

# **Forensische Mathematik für den Unterricht**

**Aus den Berichten eines Coroners**

**Pat und Carl Leinbach**

für den Schulgebrauch übersetzt und bearbeitet von Josef Böhm

bk teachware Schriftenreihe Nr. SR-57, ISBN 978-3-901769-78-8

Die Formel von Sherlock Holmes	3
Kriminologie mit dem Wetterhäuschen	10
Eine Buchstabensuppe als letzte Nachricht	19
Tödliche Geschwindigkeit	33
Die Botschaft der Bremsspuren	46
Blutspritzer an der Wand	56
Mit der Matrix zu den Tatverdächtigen	62
Knochenreste vom Bruderkrieg	74
Stumme Zeugen: Fingerabdrücke	87
Ein GPS – nicht nur für das Auto	95
Die Aufgaben eines Coroners	111

---

Die zum Buch gehörigen Dateien können über <http://shop.bk-teachware.com/sr-57daten> herunter geladen werden (ca 100 KB).

## Vorwort

Im Rahmen der Internationalen DERIVE Konferenz 2000 in Liverpool hielten Pat und Carl Leinbach einen Vortrag „*Estimating Time Since Death*“. Dies war das erste Mal, dass ich mit dem Begriff „Coroner“ in Berührung gekommen bin. (Im Wörterbuch fand ich: *Coroner* = amtlicher Leichenbeschauer. Dass dies aber mehr bedeutet als bei uns, kann auf Seite 111 nachgelesen werden.) Pat berichtete über den Fund eines Leichnams und der Aufgabe, den Zeitpunkt des Todes zu ermitteln. Carl referierte über das Abkühlungsgesetz und die entsprechende Differentialgleichung. Es wurde aber erst richtig interessant, als auch die Daten der Wetterstation für die entsprechende Nacht in den Modellierungsprozess mit einbezogen wurden – und vorbei war es mit dem relativ einfachen Gesetz von Newton.

Alle Zuhörer waren von der Lebendigkeit des Vortrags von Pat und Carl begeistert. Als es nun darum ging, für die Konferenz 2006 in Dresden einen Hauptvortragenden zu nominieren, fiel unsere Wahl auf einen Mann der ersten Stunde, was den Einsatz von CAS in der Mathematikausbildung betrifft, auf Carl Leinbach, Professor für Computer Science und Mathematik am Gettysburg College, Pennsylvania, USA. Viele TV-Serien, wie etwa CSI Miami und andere brachten die Gerichtsmedizin – Forensik – in den Mittelpunkt des allgemeinen Interesses. So baten wir Carl um einen entsprechenden Vortrag. Carl sagte zu – und hielt dann einen anderen – sehr gut aufgenommenen – Vortrag mit dem Titel: „Teaching and Learning Mathematics in the Age of Technology – What is the *Right* Mathematics? Aber er hatte unseren Wunsch nicht vergessen und so gaben Pat und Carl auch einen Workshop zu „*Forensic Mathematics*“. In diesem Workshop brachten sie weit mehr als damals in Liverpool.

Als ich die angebotenen Themen und die Unterlagen sah – und bei den Vorbereitung zur Herstellung der „Blutspritzer“ mit roter Tinte helfen durfte – war mir klar, dass diese Materialien in deutscher Sprache an die Öffentlichkeit kommen sollten und zwar nicht nur im Rahmen der Konferenz-CD.

Pat und Carl waren mit einer Übersetzung nicht nur einverstanden, sondern boten an, noch weitere Beiträge zur Verfügung zu stellen. Mit bk-teachware war auch gleich ein Verlag gefunden.

Ich kenne Pat und Carl Leinbach seit 1992, als die erste DERIVE-Konferenz in Krems abgehalten wurde. Carl hatte schon mit MuMath, dem Vorgänger von DERIVE gearbeitet und war dann unermüdlicher Tester und Vorkämpfer für alle Versionen von DERIVE und die später auf den Markt gekommenen CAS-TI-Taschenrechner. Sein Hauptinteresse gilt neben allen Einsatzmöglichkeiten von CAS vor allem der Biomathematik.

Pat und Carl haben neben ihrem hohen Berufsethos große soziale Kompetenz. So waren sie unter den ersten, die nach den verheerenden „Katrina“-Zerstörungen als freiwillige Helfer viele Wochen vor Ort tätig mitgeholfen haben, den Tausenden von Betroffenen Hilfe ange-deihen zu lassen.

Ich habe versucht, möglichst viel vom Charme des Originals zu belassen. Zur Zeit der Verfassung der Übersetzung sind die angegebenen URLs aktiv, das kann sich aber immer ändern. Ich bitte dafür um Verständnis.

Abschließend gilt mein Dank Pat und Carl für die schöne Zusammenarbeit und Bernhard Kutzler von bk-teachware für die Möglichkeit zur Veröffentlichung.

Josef Böhm

## Die Formel von Sherlock Holmes „Es ist eine ganz simple Rechnung.“



### WAS GESCHAH ...

Die Nacht war warm und sehr feucht. Knapp vor Geschäftsschluss wurde ein kleines Kaufhaus überfallen, ausgeraubt und der Eigentümer getötet. Die Polizei war rasch am Tatort, weil die Alarmsirene des Kaufhauses ausgelöst wurde. Der mutmaßliche Täter war zu Fuß durch die Hintertür geflohen. Vor dem Hintereingang waren eine Rasenfläche und ein Fußweg. Die Polizei fand auf dem Fußweg deutlich erkennbare nasse Fußspuren. Diese Spuren wurden sofort fotografiert und ihre Größe und der Schrittabstand gemessen. Aus diesen Tatsachen war die Polizei im Stande, die ungefähre Körpergröße, Schuhgröße und Schrittweite zu bestimmen. Außerdem bestand die Möglichkeit, später das Profil der Schuhsohle eines Verdächtigen mit dem auf dem Fußweg gefundenen Muster zu vergleichen.

### Hintergrundinformationen

Weit verbreitet ist die Ansicht, dass das erste Auftreten einer echten forensischen (kriminaltechnischen) Untersuchung in der Literatur in den 60 Abenteuern von Sherlock Holmes, geschrieben von Sir Arthur Conan Doyle, erfolgte. Holmes mit seinem Begleiter Dr. Watson, das alter Ego von Doyle, war im Stande, den Tatort eines Verbrechens zu betrachten und daraus bemerkenswerte Schlussfolgerungen auf die Art des Verbrechens und auf den Täter zu ziehen. In keinen Abenteuern von Holmes, außer in den beiden letzten, kam Holmes' „Erzrivale“, der manisch kriminelle Mathematikprofessor Moriarty vor. Diese Charakterisierung eines Mathematikprofessors ist unfair und hat den Ruf der Mathematiklehrer für Jahre beschädigt. So ungerecht das auch ist, so müssen wir doch wieder zu unserem Tatort zurückkehren.

In einem seiner frühen Abenteuer – *A Study in Scarlet* – („Studie in Scharlachrot“) - macht Holmes im Kapitel 15 die folgende Bemerkung: *“Why the height of a man, in nine cases out of ten, can be told from the length of his stride.”* („Nun, in neunzig von hundert Fällen lässt

sich aus der Schrittlänge eines Menschen auf seine Körpergröße schließen. Es ist eine ganz simple Rechnung. Mit den Zahlen will ich sie nicht langweilen. Ich sah die Schrittspuren des Burschen draußen im Lehm so gut wie auf dem staubigen Boden im Zimmer.“<sup>1</sup> Holmes ist es nicht eingefallen, weder Watson, noch die anwesenden Polizeibeamten oder gar uns einzuweihen, welche Rechnung er da angestellt hat.

Welche Formel hatte Holmes im Sinn, wenn er seine „ganz simple Rechnung“ ansprach? Wie fest können wir uns auf diese Rechnung verlassen? Holmes erklärt im Kapitel 15 weiter: „Zudem gab es noch eine Probe auf mein Rechenexempel. Wenn ein Mann etwas an die Wand schreibt, wird er den Text unwillkürlich in seiner Augenhöhe anbringen. Die Inschrift befindet sich genau einen Meter achtzig über dem Boden. Also war die Bestimmung der Körpergröße ein Kinderspiel.“ Man beachte den sarkastischen Ton am Ende des Zitats. Wir wollen nun versuchen, die „simple Formel“ des Meisterdetektivs zu entdecken. Dazu werden wir Informationen benötigen, die wir mit einem Maßband sammeln können. Weiter hilft uns dann der FIT-Befehl von Derive (oder die Bestimmung einer Regressionslinie mit einem anderen geeigneten Werkzeug).

Deine experimentelle Methode lässt dich und deine Klassenkameraden zehn Schritte machen und die dabei zurückgelegte Entfernung messen. Notiere jeweils Namen, Körpergröße, Länge eines Schritts (= Entfernung/10) und für eine spätere Untersuchung auch die Länge eines Schuhs. Wenn die Daten erhoben worden sind, kannst du mit den zusammengestellten Listen und dem Regressionswerkzeug überprüfen, ob die Behauptung von Sherlock Holmes stimmt. Wenn dem so ist, kannst du diese Formel dazu verwenden, um die Größe einer beliebigen Person aus ihrer Schrittlänge zu schätzen.

### **Forensische Aufgaben**

- Untersuchung, ob zwischen der Körpergröße einer Person und ihrer Schrittlänge eine Beziehung besteht
- Überprüfung der Hypothese, dass ein Zusammenhang zwischen der Schuhgröße (Schuhlänge) einer Person und ihrer Körpergröße besteht

### **Naturwissenschaftlich-mathematische Aufgaben**

- Erstellung zweier Hypothesen über die Bestimmung der Körpergröße einer Person
- Sinnvolle und effektive Erhebung von Daten, um diese Hypothesen zu stützen
- Einsatz der linearen Regression zur Bildung von geeigneten mathematischen Modellen
- Beurteilung der Eignung und Grenzen der Modelle

### **Materialien**

---

<sup>1</sup> Übersetzung: Beatrice Schott, erschienen im Ullstein Verlag 1977.

- Derive oder ein anders CAS, CAS-Rechner, Graphischer TR oder Excel
- Einen freien Raum von mindestens 10m Länge
- Kreide oder Klebeband, um eine Startmarkierung von ca. 50cm Länge am Boden anzubringen; von hier weg werden die Schritte gemacht
- Datenblätter, um die Namen, Größen, Schrittlängen und Fuß-(Schuh-)längen der Personen zu notieren
- Maßband

## Durchführung

1. Legt ein Datenblatt mit vier Spalten nach folgendem Muster an:

Name	Körpergröße (cm)	Schrittlänge (cm)	Schuhlänge (cm)

2. Richtet drei Stationen mit jeweils einem „Datensammler“ und einem „Datenschreiber“ ein. (Sammler und Schreiber können auch in einer Person vereinigt sein.)
 

Station 1 – Messt die Größe jeder Person und notiert sie gemeinsam mit deren Namen.

Station 2 – Ermittelt die Schuhgröße (Schuhlänge oder Fußlänge) jeder Person und notiert sie gemeinsam mit deren Namen.

