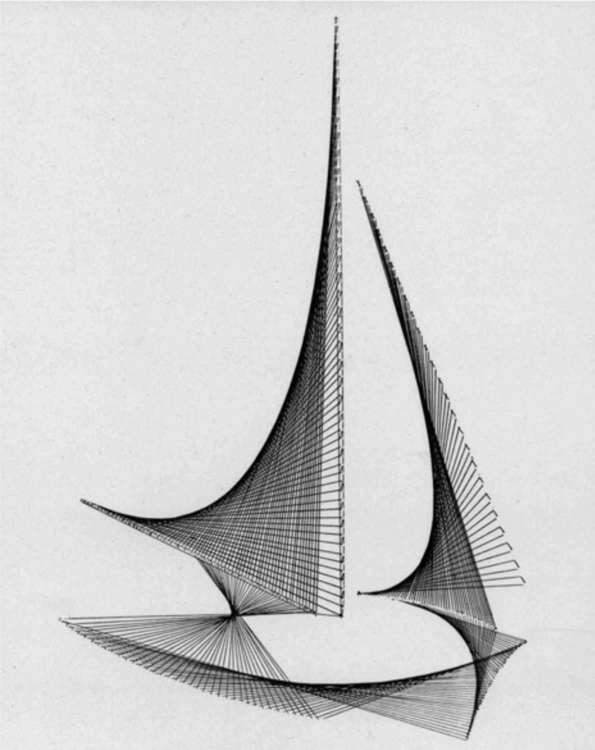


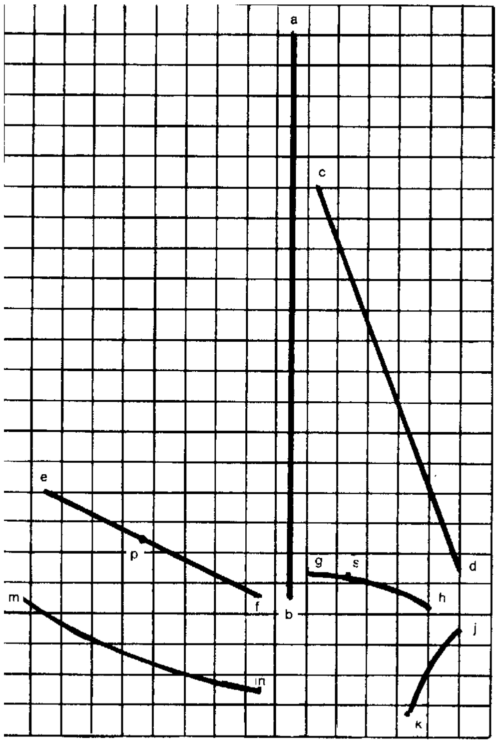
Thema 6

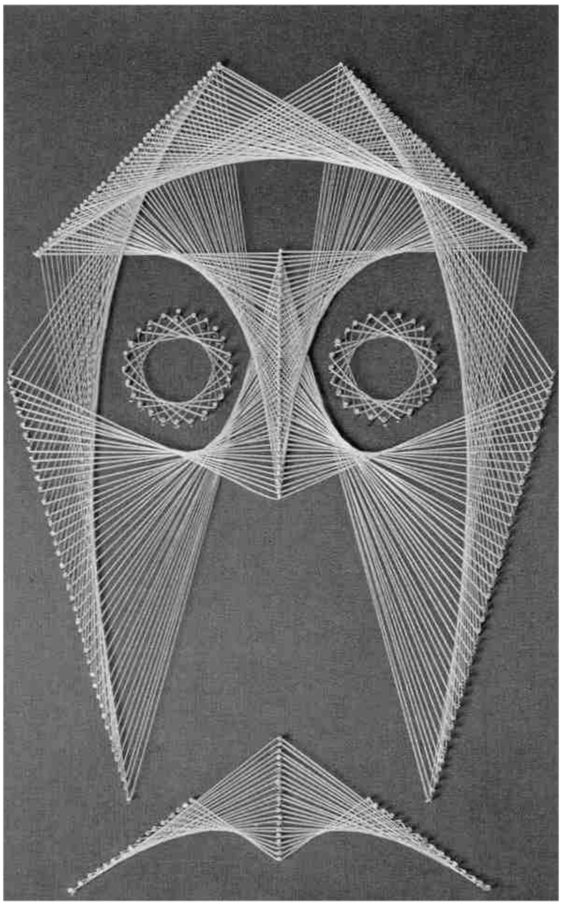
Arbeit mit Hintergrundbildern: (Lade die Vorlage – rechts – in den Hintergrund)