Station 3 – Sucht eine freie Fläche mit einer Mindestlänge von 10m und bringt die Startmarkierung an. Messt die von jeder Person mit 10 – normalen – Schritten zurückgelegte Strecke, teilt sie durch 10 und notiert die gewonnene durchschnittliche Schrittgröße gemeinsam mit dem Namen.
3. Auf Station 3 soll jede Person die Fersen an die Startlinie setzen und 10 normale Schritte in gerader Richtung machen. Nach dem 10. Schritt sollen die Fersen wieder nebeneinander gesetzt werden. Die Position der Fersen wird markiert und der Abstand zur Startlinie gemessen.
4. Wenn alle Daten erhoben sind, werden sie in eine gemeinsame Tabelle übertragen.
5. Überträgt die Daten in Form einer Matrix mit drei Spalten für *Größe*, *Schrittweite* und *Schuhgröße(-länge)*. Ihr könnt auch eine Spalte mit den Namen führen, aber diese werden in den folgenden Berechnungen nicht mehr gebraucht. Beachtet, dass in jeder Zeile der Matrix die zu jeweils einer Person gehörigen Daten stehen.
6. Jetzt kann die Analyse der Daten beginnen. Beginne mit der Erstellung eines Diagramms Schrittweite – Körpergröße!

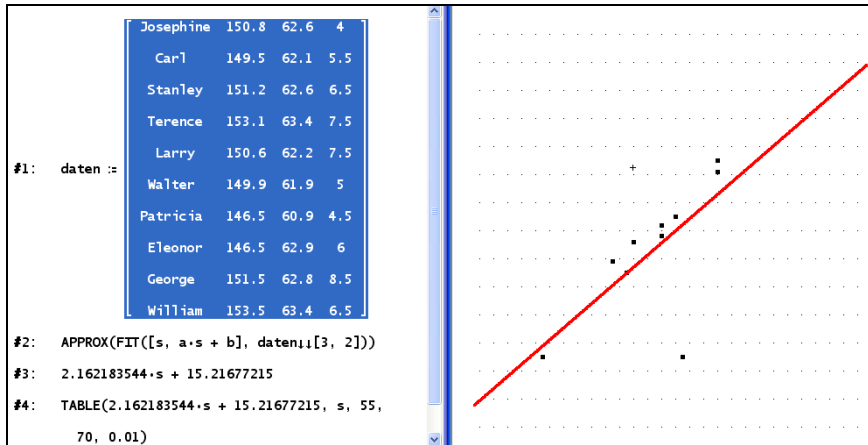
7. Richte geeignete Bereiche für die Achsen ein. (Lasse in horizontaler und vertikaler Richtung etwas Spielraum nach beiden Seiten. Achte auf passende Skalierungen.)
8. Erzeuge ein Streudiagramm der Daten. Glaubst du, aus den Daten einen Zusammenhang erkennen zu können?
9. Wir wollen annehmen, dass ein lineares Modell den Zusammenhang zwischen der Schrittlänge  $s$  und der Körpergröße  $g$  beschreibt und stelle die Größe  $g$  als lineare Funktion der Schrittweite  $s$  dar:  $g(s) = a \cdot s + b$ . In Derive verwendet man dazu die FIT-Funktion, auf den Taschenrechnern wird die lineare Regression direkt angeboten und in Excel setzt man die Funktionen STEIGUNG und ACHSENABSCHNITT ein, bzw. lässt sich zum vorliegenden Streudiagramm die lineare Trendgerade zeichnen. (Einen Punkt anklicken ...)
10. Im taunassen Gras werden Schrittspuren entdeckt. Ihr Abstand beträgt durchschnittlich 72,4 cm? Welchen Schätzwert für die Körpergröße ergibt das?
11. In einer Mülltonne werden blutverschmierte Herrenschuhe der Größe 7 (US-Maß) und der Größe 37 (EU-Maß) gefunden. Welche Mutmaßungen auf die Körpergröße des Besitzers der Schuhe lässt das zu?

Mögliche Ausführungen für die unterschiedlichen Plattformen werden nun mit Musterdaten vorgestellt. Die Daten wurden mit US-Schülerinnen und Schülern erhoben, daher stimmen die Schuhgrößen nicht mit unseren überein. (Informiere Dich in einem Schuhgeschäft über die entsprechenden Größen bei uns.)

**Beispieldaten**  
(erhoben in einer Klassen von 12jährigen Schülern - Sixgraders)

Name	Größe $g$ (cm)	Schrittweite $s$ (cm)	Schuhgröße $f$
Josephine	150.8	62.6	4
Carl	149.5	62.1	5.5
Stanley	151.2	62.6	6.5
Terence	153.1	63.4	7.5
Larry	150.6	62.2	7.5
Walter	149.9	61.9	5
Patricia	146.5	60.9	4.5
Eleonor	146.5	62.9	6
George	151.5	62.8	8.5
William	153.5	63.4	6.5

### Durchführung mit Derive



### Durchführung mit dem Voyage 200

DATA	Name	Grösse	Schritt	Schuh
1	"Joseph..."	150.8000	62.60000	4.000000
2	"Carl"	149.5000	62.10000	5.500000
3	"Stan"	151.2000	62.60000	6.500000
4	"Terry"	153.1000	63.40000	7.500000
5	"Larry"	150.6000	62.20000	7.500000
6	"Walter"	149.9000	61.90000	5.000000
7	"Pat"	146.5000	60.90000	4.500000

c1.Title="Name"

mainMhmes Plot 1

Plot Type..... Scatter→

Mark..... Box→

x..... c3

y..... c2

Higl. Graph. High: 1

Use Freq and Categories? NO→

Pres.....

Categor.....

Include Categories: C:

(Enter=SAVE) (ESC=CANCEL)

mainMhmes Calculate

Calculation Type.. LinReg →

x..... c3

y..... c2

Store RegEQ to... y1(x)→

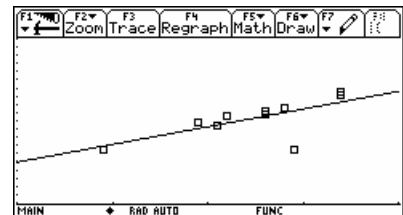
Use Freq and Categories? NO→

Pres.....

Categor.....

Include Categories: C:

(Enter=SAVE) (ESC=CANCEL)



### Durchführung mit dem TI83/84

L1	L2	L3	1
150.80	62.600	4.0000	
149.50	62.100	5.5000	
151.20	62.600	6.5000	
153.10	63.400	7.5000	
150.60	62.200	7.5000	
149.90	61.900	5.0000	
146.50	60.900	4.5000	

L1()=150.8

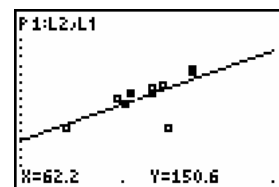
Plot1 Plot2 Plot3

Type: Off

Xlist:L2

Ylist:L1

Mark: +



LinReg

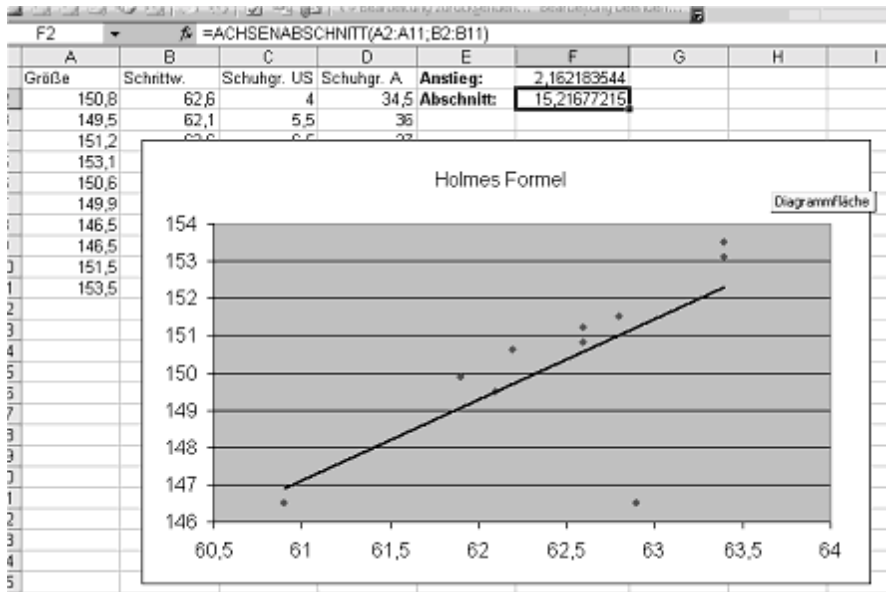
y=ax+b

a=2.1622

b=15.2168

2.1622X+15.2168

## Ausschnitt aus dem Excel-Arbeitsblatt



Nach diesen Daten lautet die geheimnisvolle Formel von Sherlock Holmes also:

$$y = 2,16x + 15,22$$

Wie lautet die Formel in Worten?

Mit der Formel lässt sich nun die Aufgabe 10 sofort lösen. (Die Körpergröße liegt etwa zwischen 171 und 172 cm.)

Für Frage 11 musst du entweder die Regressionen zwischen den unterschiedlichen Schuhgrößen und den Körpergrößen bestimmen, oder du findest die Lösung über den Zusammenhang zwischen Schuhgrößen und Schrittweiten als Funktion oder du beschaffst dir Umrechnungstabellen (Schuhfachhandel, Internet, ...).

Unter den Datenpunkten fällt ein „Ausreißer“ deutlich auf. Zu welcher Person gehört dieser? Könnte es Erklärungen für diesen Ausreißer geben?

Ändert sich Holmes' Formel wesentlich, wenn man den Ausreißer unberücksichtigt lässt?

Führe die Untersuchungen aber auf jeden Fall mit deinen erhobenen Daten durch. Decken sich die Ergebnisse ungefähr oder gelten für US-Jugendliche andere Werte? Wie lautet deine Formel? Was könnte die Ursache für eventuell deutlich andere Ergebnisse sein?

Beantworte auch mit „deiner“ Formel die Fragen 10 und 11.



## Weiterführende Aufgaben und deren Durchführung

### Erweiterung #1

Erinnere Dich an den Anfang des Kapitels. Holmes hat behauptet, die Rechnung sei „simple enough“. Die aus deinen Daten gewonnene Formel ist sicherlich recht gut, um deine Daten zu modellieren, aber sie enthält doch Koeffizienten, mit denen man nicht so einfach im Kopf rechnen kann. Man könnte annehmen, dass Holmes einen Zusammenhang im Sinn hatte, der ganze Zahlen oder einfache Brüche für den Koeffizienten der Schrittlänge und die additive Konstante enthält. In dieser ersten Erweiterung wollen wir versuchen, eine lineare Funktion (Gerade) mit möglichst einfachen Koeffizienten zu finden, die möglicherweise nicht so genau zu deinen Daten passt, aber einfacher und dennoch ausreichend genau ist.

1. Versuche ganze Zahlen, die nahe beim Koeffizienten der Schrittlänge (Anstieg der Regressionsgeraden) liegen und trage sie in eine Tabelle mit folgendem Aufbau ein.

Name	$x = \text{Schrittweite}$	$y = \text{Größe}$	$y - a_1 \cdot x$ mit $a_1 = \dots$	$y - a_2 \cdot x$ mit $a_2 = \dots$

usw.