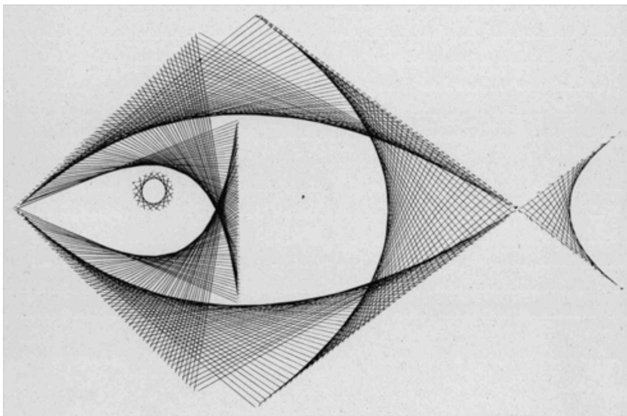


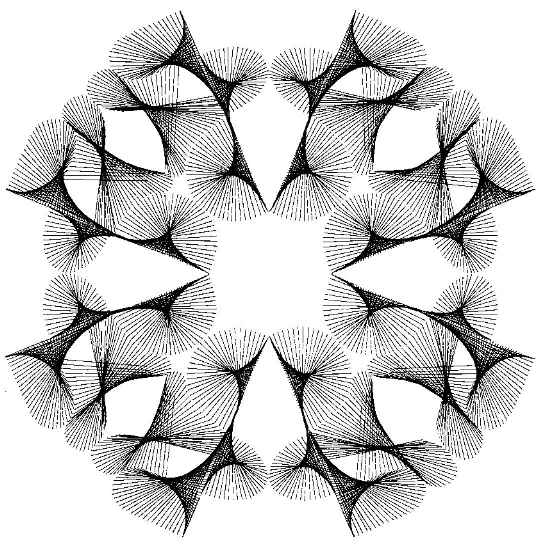










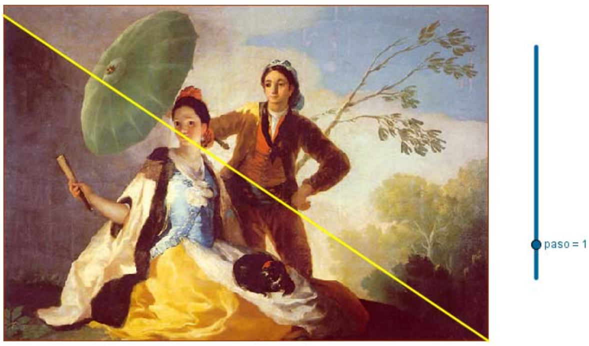


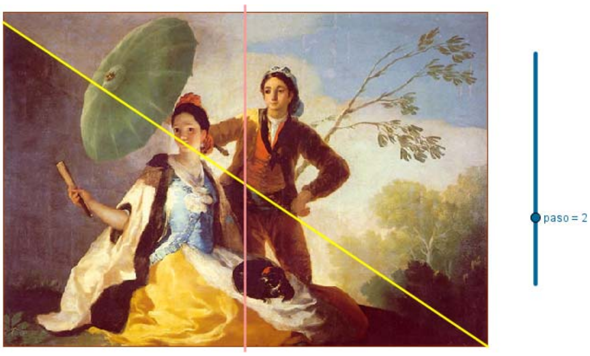
Bestimme die Gleichungen der Hüllkurven!

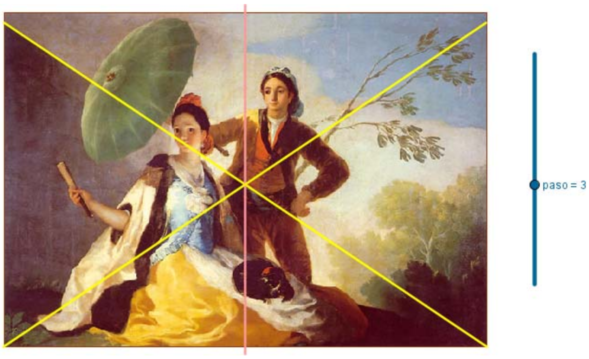
Mathematik und Kunst **http://jmore7.com**