2. Nimm den ersten Näherungswert  $a_1$  und erzeuge ein Streudiagramm für die Punkte  $(y \mid y - a_1 \cdot x)$ . Kannst du eine Gerade  $y = b$  so finden, dass die meisten Punkte innerhalb eines Abstands von wenigen Zentimetern von dieser Geraden liegen, dann nimm diesen Wert als Abschnitt  $b_1$ . Zeichne nun die Gerade  $y = a_1 \cdot x + b_1$  ins bestehende Streudiagramm zur Regressionsgeraden von vorhin. Vergleiche ...
3. Wiederhole Schritt 2 und beginne mit einem anderen „bequemen“ Wert  $a_2$ . Versuche eine möglichst „simple“ Formel zu finden.

### Erweiterung #2

Diese Erweiterung ist ziemlich genau eine Wiederholung der Prozedur 1 bis 9 von oben, allerdings mit dem Unterschied, dass du anstelle der Körpergröße die Länge der Schuhe nehmen sollst. Zeigt das Streudiagramm auch hier einen auffälligen Zusammenhang?

## KOMMENTAR des CORONERS

Die Polizei verfügt damit sofort über ein sehr gutes Beweismittel. Im Geschäft wurden Hinweise auf die Waffe, sowie Fingerabdrücke gefunden. In der Hand des Opfers fanden sich fremde Haare. Außerdem gab es noch Zeugenaussagen. Nachdem alle Beweismittel gesichert waren, hatte die Polizei bereits ein klares Profil des Tatverdächtigen, der wenig später nach diesem Profil festgenommen werden konnte.

## Kriminologie mit dem Wetterhäuschen

### Schätzung des Todeszeitpunkts bei wechselnden Wetterverhältnissen



#### WAS GESCHAH ...

Es ist 3 Uhr morgens and du bist der Coroner vom Dienst. Die Polizei ruft dich zu einem kleinen Wäldchen am Fluss. Dort ist der Leichnam eines jungen Mannes von einem Fischer aufgefunden worden, der sehr früh dorthin gekommen ist, um einen guten Platz für sein Hobby zu finden. Bei deiner Ankunft am Ort des Geschehens stellst du fest, dass der junge Mann eine schwere Kopfverletzung aufweist. Der Boden ist nicht felsig und es führt keine Blutspur zum Körper. Nach einer kurzen vorläufigen Untersuchung auf weitere Verletzungen und einer Sicherung des (Tat-?)Orts nimmst du dein Temperaturmessgerät zur Hand und stellst eine Lufttemperatur von 18,5° C fest. Dann machst du einen kleinen Schnitt in den Leichnam knapp unterhalb des rechten Brustkorbs und führst die Messsonde zur Leber des Opfers. Du misst die Temperatur und notierst weiterhin für die nächsten 1 1/2 Stunden alle 15 Minuten die Körpertemperatur. Deine Temperaturaufzeichnungen sehen folgendermaßen aus:

Zeit	Temperatur der Leber in °C
03:30	34,00
03:45	33,89
04:00	33,67
04:15	33,56
04:30	33,33
04:45	33,00
05:00	32,78

Das Opfer ist ein junger Mann von 19 Jahren mit einem Körpergewicht von 96 kg. Er wurde am Abend zuvor um 21 Uhr zum letzten Mal lebend gesehen. Er hatte seinen Freunden gesagt, dass er noch „etwas herumfahren“ würde. Das Fahrzeug des Opfers wurde dann auch auf dem Parkplatz eines ca. 8 km vom Tatort entfernten Fastfood-Restaurants gefunden.

## Hintergrundinformationen

Die Kenntnis des Todeszeitpunkts ist ein sehr wichtiger Faktor, wenn es darum geht, das Alibi eines Verdächtigen zu erschüttern oder überhaupt zu widerlegen. Wenn es keinen Tatzeugen gibt, ist es sehr schwierig, den genauen Zeitpunkt des Todes festzustellen. Der Einsatz der Temperaturwerte kann zu einer Schätzung verhelfen, aber auch die genauesten Daten und deren Analyse können bestenfalls eine Schätzung auf eine Stunde genau ermöglichen. Bernard Knight, ein bekannter und geschätzter Gerichtsmediziner der Universität von Cardiff in Wales behauptet sogar, dass man umso weniger auf die berechnete Todeszeit vertrauen kann, je mehr man sich auf ihre Feststellung durch Messung der Temperatur stützt und beruft. Der Abkühlungsvorgang eines Körpers ist ein komplexer Prozess, der von weit mehr Komponenten abhängt als nur von der Umgebungstemperatur. Andererseits ist aber, wenn man die damit verbundene Ungenauigkeit akzeptiert und berücksichtigt, eine sorgfältige Schätzung, die auf der Temperaturmessung beruht, eine nützliche Möglichkeit, einen Zeitraum anzugeben, innerhalb dessen der Tod eingetreten ist.

Die auf der Temperatur beruhende Schätzung wird durch das *Newtonsche Abkühlungsgesetz* begründet. Dieses Gesetz besagt, dass für jeden Zeitpunkt  $t$  nach Beginn des Abkühlungsprozesses gilt:

$$r(t) = \alpha \cdot (T(t) - K) \quad (1)$$

wobei  $r(t)$  die zum Zeitpunkt  $t$  auftretende Abkühlungsrate ist.  $T(t)$  ist die zu diesem Zeitpunkt herrschende Körpertemperatur,  $K$  ist die Umgebungstemperatur, die wir als konstant annehmen wollen.  $\alpha$  ist eine Proportionalitätskonstante, die von den Körpereigenschaften abhängt.

Diese Annahmen führen – nach Lösung der Differentialgleichung (1) – zu einer schönen Exponentialform für die Körpertemperatur, nämlich

$$T(t) = (T_{(t=0)} - K) \cdot e^{\alpha t} + K \quad (2)$$

Diese Formel kann auf unserem Rechner mit Hilfe einer exponentiellen Regression von  $(T - K)$  bezüglich  $t$  realisiert werden, wie zB auch in der Online-Hilfe von Derive für die FIT-Funktion vorgeschlagen wird. (Hinweis: die Regressionen sind im Index unter FIT zu finden.) Wenn wir nun die Daten unserer Story verwenden, dann können wir den Zeitpunkt des Todes schätzen – unter der Annahme einer konstant gewesenen Außentemperatur vom Eintritt des Todes bis zum Ende unserer Messung an der Leber des Opfers. Nun, der junge Mann wurde im Freien aufgefunden und die Außentemperatur war sicherlich nicht konstant. Daher lässt sich diese vereinfachte Form des Newtonschen Abkühlungsgesetzes nicht für die seit dem Tod verstrichene Zeit heranziehen.

Wenn aber die Umgebungstemperatur nicht konstant ist, dann ist es unwahrscheinlich, dass es für die sich anpassende Körpertemperatur eine „schöne“ Formel gibt. In diesem Fall müssen die entsprechenden Funktionswerte näherungsweise gefunden werden. Man sucht eine

numerische Approximation zur Bestimmung der Temperaturwerte. Dazu werden wir eine lineare Interpolation verwenden. Am Taschenrechner können wir entweder den Data/Matrix-Editor oder die CellSheet-Applikation einsetzen. Mit Excel arbeiten wir direkt mit der Tabellenkalkulation.

Diese Untersuchung ist zweigeteilt. Im ersten Teil wirst du die Abkühlungsgeschwindigkeit eines „Körpers“ unter der Annahme eines großen Temperatursprungs in der Umgebung messen. Das werden wir nur simulieren. Im zweiten Teil werden wir darauf aufbauend aktuelle Wetterdaten heranziehen, um eine realistischere Schätzung für den Zeitpunkt des Eintritts des Todes für das Opfer unseres Szenariums zu erhalten. In beiden Fällen werden wir eine Tabellenkalkulation benutzen, um auf die Temperatur des lebenden Körpers (37° C) zurück zu extrapolieren.

### Forensische Aufgaben

- Erstellen einer Schätzung des Todeszeitpunkts als Teil der Beweissicherung am Ort des Geschehens

### Naturwissenschaftlich-mathematische Aufgaben

- Beschreibung der Rolle des *Newtonschen Abkühlungsgesetzes* für die Schätzung des Zeitpunkts
- Anwendung der linearen Interpolation zur Gewinnung einer Abschätzung des Zeitpunkts für den Fall einer nicht konstanten Umgebungstemperatur

### Materialien

- Derive oder ein anders CAS, CAS-Rechner, Graphischer TR oder Excel

### Durchführung

Deine lokale Wetterstation kann dir die folgenden lokalen Temperaturwerte für die Nacht des Geschehens zur Verfügung stellen.

Zeit	Temperatur in ° C
5:00	18.3
4:30	18.4
4:00	18.4
3:30	18.5
3:00	18.5
2:30	18.9
2:00	18.9
1:30	19.2
1:00	19.3
0:30	20.0
24:00	20.4
23:30	21.1
23:00	21.7
22:30	22.2.

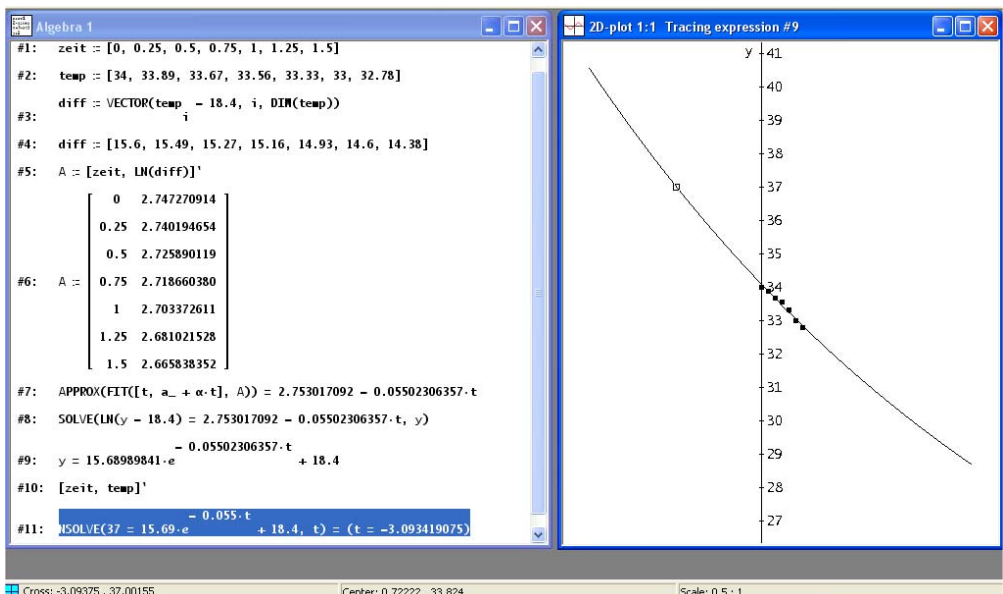
Damit wollen wir nun den Zeitpunkt des Todes schätzen. Dazu werden die Daten durch eine Exponentialfunktion angenähert.

1. Erzeuge die Listen `zeit` und `temp` aus deinen Daten für die Körpertemperatur. Die Liste `zeit` enthält die seit 3:30 verstrichene Zeit, daher  $[0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5]$ .
2. Die Umgebungstemperatur scheint zwischen 3:30 und 5:00 ziemlich konstant geblieben zu sein. Sie wird für die Zeit, in der wir die Temperatur des Opfers gemessen haben mit  $18,4^\circ$  angenommen. Erzeuge eine dritte Liste `diff`, die die Temperaturdifferenzen aus `temp` und  $18,4$  enthält.
3. Wir wollen die Abkühlungsgleichung aus (2) herleiten:

$$T(t) = (T_{(t=0)} - K)e^{-\alpha t} + K \rightarrow T - K = b \cdot e^{-\alpha t} \quad | \text{ diese Gleichung wird logarithmiert.}$$

$\ln(T - K) = \ln b + \alpha \cdot t$  | die linke Seite ist eine lineare Funktion von  $t$ . Daher kann die lineare Regression angewendet werden. Zuerst wird die entsprechende Datenmatrix  $A = [\text{zeit}, \text{LN}(\text{diff})]'$  erzeugt.

4. Die Regression erfolgt über die FIT-Funktion: `approx(fit([t, a_ + \alpha t], A))`. Welcher Wert für  $\alpha$  ergibt sich und welche Bedeutung hat er?
5. Entlogarithmieren und Auflösen der Gleichung nach  $y$  (für  $t$  wird  $y-18,4$  substituiert) liefert die Abkühlungsfunktion, die sofort gezeichnet werden kann. (Hier wurden auch die gemessenen Werte eingetragen.)



Mit dem Trace-Werkzeug (F3) können wir nun jenen Punkt auf der Kurve suchen, der der Körpertemperatur von ca.  $37^\circ$  entspricht:  $-3,10$ . Damit ergibt unsere Schätzung

3 Stunden und 6 Minuten vor 3:30, das wäre etwa 0:25 Uhr (aber unter der Voraussetzung einer konstanten Außentemperatur von  $18,4^\circ$ ). Natürlich kannst du auch die Exponentialgleichung lösen (siehe Ausdruck #11).

6. Nach der Auskunft der Wetterstation war die Temperatur während der Nacht nicht konstant. Wir müssen daher die entsprechende Temperaturfunktion – die dann die Rolle der bisherigen Konstanten  $K$  übernehmen soll – entwickeln. Eine Möglichkeit ist, die Funktion abschnittsweise durch die Verbindungsstrecken zwischen den Datenpunkten zu definieren – damit ist zwischen den Zeitpunkten jeweils linear zu interpolieren (3:30 entspricht  $t = 0!$ ).

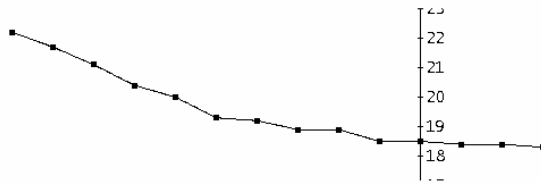
$$\#13: \text{zeit2} := \text{VECTOR}\left[-5 + \frac{k}{2}, k, 0, 13\right]$$

$$\#14: \text{zeit2} := [-5, -4.5, -4, -3.5, -3, -2.5, -2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5]$$

$$\#15: \text{umg} := [22.2, 21.7, 21.1, 20.4, 20, 19.3, 19.2, 18.9, 18.9, 18.5, 18.5, 18.4, 18.4, 18.3]$$

$$\#16: [\text{zeit2}, \text{umg}]'$$

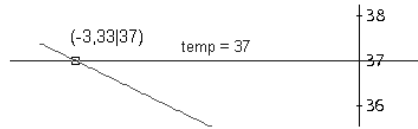
$$\#17: K(t) := \sum_{i=1}^{\text{DIM}(\text{zeit2}) - 1} \chi(\text{zeit2}_i, t, \text{zeit2}_{i+1}) \cdot \left( \frac{\text{umg}_{i+1} - \text{umg}_i}{\text{zeit2}_{i+1} - \text{zeit2}_i} \cdot (t - \text{zeit2}_i) + \text{umg}_i \right)$$



Ausdruck #16 erzeugt das Streudiagramm der von der Wetterstation zur Verfügung gestellten Daten und #17 das Diagramm der so angenäherten Temperaturkurve. Die Funktion  $\text{CHI}(a,x,b)f(x)$  wird verwendet, die  $f(x)$  genau zwischen  $a$  und  $b$  realisiert.

7. Offensichtlich gibt es kein vernünftiges analytisches Verfahren, die (Differential-) Gleichung (1) zu lösen, wenn die Konstante  $K$  durch die abschnittsweise definierte Funktion  $K(t)$  ersetzt wird. Daher müssen wir eine numerische Methode finden, die uns hilft, die seit dem Zeitpunkt des Todes vergangene Zeit zu schätzen. Wir können annehmen, dass der Tod erst nach 22:30 eingetreten ist.
8. Die einfachste aller numerischen Methoden, die von einer momentanen Änderungsrate zur zugehörigen Funktion führt, ist die *Eulersche Methode*. Schlage in der Online-Hilfe von Derive nach und erzeuge eine numerische Lösung für die Körpertemperaturfunktion aus der Gleichung (1), die nun so lautet:  $r(t) = T'(t) = \alpha \cdot (T(t) - K(t))$ . (Tipp: Verwende den bereits ermittelten Wert für  $\alpha$  und eine negative Schrittweite.)
9. Für welchen Zeitpunkt kann nun eine Körpertemperatur  $37^\circ$  geschätzt werden?

```
#18: EULER_ODE(- 0.055*(v - K(t)), t, v, 0, 34, -0.025, 150)
```



```
#19: SELECT(36.95 ≤ v ≤ 37.05, v, EULER_ODE(- 0.055*(v - K(t)), t, v, 0, 34, -0.025, 150))
```

```
#20: [ -3.3   36.96736103 ]
      [ -3.325 36.99036115 ]
      [ -3.35  37.01336540 ]
      [ -3.375 37.03637377 ]
```

Wir können den Graph von #18 mit der 37°-Geraden schneiden (über Trace oder mit dem Cursor) und lesen  $t \approx -3,33$  ab oder wir approximieren #18 und suchen jenen Zeitpunkt, für den der Funktionswert möglichst nahe bei 37° liegt. Eleganter wird es, wenn wir mit Hilfe der SELECT-Funktion den Ausgabebereich der Wertetabelle sinnvoll einschränken. Wir erhalten nun einen Zeitpunkt, der 3,33 Stunden von 3:30 liegt. Das ist etwa um 0:10 Uhr. Wenn wir überlegen, dass der Körper bei einer höheren Umgebungstemperatur langsamer abkühlt, dann passt dieser gegenüber der Lösung von Aufgabe 5 frühere Zeitpunkt ins Bild.

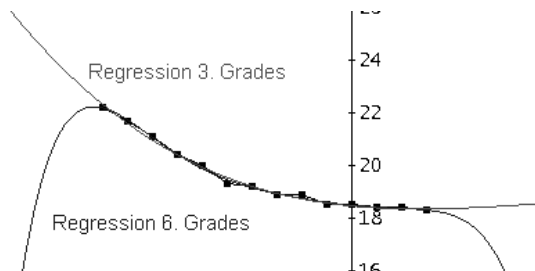
Die Umgebungstemperaturfunktion lässt sich für den interessanten Zeitraum auch über eine polynomiale Regression recht gut modellieren. Wir zeigen den Einsatz der Regressionspolynome 6. und 3. Grades (eine exponentielle Regression ist nicht so günstig!)

```
#25: K6(t) := FIT([t, a_*t^6 + b_*t^5 + c_*t^4 + d_*t^3 + e_*t^2 + f_*t + g], [zeit2, umg]')
```

```
#26: K6(t) := - 0.0007856897144_*t^6 - 0.005769786457_*t^5 - 0.006629223889_*t^4 + 0.006248655884_*t^3 +
          0.07625229912_*t^2 - 0.1920798999_*t + 18.49217421
```

```
#27: K3(t) := FIT([t, d_*t^3 + e_*t^2 + f_*t + g], [zeit2, umg]')
```

```
#28: K3(t) := - 0.007280954339_*t^3 + 0.08182993477_*t^2 - 0.1810762766_*t + 18.46291061
```



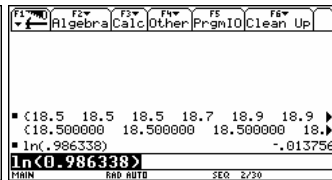
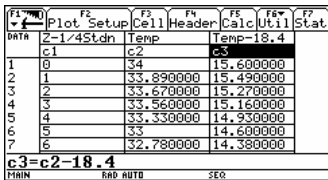
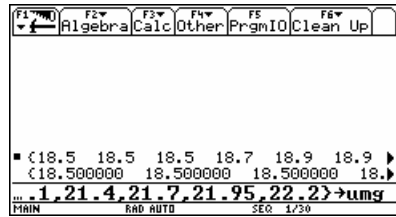
#29:  $\text{SELECT}(36.98 \leq v \leq 37.02, v, \text{EULER\_ODE}(-0.055 \cdot (v - K3(t)), t, v, 0, 34, -0.025, 150))$

#30:  $\begin{bmatrix} -3.325 & 36.98776454 \\ -3.35 & 37.01079640 \end{bmatrix}$

#31:  $\text{SELECT}(36.98 \leq v \leq 37.02, v, \text{EULER\_ODE}(-0.055 \cdot (v - K6(t)), t, v, 0, 34, -0.025, 150))$

#32:  $\begin{bmatrix} -3.325 & 36.99138974 \\ -3.35 & 37.01445445 \end{bmatrix}$

Die Durchführung auf den Taschenrechnern (CAS und GTR) ist sehr ähnlich. Mit Hilfe der exponentiellen Regression finden wir rasch die Abkühlungskonstante für den Leichnam. Außerdem wird für spätere Zwecke eine Liste der Umgebungstemperaturmessungen (in Intervallen von 15 Minuten) angelegt.



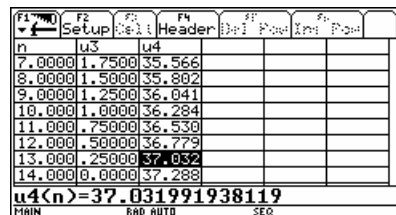
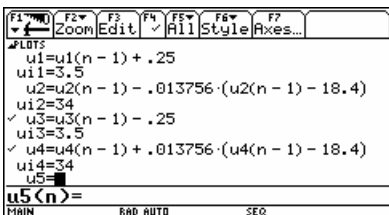
## Weiterführende Aufgaben und deren Durchführung

### Erweiterung #1

Die erste Erweiterung könnte auch als Einleitung verwendet werden. Gleichung (1) von Seite 11 ist eine Differentialgleichung. Sie lässt sich auch als Differenzengleichung formulieren:

Die Temperaturab-(zu-)nahme ist proportional zum Zeitintervall und zur Differenz aus momentaner Temperatur und Umgebungstemperatur  $K$ :

$$T_n = T_{n-1} + \alpha \cdot (T_{n-1} - K) \tag{3}$$



$u1$  und  $u2$  zeigen die rekursiven Definitionen von Zeit und Temperatur bei konstanter Umgebungstemperatur  $18,4^\circ$  ab 3:30 Uhr,  $u3$  und  $u4$  entwickeln die rekursiven Folgen zeitrückläufig.