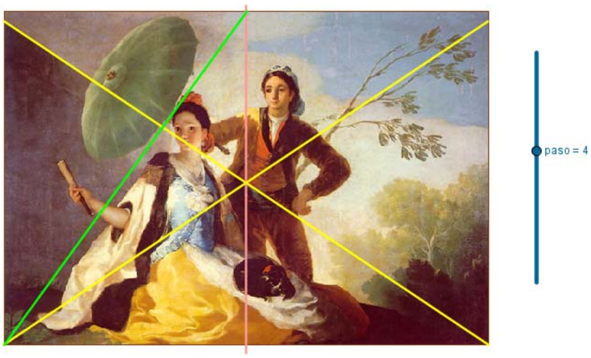
Auf dieser Webseite kann man sehr schöne Beispiele finden. Es gibt eine deutsche Übersetzung, die auch die dahinter liegende Geometrie erklärt. Es gibt nicht nur Beispiele zu Malerei, sondern auch Architektur …

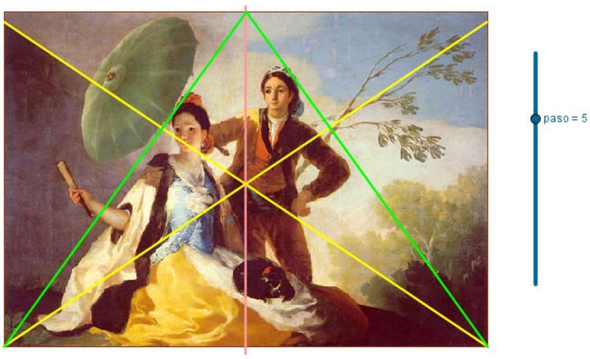
Goya. *El quitasol*. 1777. Museo del Prado. Madrid