F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Zoom	Edit	Fill	Style	Axes...		
$u_2 = u_2(n-1) - .013756 \cdot (u_2(n-1) - 18.4)$ $u_3 = u_3(n-1) - .25$ $u_4 = u_4(n-1) + .013756 \cdot (u_4(n-1) - 18.4)$ $u_5 = u_5(n-1) + .013756 \cdot (u_5(n-1) - umg_n)$						
u15=34 MAIN      RAD AUTO      SEQ						

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Setup	Header	Cell	Row	Col	Zoom	...
n	u3	u4	u5			
7.0000	1.7500	35.566	35.536			
8.0000	1.5000	35.802	35.763			
9.0000	1.2500	36.041	35.991			
10.000	1.0000	36.284	36.222			
11.000	.75000	36.530	36.454			
12.000	.50000	36.779	36.685			
13.000	.25000	37.032	36.915			
14.000	0.0000	37.283	37.145			
u5(n)=37.144927968003 MAIN      RAD AUTO      SEQ						

u5 zeigt die zeitrückläufige Körpertemperatur unter Einfluss der Umgebungstemperatur, die in der Liste umg gespeichert worden ist.

### Ausschnitte aus dem Excel-Arbeitsblatt

Zuerst bestimmen wir mit dem Solver die Abkühlungsfunktion des Körpers. Dabei wird die Summe der Fehlerquadrate in Zelle E10 minimiert. Die Abkühlungskonstante für Viertelstundenabstände ergibt sich mit 0,0137. Sie wird weiter verwendet.

D2		= \$B\$14*EXP(A2*\$C\$14)			
	A	B	C	D	E
1	Zeit in 1/4 h	Lebertemp.	Temp-differenz	Modell	SSE
2	0	34,00	15,60	15,6856555	0,00733687
3	1	33,89	15,49	15,472838	0,00029453
4	2	33,67	15,27	15,2629079	5,0297E-05
5	3	33,56	15,16	15,0558261	0,0108522
6	4	33,33	14,93	14,8515539	0,00615379
7	5	33,00	14,60	14,6500532	0,00250532
8	6	32,78	14,38	14,4512864	0,00508175
9					
10					0,03227476
11	Umg.temp.	18,40			
12					
13		b	alpha		
14		15,6856555	-0,013660533		
15					

In Spalte G tragen wir die interpolierten Werte für die Temperaturdaten ein. In Spalte H erzeugen wir die rückgerechneten Körpertemperaturwerte gemäß der Differenzgleichung (3).

Auch hier liegt der theoretischen Zeitpunkt des Todes zwischen 0:00 Uhr und 0:15 Uhr.

H3		= H2-\$C\$14*(H2-G2)		
	F	G	H	I
1	Zeit	Umgebung		
2	03:30	18,50		34
3	03:15	18,50	34,2117383	
4	03:00	18,50	34,426369	
5	02:45	18,70	34,6439317	
6	02:30	18,90	34,8617343	
7	02:15	18,90	35,0797801	
8	02:00	18,90	35,3008045	
9	01:45	19,05	35,5248482	
10	01:30	19,20	35,7499034	
11	01:15	19,25	35,9759839	
12	01:00	19,30	36,2044698	
13	00:45	19,65	36,4363938	
14	00:30	20,00	36,6646913	
15	00:15	20,20	36,8923398	
16	00:00	20,40	37,1203661	
17	23:45	20,75	37,3487752	
18	23:30	21,10	37,5755233	

### Erweiterung #2

Als zweite mögliche Erweiterung kommt die Durchführung des Übergangs von der Differenzgleichung (3) über die Lösung der Differentialgleichung (1) zum Newtonschen Abkühlungsgesetz (2) in Frage.

$$T_n = T_{n-1} - \alpha \cdot (T_{n-1} - K) \cdot \Delta t$$

$$\frac{T_n - T_{n-1}}{\Delta t} = \frac{\Delta T}{\Delta t} = -\alpha \cdot (T_{n-1} - K)$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = -\alpha \cdot (T - K) \rightarrow \frac{dT}{dt} = -\alpha \cdot (T - K)$$

Den Rest überlassen wir einem CAS.

$$\frac{dT}{T - K} = -\alpha \cdot dt \quad \Bigg| \int$$

Da am Taschenrechner nicht zwischen  $T$  und  $t$  unterschieden werden kann, nehmen wir  $t_{-}$  und  $t$ . Als Anfangsbedingung wird daher  $t_{-}(t=0) = t_{-0}$  in den Rechner eingegeben.

$\int \left( \frac{1}{t_- - k} \right) dt_- = \int \alpha dt$      $\ln(t_- - k) = \alpha \cdot t + c$   
 $\blacksquare \text{ solve}(\ln(t_- - k) = \alpha \cdot t + c, t_-)$   
 $t_- = e^{\alpha \cdot t + c} + k$   
 $\blacksquare t_- = e^{\alpha \cdot t + c} + k \mid t_- = t_{-0} \text{ and } t = 0$   
 $t_{-0} = e^c + k$

$\blacksquare t_- = e^{\alpha \cdot t + c} + k \mid t_- = t_{-0} \text{ and } t = 0$   
 $t_{-0} = e^c + k$   
 $\blacksquare \text{ solve}(t_{-0} = e^c + k, c)$   
 $c = \ln(-(k - t_{-0})) \text{ and } k - t_{-0} < 0$   
 $\blacksquare t_- = e^{\alpha \cdot t + c} + k \mid c = \ln(-(k - t_{-0}))$   
 $t_- = k - (k - t_{-0}) \cdot e^{\alpha \cdot t}$

## KOMMENTAR des CORONERS

Obwohl in vielen TV-Serien (und Kriminalgeschichten und –romanen) dem geschätzten Todeszeitpunkt große Bedeutung beigemessen wird, sind gerade die Temperaturwerte die am wenigsten verlässlichen für diese Schätzung. Da sind eher Informationen über den letzten Zeitpunkt zu dem das Opfer lebend gesehen wurde ein guter Ausgangspunkt. Im Fall, dass der Tod zu Hause eingetreten ist, sind die angehäuften Post, Telefonaufzeichnungen, Nachweise über die zuletzt verzehrte Nahrung und auch lärmende Wecker gute Hinweise. Aber nichts ist so gut wie genaue zeitliche Angaben, wann, wo und mit wem das Opfer zum letzten Mal lebend gesehen worden ist.

Im hier berichteten Fall sagten Zeugen aus, dass sie gesehen hatten, dass sich das Opfer am Abend vorher mit drei „Freunden“ im Fastfood-Restaurant unterhalten hatte, bevor sie zu viert in das Auto des Opfers eingestiegen und weg gefahren sind. Das hatte sich um 22 Uhr 30 ereignet.

Bei der genauen Untersuchung des Fundorts der Leiche und seiner Umgebung bei Tageslicht wurde im hohen Gras eine Radkappe gefunden. Auf der nahe gelegenen Straße konnten Spuren eines Reifenprofils gesichert werden, die mit dem Profil der Reifen des Opfers übereinstimmten. Die drei „Freunde“ wurden identifiziert und befragt. Einer der drei berichtete über eine hitzige Auseinandersetzung zwischen ihnen und dem Opfer. Er erzählte, dass sie die Autoschlüssel genommen und mit dem Auto weggefahren seien und das Opfer allein zum Restaurant zurück gegangen sei. Sie wurden verhaftet und auf sie wartet eine Gerichtsverhandlung.

## Eine Buchstabensuppe

### Unfall oder Selbstmord? Ein merkwürdiger Abschiedsbrief!



#### WAS GESCHAH ...

Du wirst gerufen, um bei der Untersuchung eines vermuteten Selbstmordes in der besseren Wohngegend deiner Stadt mitzuwirken. Bei der Haustüre wirst du von Polizeibeamten empfangen, die gerade den Ehemann des Opfers befragen. Du wirst dann zum Büro im ersten Stock des Hauses geleitet, wo du das Opfer findest. Es handelt sich dabei um eine Frau im Alter von etwa vierzig Jahren, deren Oberkörper über den Schreibtisch gestreckt liegt. Offensichtlich blieb der Ort des Geschehens nicht unberührt, denn auf dem Schreibtisch befindet sich nichts außer einem halb geleerten Wasserglas. Du machst Fotos und notierst alle Auffälligkeiten. Dabei findest du auch eine Schreibtischlade, in die augenscheinlich hastig Gegenstände vom Schreibtisch geräumt worden sind. Darunter befindet sich eine leere Schachtel von Schlafpulvern und auch ein sehr seltsames Schriftstück, das unten abgebildet ist. Bei einer Besprechung mit den Polizeibeamten erfährst du, dass der Ehemann, der offensichtlich finanziell von seiner Frau abhängig ist (war), darauf drängt, dass der Tod als Unfall und nicht als Selbstmord erklärt wird. Er behauptet, dass seine Frau oft Schlafmittel gebraucht hätte und offensichtlich dieses Mal unglücklicherweise eine zu große Dosis genommen hätte. Im Falle eines Unfalls hätte er sehr rasch Zugriff auf das Erbe. Nachdem du die Medikamentenschachtel genauer betrachtet hast, kommst du zum Schluss, dass auf Grund des Datums der ärztlichen Verschreibung und der vorgeschriebenen Dosierung es mehr als unwahrscheinlich ist, dass jemand durch einen Zufall eine derartige Menge von Schlafpulvern einnehmen könnte. Überdies bist du natürlich sehr neugierig geworden, was die „Botschaft“ mit der zehnstelligen Zahl am Ende bedeuten könnte.

dv kadaufwa dra zhll xvka dv tc ehwi hxxvgwd gla dra  
 wgteau eamvj. zhfu dra kfqfdl. nvu ahxr zhfu xgea dra  
 wgteau hwk draw dhia dra uathfwkau jraw kfbkak ec  
 nfnndaaw. zmhxa dra ualgmdl dvqadrau hwk cvg rhba fd!

**1113051208**

## Hintergrundinformationen

Die Nachricht ist offensichtlich auf irgendeiner Weise verschlüsselt. Man könnte glauben, dass die am Ende angegebene Zahl für die Entschlüsselung von großer Bedeutung ist. Du wirst diese Meinung besonders dann vertreten, wenn du gerade einen Bestseller über Vermögen, die in Schließfächern von Schweizer Banken liegen, gelesen hast. Du bist davon begeistert, dass die von Null verschiedenen Ziffern zu den ersten sechs Zahlen der Fibonaccifolge gehören. Weitere Untersuchungen ergeben, dass die Bank des Opfers den ausdrücklichen Auftrag hat, die Gelder ihres beträchtlichen „Schenkungskontos“ jenen Personen auszuzahlen, die die Geheimnummer ihres Kontos wissen. Die Zahl am Ende der Nachricht ist nicht diese Nummer. Die mit der Untersuchung des Falls beauftragten Beamten kommen zum Schluss, dass es wichtig sei, die Botschaft zu entschlüsseln.

Geheimschriften und Verschlüsselungen sind fast so alt wie die Schrift selbst. Es gab immer Umstände, die geheime Informationen erforderten oder von denen man zumindest annahm, dass sie geheim gehalten werden mussten. Einer der ältesten Codes war der so genannte Caesar-Code. Er wird Julius Caesar zugeschrieben, der damit mit seinen Generälen Nachrichten ausgetauscht haben soll. Die Idee ist sehr einfach: wähle eine Zahl, zB 5, und verschiebe dann jeden Buchstaben des Alphabets um 5 Stellen. Dann wird in diesem Fall aus A ein F, aus B ein G, usw. Am Ende des Alphabets beginnt man wieder von vorne: so wird dann aus V ein A, aus W ein B usw. Diese Verschlüsselung war eine Zeit lang recht wirkungsvoll, aber die Codeknacker kamen bald dahinter, dass sie in maximal 25 Versuchen die Botschaft entschlüsseln konnten. Es genügte meist schon für ein genügend langes Wort die Verschiebungszahl zu finden, die dieses Wort zu einem sinnvollen transformierten machte, um den ganzen Text zu decodieren.

Der logische nächste Schritt in der Entwicklung von Verschlüsselungen (= Codes) war der Substitutionscode (nach Caesar's Verschiebungscode). In diesem Fall wird das Alphabet durchgemischt und dann ersetzt jeder Buchstabe des gemischten Alphabets jenen, der an der gleichen Stelle im normalen Alphabet steht. Wenn zB R und U die ersten beiden Buchstaben und A und E die letzten beiden des Mischalphabets (das ist dann der Code) sind, ersetzen sie A und B bzw. Y und Z im zu verschlüsselnden Text. Der Empfänger der Nachricht muss natürlich eine Kopie des Codes besitzen und braucht nur den Vorgang umzukehren um die Originalnachricht lesen zu können. Leider ist dieses Verfahren, obwohl es in vielen Rätseln in Zeitschriften auftaucht, eben nur das, ein einfaches Rätsel. Es ergibt keine sichere Verschlüsselungsmethode. In jeder Sprache treten die Buchstaben mit gewissen – bekannten – Häufigkeiten auf.

In der folgenden Tabelle finden wir die Häufigkeiten der Buchstaben in „normalen“ englischen Texten. Die anschließende Zusammenstellung reiht die Buchstaben in „Häufigkeitsgruppen“, wobei mit dem häufigsten Buchstaben, dem „E“ begonnen wird. Etwa gleich häufig (selten) treten die Buchstaben V, K, X, J, Q und Z auf (höchstes 1%).

Hinweis: Wir verwenden keine Umlaute und kein scharfes ß.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
7,81	1,28	2,93	4,11	13,05	2,88	1,39	5,85	6,77	0,23	0,42	3,60	2,62
5,00	2,50	1,50	5,00	18,50	1,50	4,00	4,00	8,00	>0,50	1,00	3,00	2,50
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
7,28	8,21	2,15	0,14	6,64	6,46	9,02	2,77	1,00	1,49	0,30	1,51	0,09
11,50	3,50	0,50	<0,50	7,00	7,00	5,00	5,00	1,00	1,50	<0,50	<0,50	1,50

Tabelle 1: Tabelle der Buchstabenhäufigkeiten (in %) in der englischen (2. Zeile) und deutschen Sprache (3. Zeile)

I	~ 13%	E
II	~ 9%	T
III	6 – 8%	A, O, N, R, I, S
IV	5 – 6%	H
V	2,5 – 4,5%	D, L, F, C, M, U
VI	1 – 2,5%	G, Y, P, W, B
VII	höchstens 1%	V, K, X, J, Q, Z

Tabelle 2: Buchstabengruppen geordnet nach Häufigkeiten (englische Sprache):

Die Häufigkeiten für die verschiedenen Sprachen findet man in vielen einschlägigen Publikationen und im Internet. Eine Adresse ist:

<http://www.santacruzpl.org/readyref/files/g-l/ltrqeng.shtml>

Diese Internetseite bietet auch die Häufigkeiten des Auftretens der Buchstaben in anderen Sprachen wie Deutsch, Französisch und Spanisch. Man gelangt zu diesen, indem man das „eng“ in der URL (ltrqeng.shtml) ersetzt durch ger, fr oder sp.

Die Häufigkeitstabellen erwiesen sich als das Ende der Substitutionscodes. Sie waren nicht mehr sicher. Während es sehr unwahrscheinlich ist, dass die Häufigkeiten in einer kurzen Nachricht auftreten, folgen sie in längeren Texten zumindest in der Reihenfolge für die wichtigsten Buchstaben. Sind einmal diese Buchstaben identifiziert, kann die Botschaft mit großer Wahrscheinlichkeit entziffert werden. Kurze Nachrichten passen sich oft den Werten der Häufigkeitstabelle überhaupt nicht an. Hier kann die gröbere zweite Tabelle ein guter Start zum Knacken der Nachricht sein. Außerdem gibt es auch Tabellen für die Häufigkeiten von Zweier-, Dreier- und Vierergruppen von Buchstaben. Im Deutschen führen „EN“, „ER“ und „CH“ die Hitliste der Buchstabenpaare an.

Andere Codierungsverfahren ersetzen die Substitutionscodes für militärische und diplomatische Kommunikation. Ein bedeutendes wurde vom französischen Kryptographen *Blaise de Vigenère* (1523-1596) entwickelt. Er verwendete ein Schlüsselwort, wobei die Buchstaben

des Originaltextes um die Position des Zeichens des Schlüsselworts an dieser Stelle verschoben werden.

Ein Beispiel soll das verdeutlichen: Unser Text beginnt mit „SEE“ und das Schlüsselwort beginnt mit „THIS“.

Original	S (19)	E(5)	E(5)	...	In Klammern stehen die Positionen im Alphabet, bzw. die den Positionen entsprechenden Buchstaben.
Schlüssel	T (20)	H (8)	I (9)	S (19)	
Summe mod 26+1	14 (N)	14 (N)	15 (M)	...	

Der verschlüsselte Text beginnt demnach mit „NNM“. Wenn wir zum Rest nach Division durch 26 (mod 26) nicht 1 hinzufügen würden, gäbe es auch das Resultat 0, was keiner Buchstabenposition entspricht. Man könnte die Buchstaben auch von 0 bis 25 nummerieren, und den Einser weglassen. Falls das Schlüsselwort kürzer ist als der zu codierende Text, wird es einfach periodisch wiederholt.

Nun wollen wir NNM wieder entschlüsseln, wobei die Prozedur einfach umgekehrt wird.

codierter Text	N (14)	N(14)	M(15)	...	Hinweis: $-6 \bmod 26 = 20$
Schlüssel	T (20)	H (8)	I (9)	S (19)	
Differenz mod 26-1	19 (S)	5 (E)	5 (E)	...	

Womit SEE wieder gewonnen wurde.

Damit haben wir eine Situation wie beim Blick durch ein Vergrößerungsglas. Die Welt des Entschlüsslers ist der Gegensatz zur Welt des Verschlüsslers. Das Schlüsselwort spielt dabei die Rolle des Vergrößerungsglases.

Von diesem Code hat man lange angenommen, dass er nicht zu knacken sei. Daher auch sein Name „*Le Chiffre Indéchiffable*“. Es gelang jedoch dem Engländer Charles Babbage, der auf dem Gebiet der Informatik Pionierarbeit geleistet hat, und dem preussischen Offizier *Friedrich Wilhelm Kasiski* diesen Code unabhängig voneinander erfolgreich zu attackieren. Sie verwendeten statistische Methoden und die Untersuchung der Häufigkeiten von Wiederholungen. Die Kryptoanalyse für diesen Code ist aber bei weitem schwieriger als beim einfachen Substitutionsverfahren.

Bis vor nicht allzu lange Zeit wurde eine Variante der Vigenère-Methode, die für jedes Dokument einen eigenen Schlüssel verwendet, im diplomatischen Austausch von Nachrichten verwendet. Der Schwachpunkt liegt aber darin, dass sowohl Sender wie auch Absender über eine Kopie des Schlüssels verfügen müssen. Es beeinträchtigt natürlich die Sicherheit ungemessen, wenn der Schlüssel in unrechtmäßige Hände gelangt.

Moderne Verschlüsselungsmethoden basieren auf Ergebnissen der Zahlentheorie und abstrakten Algebra. Mit einer dieser Methoden lässt sich auch die Zahl am Ende der Nachricht der Toten entschlüsseln. Dieses Verfahren werden wir später genauer behandeln.

Jetzt ist es aber an der Zeit, zu unserer Aufgabe zurückzukehren, diese letzte Nachricht zu dechiffrieren. Wir vermuten, dass ein Substitutionscode verwendet wurde. Um dir bei dieser Aufgabe zu helfen, werden dir Hilfsprogramme für Derive und den TI-CAS-Rechner zur Verfügung gestellt. Diese Programme werden für dich die Häufigkeit der Buchstaben herausfinden und auch eigene Nachrichten mit Hilfe eines gemischten Alphabets verschlüsseln.

### **Forensische Aufgabe**

- Den Wert einer genauen Beweissicherung am Ort eines Todesfalls demonstrieren, dass die Todesart bestimmt werden kann: natürlicher Tod, Selbstmord, Mord oder Unfall

### **Mathematische Aufgaben**

#### **Verfahren 1 – ein einfacher Substitutionscode**

- Ermitteln der Häufigkeiten des Auftretens der Buchstaben in einer verschlüsselten Nachricht und vergleichen dieser Häufigkeiten mit den bekannten Häufigkeiten der Buchstaben in englischsprachigen (oder anderen) Texten
- Verwenden dieser Häufigkeiten, um den Inhalt einer Nachricht herauszufinden
- Arbeiten mit bereitgestellten Programmen zur Unterstützung von Ver- und Entschlüsseln von Nachrichten

#### **Verfahren 2 – der Vigenère-Code**

- Vergleichen der Ergebnisse einer Vigenère-Codierung mit einer einfachen Substitutionsmethode

#### **Verfahren 3 – der RSA-Code**

- Kennen lernen der Modulararithmetik
- Verstehen der Grundlagen des RSA-Verfahrens, eines Systems mit öffentlichem Schlüssel (Public Key Crypto-System)
- Einiges über Primzahlen und deren Rolle im RSA-Codierungssystem lernen
- Kennen lernen einiger beachtenswerter Eigenschaften der MOD-Funktion im Zusammenhang mit einfachen zusammengesetzten Zahlen (Produkt zweier Primzahlen)

### **Materialien**

- Derive oder ein anders CAS, CAS-Rechner, Graphischer TR oder Excel
- Ein englisches (oder anderssprachiges) Wörterbuch

## Verfahren 1 – ein einfacher Substitutionscode

Folge den Anweisungen deines Lehrers / deiner Lehrerin und lade die Hilfsprogramme:

- Scramble () erzeugt eine Zufallsanordnung des Alphabets
- No\_Caps (Text) wandelt Groß- in Kleinbuchstaben um
- Encode (Text) codiert einen Text im Substitutionsverfahren
- Encode\_Code (Text) codiert einen Text im Substitutionsverfahren und gibt auch den verwendeten Ersetzungscode aus
- freq (Text) gibt die Häufigkeit der Buchstaben in einem Text aus (absolut und in %)

Du wirst diese Programme dazu verwenden können, die verschlüsselte Botschaft der tot aufgefundenen Frau zu entziffern und auch eigene Botschaften zu verschlüsseln.

### WIR ENTSCHLÜSSELN DIE NACHRICHT

1. Bevor wir uns mit dieser Nachricht beschäftigen, wollen wir das Entschlüsselungsverfahren an einem kürzeren chiffrierten Text versuchen. Hier ist eine Derive-Sitzung (am TI-Rechner geht es genau so, wie der Bildschirmausschnitt zeigt!)