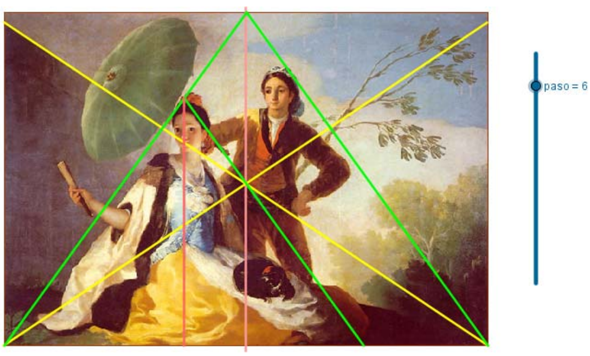




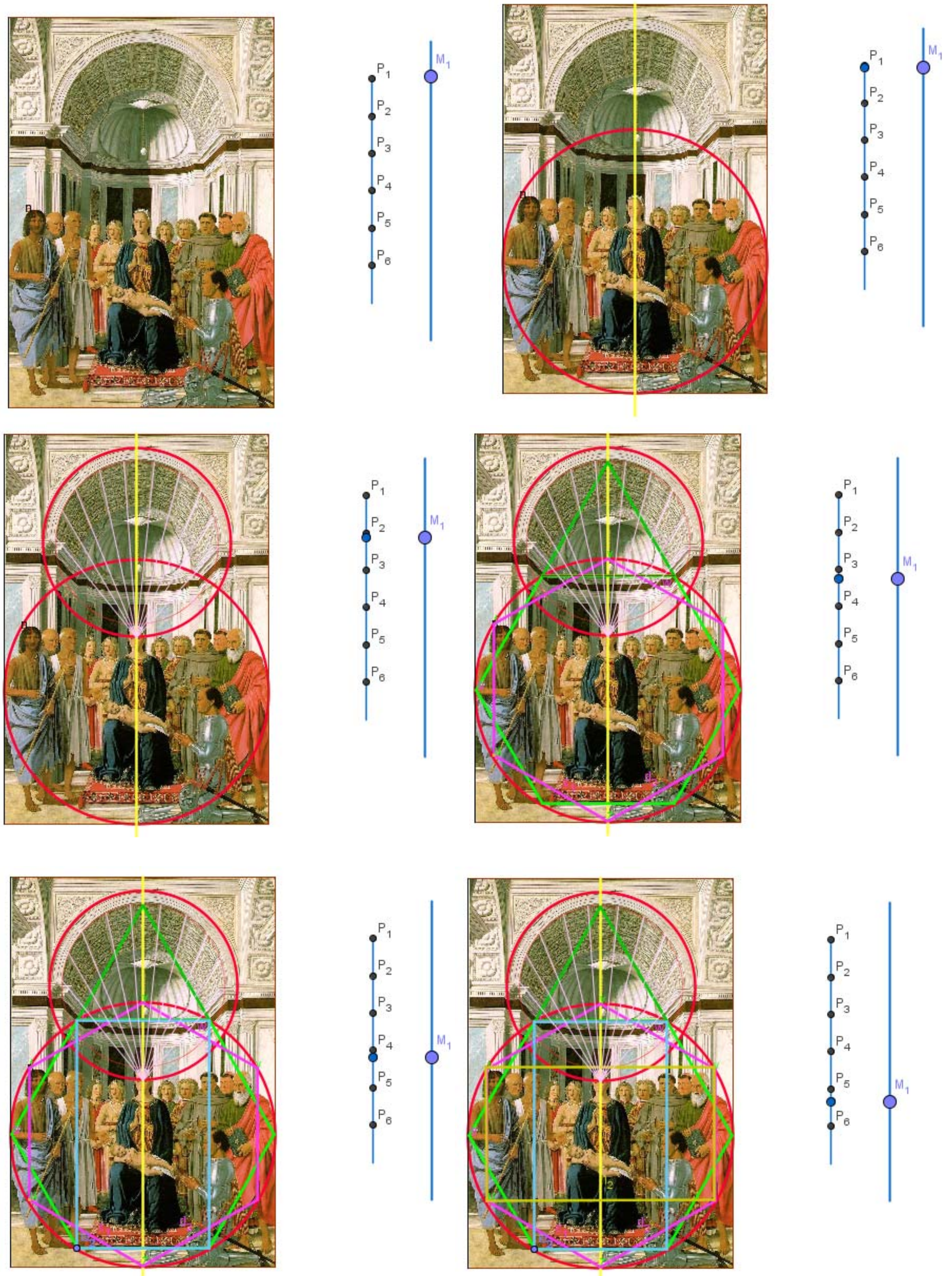


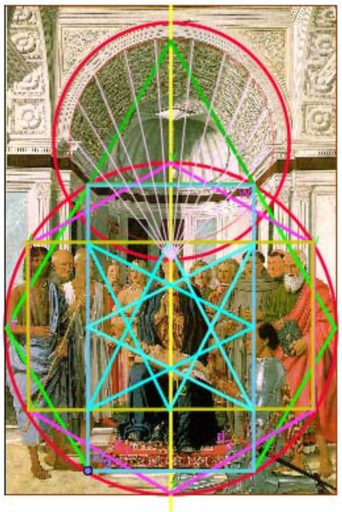


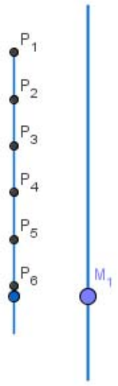




***Pietro della Francesca. Madonna con niño y santos (Cuadro del huevo).* 1475. The Nacional Gallery. London.**







Thema 7

Statistik mit GeoGebra

Die Formel von Sherlock Holmes

Führt das folgende Experiment in der Klasse durch: Lasst alle Kolleginnen und Kollegen am Gang oder im Klassenzimmer 10 Schritte tun, messt die dabei zurückgelegte Entfernung und berechnet die durchschnittliche Länge eines Schritts. (Beachtet dabei, dass der Abstand von der Position der Ferse am Start und nach dem 10. Schritt gemessen wird.) Fasst in einer Liste für alle Teilnehmer die durchschnittliche Schrittlänge, die Körpergröße und die Schuhgröße zusammen. Übertragt Schrittweite (x–Werte) und Körpergröße (y–Werte) in ein Streudiagramm und kommentiert den Graph.

Wie es weiter geht, seht ihr an Hand der Daten, die von 12jährigen Schülern einer US-Highschool stammen:

Name	Größe cm)	Schrittw.(cm)	US-Schuhgröße
Josephine	150.8	62.6	4
Carl	149.5	62.1	5.5
Stanley	151.2	62.6	6.5
Terence	153.1	63.4	7.5
Larry	150.6	62.2	7.5
Walter	149.9	61.9	5
Patricia	146.5	60.9	4.5
Eleonor	146.5	62.9	6
George	151.5	62.8	8.5
William	153.5	63.4	6.5

Einige Fragen stellen sich:

Lässt sich ein Zusammenhang zwischen Schrittweite und Körpergröße herauslesen?

Welcher Funktionstyp würde diesen Zusammenhang am Besten beschreiben?