#6: Notation := Decimal

#7: NotationDigits := 3

#8: msg := kdkf zbh kek vtokx nkghj, fbx kdkhyxeofl os jii gijam jfw peoxk

#9: freq(msg)

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n
#10:	1	2	0	2	3	4	2	3	3	4	8	1	1	1
	1.96	3.92	0	3.92	5.88	7.84	3.92	5.88	5.88	7.84	15.6	1.96	1.96	1.96
	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z		
	4	1	0	0	1	1	0	1	1	5	1	1		
	7.84	1.96	0	0	1.96	1.96	0	1.96	1.96	9.80	1.96	1.96		

(Die Zeichenkette muss unter " " eingegeben werden: msg := "kdkf z ...")

2. Wenn wir die, mit dem Programm freq(Text) erzeugte Häufigkeitstabelle betrachten, fällt auf, dass das „k“ der am häufigsten vorkommende Buchstabe ist, gefolgt vom „x“, das 5 mal vorkommt (15,6% bzw. 9,8%). Nach Tabelle 1 könnten das die Buchstaben „e“ und „t“ sein.

"a"	"b"	"c"	"d"	"e"	"f"	"g"
1.00	2.00	0.00	2.00	3.00	4.00	2.00
1.96	3.92	0.00	3.92	5.88	7.84	3.92

Wir führen die entsprechenden Ersetzungen durch:

"e e t e e t e t e e"  
 "kdkf zbh kek vtokx nkghj, fbx kdkhyxeofl os jii gijam jfw peoxk"



3. Der Text ist natürlich viel zu kurz, dass die Statistik hier ihre wirkliche Macht zeigen kann, aber wir können ja unseren Hausverstand und unsere Kenntnisse der englischen Sprache einsetzen. Wir vermuten, dass das dritte Wort „t . e“ der Artikel „the“ sein könnte, und substituieren für alle „e“ ein „h“:

```
"e e the et e t e e th h te"
"kdkf zbh xek vtokx nkghj, fbx kdkhyxeofl os jii gijam jfw peoxk"
```

4. Wir kehren zur Häufigkeitstabelle zurück und finden, dass die Buchstaben „f“, „j“ und „o“ die gleiche Häufigkeit aufweisen und damit höchstwahrscheinlich in die Gruppe III (A, O, N, R, I, S) gehören. Wie sollen wir uns entscheiden? Etwas Kombinationsgabe ist gefragt. Im vorletzten Wort tritt das Buchstabenpaar „jf“ auf, von dem wir annehmen können, dass nicht beide Vokale sind. Es bleibt aber noch immer eine Menge von Möglichkeiten offen. Nach Tabelle 1 versuchen wir es mit „a“ für „j“ und „n“ für „f“.

```
"e en the et e a n t e e th a a h te"
"kdkf zbh xek vtokx nkghj, fbx kdkhyxeofl os jii gijam jfw peoxk"
```

5. Schön langsam verlassen wir den Bereich, in dem die Statistik hilft, aber von den häufigsten Buchstaben im Text ist noch das „o“ übrig und von Gruppe III sind noch O, R, I und S zu vergeben. Wenn wir das letzte Wortfragment „h. te“ betrachten, fallen wohl R und S, aber auch O aus und es bleibt „i“ für „o“:

```
"e en the iet e a n t e e thi i a a hite"
"kdkf zbh xek vtokx nkghj, fbx kdkhyxeofl os jii gijam jfw peoxk"
```

6. Jetzt müssen wir uns auf unsere Kenntnisse der englischen Sprache berufen. Versuche das Sprichwort zu vervollständigen. (Tipp: „os“ und „jii“ können weiter helfen. Die Lösung findest du im Verlauf der nächsten Seite.)
7. Nun solltest du auch den Abschiedsbrief von Seite 19 dechiffrieren können. Wenn es gelungen ist, führe die darin gegebenen Anweisungen aus. Wie lautet dein Ergebnis?

### **CODIERE EINE EIGENE NACHRICHT**

1. Verfasse eine „Top Secret“-Nachricht im Umfang von ca. 200 Buchstaben an einen deiner Freunde. Schreibe in Englisch oder Deutsch.
2. Wende das Programm `freq()` auf die Nachricht an und vergleiche die auftretenden Häufigkeiten mit den Werten aus der Tabelle. Erzeuge für deinen Gebrauch auch eine Tabelle nach Art der Tabelle 2 für die deutsche Sprache.
3. Codiere die Nachricht mit dem Encode-Programm.
4. Wende `freq()` auch auf den codierten Text an und vergleiche die Häufigkeiten mit denen der unverschlüsselten Nachricht.
5. Sende (oder übergib) die Nachricht einem Freund oder einer Freundin. Du solltest auch von ihm/ihr eine auf diese Weise chiffrierte Nachricht erhalten.

6. Versucht nun beide, die Nachrichten zu entschlüsseln. Je länger der Text und je „normaler“ er ist, desto eher werden die Häufigkeiten aus den Tabellen 1 und 2 angewendet werden können. (Wenn du zB die Lebensgeschichte von *Abraham a Sancta Clara* erhältst, wird es nicht so einfach werden! Warum nicht?)

## Verfahren 2 – der Vigenère-Code

- Lade die Hilfsprogramme
  - `Ltrs_Only(Schlüssel)` entfernt alle Leer- und Sonderzeichen aus dem Schlüsseltext, wandelt in Kleinbuchstaben um.
  - `Vig_Encode(Schlüssel, Text, Richtung)` verarbeitet den Text mit dem vorliegenden Schlüssel (Richtung = 0: verschlüsseln und Richtung = 1: entschlüsseln).

Vergiss nicht, dass alle Zeichenketten zwischen " eingeschlossen werden müssen, die dann aber im Derive-Fenster nicht aufscheinen. Arbeite mit Variablen für die Zeichenketten (strings).

- Teste das Programm, indem du deinen vollen Namen mit dem Schlüssel „Master Spy“ codierst und dann wieder entschlüsselst.
- Verwende den Satz „*Even for the gentle zebra not everything is all black and white.*“, um die Nachricht, die du als Coroner gefunden und bereits entschlüsselt hast, nun mit dieser Methode zu codieren.
- Untersuche die Häufigkeit der Buchstaben in dieser Form der Nachricht. Gib einen kurzen Bericht deiner Ergebnisse und begründe diese.

```

v_encode("Master Spy", "Pat and Carl Lewis", 1)
v_encode("Master Spy", "dcn vtw wrnz nyrol fvibduxn", 1)
ncode("Master Spy", ans(1), 0)
  
```

`V_encode(Master Spy, James Bond, 1) = xcgzy uied`

`V_encode(Master Spy, xcgzy uied, 0) = james bond`

## Verfahren 3 – der RSA-Code

In der HighTech-Welt des modernen Geschäftslebens besteht der dringende Bedarf, Nachrichten so zu verschlüsseln, dass der Absender möglichst einfach codieren, dass aber niemand außer dem befugten Empfänger die an ihn gerichtete Information wieder decodieren kann. Die Lösung dieses Problems sind die so genannten *Public-Key-Kryptosysteme* (Systeme mit öffentlichem Schlüssel). Das heißt, dass jede Person an eine andere Person oder an eine Einrichtung (Firma, Universität, Geheimdienst, ...) über einen von dieser Person oder Einrichtung öffentlich aufgelegten Schlüssel kommunizieren kann. Dieser Code entpuppt sich jedoch als eine Falltüre (*trap door*), denn, wenn der Text einmal verschlüsselt wurde, ist

nur mehr der Ausgeber des Schlüssels (und damit der Empfänger der Information) in der Lage, diesen wieder zu entschlüsseln. Diese Idee entstand in der Mitte der 70er Jahre und wurde einige Jahre später in eine praktikable Form umgesetzt. Die Erfinder dieser Methode – Ronald Rivest, Adi Shamir und Leonard Adleman vom MIT – gaben mit den Anfangsbuchstaben ihrer Namen der Methode die Bezeichnung RSA-System.

Was ist nun die *Falltüre*? Man kann sehr einfach zwei – auch sehr große – Zahlen multiplizieren, aber es ist schon viel schwieriger, ein Produkt zu faktorisieren. Kannst du zB rasch im Kopf die Faktoren von 119 bestimmen? Und wie schnell multiplizierst du 7 mit 17? Die Ironie des RSA-Verfahrens liegt darin, dass es sofort geknackt werden kann, wenn man die Faktoren eines der veröffentlichten Schlüssel kennt. Diese Zahl ist das Produkt zweier außerordentlich großer Primzahlen. Die in der Praxis verwendeten Primzahlen haben eine Länge von 300 oder mehr Stellen. Wenn sie sorgfältig genug gewählt werden, benötigen selbst die zur Zeit schnellsten Computer Jahrhunderte, um das Produkt von derartigen Zahlen zu faktorisieren. Probleme wie diese, die zwar lösbar sind, aber nicht in vernünftigen Zeit, kann man widerspenstige (*intractable*) Probleme nennen.

Für die folgende Untersuchung benötigst du die Funktionen PRIME?, NEXT\_PRIME und MOD, wenn du mit Derive arbeiten kannst/willst. Über die Online-Hilfe kannst du mehr über diese Funktionen erfahren. Auf den Taschenrechnern ist nur die MOD-Funktion verfügbar, die aber in diesem Zusammenhang die wichtigste ist. Außerdem musst du das Hilfsprogramm Keys(Primzah11, Primzah12) laden. Beginnen wir nun mit unserer Verschlüsselung:

### EINE SCHRITTWEISE EINFÜHRUNG IN DIE RSA-METHODE

1. Wähle zwei beliebige Primzahlen. Wir nehmen gleich  $p = 7$  und  $q = 17$  von oben.
2. Bilde das Produkt  $r = p \cdot q$ .  $r = 119$  ist Teil des öffentlichen Schlüssels.
3. Als nächstes müssen wir zwei ganze Zahlen  $m$  und  $n$  bestimmen, die den öffentlichen Schlüssel vervollständigen.  $m$  und  $n$  müssen die Gleichung

$$m \cdot n = k(p - 1)(q - 1) + 1$$

für irgendein ganzzahliges  $k$  erfüllen. Das Programm Keys findet für dich einen Satz von Werten für  $k$ ,  $m$  und  $n$ . Für so kleine Zahlen wie  $p = 7$  und  $q = 17$  können wir das mit Hilfe der Funktionen PRIME? und FACTOR selbst erledigen. Mit dem Taschenrechner müssen wir auf PRIME? verzichten, können aber über das Faktorisieren sofort feststellen, ob es sich um eine Primzahl handelt oder nicht.