Was heißt „am Besten" beschreiben?

Gibt es einen „Ausreisser" unter den Daten?

Es hat frisch geschneit und wir sehen Fußspuren mit der durchschnittlichen Länge von 65,5 cm. Welchen Schluss auf die vermutliche Körpergröße lässt dies zu?

(aus Mathe mit Gewinn 4)

Übertrage die Daten aus einer Excel-Datei nach Geogebra.
Lege eine beliebige Gerade $y = k\,x + d$ so, dass die Summe der Fehlerquadrate minimiert wird. Stelle diese Summe als Quadrat dar.

Lege die Gerade durch den „Mittelpunkt" der Datenpaare (Schrittweite, Größe) und verfahre wie oben. Entwirf ein passendes Arbeitsblatt mit Aufträgen für die Schüler.

Suche die Regressionsgerade(n), Korrelationskoeffizient, sowie die bekannten statistischen Kenngrößen.

Thema 8

Fußpunktkurven

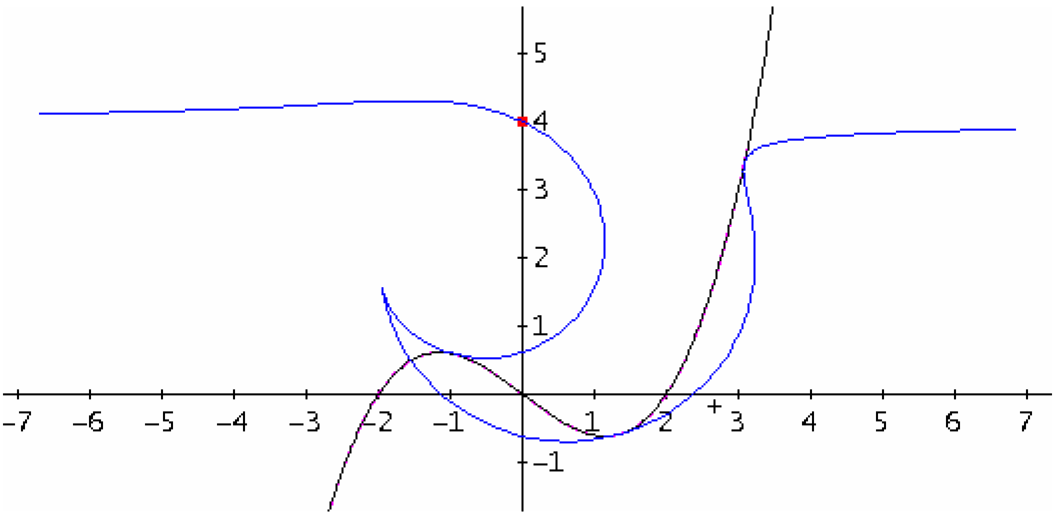
Zum Schluss noch ein wenig Differentialrechnung. Gegeben sind eine beliebige Kurve und ein fester Punkt (der Pol). Von diesem Pol werden die Normalen auf alle Tangenten der Kurve gelegt. Die Ortslinie aller Schnittpunkte dieser Normalen mit den Kurventangenten ist die *Fußpunktkurve*.

Ermittle diese Kurve für a) eine Parabel, b) eine Kurve 3. oder 4. Grades, c) für eine Winkelfunktion, d) einen Kreis.

Die *negative Fußpunktkurve* ist die Umkehrung: Gegeben ist eine Kurve und der Pol. Verbinde den Pol mit einem Kurvenpunkt und zeichne dort die Normale. Die Hüllkurve aller dieser Normalen ist die negative Fußpunktkurve.

Dann gibt es noch die Kontra-Fußpunktkurve (oder auch *Normalfußpunktkurve*): Hier ist die Tangente aus der Definition der Fußpunktkurve durch die Kurvennormale zu ersetzen. (Hinweis: Vielleicht kannst du zeigen, dass die Kontra-Fußpunktkurve einer Kurve *C* die Fußpunktkurve ihrer Evolute ist?)

Entwickle ein Arbeitsblatt mit Schüleraufträgen.



Fußpunktkurve zu $y(x) = \dfrac{x^3 - 4x}{5}$, Pol in (4,0)

Thema 9

Die Definition einer Parabel ist allseits bekannt. Hier ist eine Verallgemeinerung dieser Definition:

Bestimme den Ort aller Punkt für die das Verhältnis der Abstände zu einem festen Punkt und zu einer festen Geraden konstant ist.