4. Wir setzen für  $k$  der Reihe nach ganze Zahlen, beginnend mit  $k = 1$  ein und versuchen, das entstehende Produkt zu faktorisieren. In der Abbildung siehst du die Vorgangsweise mit Derive und am CAS-Taschenrechner. Leider faktorisiert Derive in der Tabelle nicht vollständig.  $5 \cdot 77$  ließe sich natürlich noch weiter zerlegen in  $5 \cdot 7 \cdot 11$ . Wenn du 77 aktivierst und die Tabelle nochmals faktorisierst, macht das Derive dann auch. Führe die Tabelle selbst bis  $k = 20$  weiter.

```
#1: TABLE([k·(7 - 1)·(17 - 1) + 1, PRIME?(k·(7 - 1)·(17 - 1) + 1), FACTOR(k·(7 - 1)·(17 - 1) + 1)], k, 10)
```

1	97	true	97
2	193	true	193
3	289	false	17 <sup>2</sup>
4	385	false	5·77
5	481	false	13·37
6	577	true	577

#2:

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	k	k*6*16		Faktorisie...		
	c1	c2		c3		
1	1	97		97		
2	2	193		193		
3	3	289		17^2		
4	4	385		5*7*11		
5	5	481		13*37		
6	6	577		577		
7	7	673		673		
<b>c3=factor(c2)</b>						
CRYPTO		RAD AUTO		FUNC		

- Für  $k = 1$  und  $2$  gibt es keine Werte für  $m$  und  $n$ . Für  $k = 3$  wäre  $m = n = 17$ . Da es nicht sinnvoll ist, für  $m$  und  $n$  gleiche Zahlen zu wählen, suchen wir weiter. Für  $k = 4$  gibt es drei Faktoren  $5, 7$  und  $11$ . Jetzt dürfen wir zwischen  $m = 11$  und  $n = 35$  oder  $m = 5$  und  $n = 77$  aber auch  $m = 7$  und  $n = 55$  wählen. Jede Auswahl ist geeignet. Wir nehmen das Paar  $(11,35)$ . Der öffentliche Schlüssel wird durch das Zahlenpaar  $(r = 119, m = 11)$  gebildet und folgendermaßen verwendet:
- Nun können wir die Nachricht schon verschlüsseln. Sie soll der Einfachheit halber „WER“ lauten. Die Buchstaben werden in der gleichen Weise dargestellt, wie das im Computer geschieht. Im ASCII-Code (*American Standard Code for Information Interchange*) werden die Großbuchstaben dezimal durch Zahlen von  $65-90$  und Kleinbuchstaben von  $97-122$  repräsentiert. Alle Sonderzeichen haben auch ihre Codezahlen.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90

- Zur Verschlüsselung eines Buchstabens (oder eines anderen Zeichens) suchen wir dessen ASCII-Code  $a$  und transformieren in  $a^*$  so, dass

$$a^* = \text{Rest nach Division von } a^m \text{ durch } r.$$

Wenn wir das nur Buchstabe um Buchstabe durchführen, wird der Code um nichts sicherer als ein Substitutionscode, daher werden in der Praxis Buchstabengruppen auf diese Weise codiert. Das soll im Rahmen dieser kurzen Illustration vernachlässigt werden.

*Übung:* Zeige an einem Beispiel, dass die zeichenweise RSA-Codierung die gleichen Eigenschaften wie eine Substitutionscodierung aufweist.

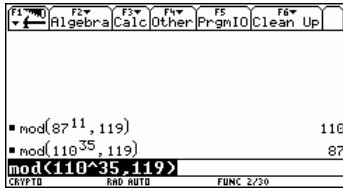
- Unsere Botschaft beginnt mit dem „W“, dessen ASCII-Code ist  $87$ . Nach der Vorschrift ist seine Verschlüsselung der Rest von  $87^{11}$  bei Division durch  $119$ . Um das zu berechnen verwenden wir die MOD-Funktion, die den Divisionsrest ausgibt.

$$\text{MOD}(87^{11}, 119) = 110 \quad \text{Damit senden wir } 110 \text{ für den Buchstaben W.}$$

*Übung:* Zeige, dass „WER“ als  $(110,69,10)$  codiert wird.

9. Für die Entschlüsselung verfahren wir mit  $a^*$  genau so wie mit  $a$ , nur mit dem Unterschied, dass mit  $n$  potenziert wird:

$$a = \text{Rest nach Division von } (a^*)^n \text{ durch } r.$$



Mit Hilfe von MOD ist das auch rasch erledigt.

*Übung:* Ver- und entschlüssele deinen Namen.

Wir wollen alle Nachrichten in Großbuchstaben umwandeln und so verschlüsseln.

Ein Satz der Zahlentheorie, der vom französischen Rechtsanwalt und Hobbymathematiker *Pierre de Fermat* (1608-1665) stammt, stellt sicher, dass der Code eindeutig umkehrbar ist, wenn nur die Zahlen  $m$ ,  $n$  und  $r$  auf die oben dargestellte Weise gewählt werden. Darin besteht die Schönheit und die Eleganz des RSA-Verfahrens, wenn  $p$  und  $q$  sehr große Primzahlen sind.

### *Einsatz der Stärke eines Computeralgebra Systems*

In diesem Abschnitt wirst du zuerst zwei große Primzahlen erzeugen und damit deinen Namen im RSA-Code chiffrieren. Den ASCII-Code hast du schon kennen gelernt.

Suche im Internet oder in IT-Büchern eine Tabelle des ASCII-Codes. Der Standardcode ist der 8-bit-Code, aber um noch mehr Zeichen darstellen zu können, wurde er in einen 16-bit-Code umgewandelt. Vereinfachend bleiben wir bei der Verschlüsselung von Großbuchstaben. Mit den üblichen Sonderzeichen sind die Codes dann zweistellig.

Für die nächste Übung benötigst du die folgenden Hilfsprogramme:

- To\_Caps(Text)                      wandelt die Information in Großbuchstaben um.
- Chunk\_Message(Text)              bildet Gruppen von maximal 7 ASCII-Codes.
- RSA\_Encode(Text, r, m)            verschlüsselt den Text mit dem öffentlichen Schlüssel  $(r, m)$ .
- Chunk\_ASCII(Zahl)                wandelt über den ASCII-Code in Kleinbuchstaben um.
- RSA\_Decode(Liste, r, n)            entschlüsselt die Nachricht mit dem privaten Schlüssel.

### *Ein kleines Demo zur Verwendung von großen Primzahlen*

1. Wir wollen zwei große Primzahlen suchen, die mindestens 14 Stellen haben. So wählen wir vier Daten von geschichtlicher Bedeutung:

14. Juli 1789	Erstürmung der Bastille	14071789
4. Juli 1776	US-Unabhängigkeitserklärung	4071776
15. Juni 1215	Magna Charta	15061215
12. Sept. 1683	Ende der 2. Türkenbelagerung Wiens	12091683

2. Wir erzeugen die Primzahlen aus diesen vier Zahlen mit Hilfe der Derive-Funktion `NEXT_PRIME()`. Mit den gewonnenen Primzahlen  $p$  und  $q$  können wir über das Hilfsprogramm `Keys(p, q)` die für uns wichtigen Größen  $r$ ,  $m$  und  $n$  gewinnen. Da es i.A. mehrere Möglichkeiten für  $m$  und  $n$  gibt, wie du oben gesehen hast, liefern verschiedene Aufrufe von `Keys(p, q)` unterschiedliche Paare  $(m, n)$ .

```
[p := NEXT_PRIME(14071789·4071776), q := NEXT_PRIME(15061215·12091683)]
```

```
[p := 57297172727303, q := 182115437374861]
```

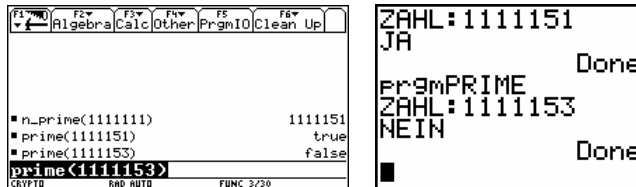
```
Keys(p, q) = [
               r                m                n
10434699671575743142140529883  13  4816015233034847875167889717 ]
```

```
Keys(p, q) = [
               r                m                n
10434699671575743142140529883  277  37670395926265356424297573 ]
```

```
MOD(13·4816015233034847875167889717, (p - 1)·(q - 1)) = 1
```

```
MOD(277·37670395926265356424297573, (p - 1)·(q - 1)) = 1
```

Die Derive-Funktionen `PRIME?` und `NEXT_PRIME` können für den TI-Rechner nachgebaut werden, sie laufen aber dort doch wesentlich langsamer, sodass es wenig Sinn macht, mit den hier verwendeten großen Zahlen zu arbeiten.



3. Die wichtige Information „*Mathematics rules*“ wird RSA-codiert und soll dir übermittelt werden. Du kannst den öffentlichen Schlüssel, bestehend aus  $r$  und  $m$  benutzen und brauchst nur einzugeben: `RSA_Encode(“Mathematics rules“, 10436...277)`. Es ist sicherlich interessant zu sehen, was nun tatsächlich verschlüsselt wird. Über `Chunk_Message(“Mathematics Rules“)` kannst du die Blöcke von ASCII-Codes erkennen. Der erste sollte 77658472697765 sein. Dieser Block wird codiert, indem er zur Hochzahl  $m = 277$  erhoben wird. Dann wird der Rest der Potenz bei Division durch  $r = 104346...883$  bestimmt. Damit ist der erste Block verschlüsselt. Das Ergebnis der kompletten Verschlüsselung ist eine Liste von vielstelligen Zahlen. Überprüfe, ob der erste Block richtig codiert wurde.

```
[169535547044888470632651119, 5054567503042132270929888254,
8144035635331890996721506610]
```

4. Du erhältst diese Nachricht und verwendest deinen privaten Schlüssel  $n = 376703...573$

```
mess := RSA_Encode(Mathematics Rules, 10434699671575743142140529883, 277)
```

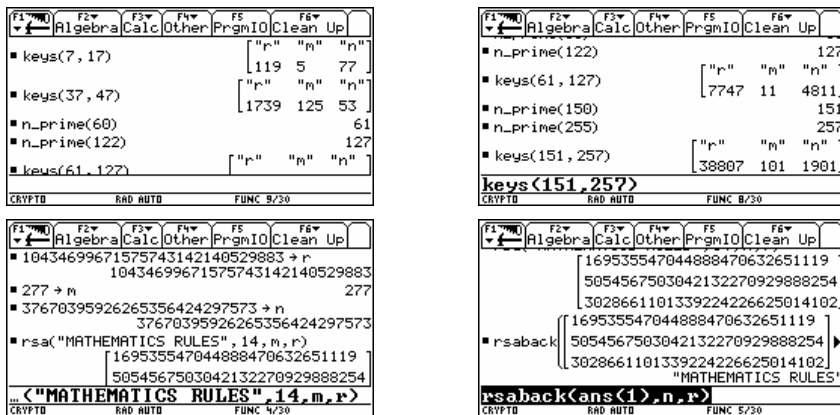
```
mess := [169535547044888470632651119, 5054567503042132270929888254, 8144035635331890996721506610]
```

```
RSA_Decode(mess, 10434699671575743142140529883, 37670395926265356424297573) = MATHEMATICS RULES
```

und kannst die Information im Klartext lesen. Und das funktioniert auch am TI-Rechner!

5. Um deutlich zu machen, dass man wirklich „große“ Primzahlen für dieses Verfahren benötigt, faktorisiere mit Derive (oder dem CAS-Rechner) die 28-stellige Zahl  $r$  und beachte die dafür aufgewendete Rechenzeit. Mit Derive kann man diesen Code innerhalb weniger Sekunden knacken. Er ist also nicht wirklich „geheim“, aber bei Zahlen in der Größenordnung von 300 Stellen oder mehr, wird das Verfahren *widerspenstig*.
6. Nimm vier Daten, die für dich von Bedeutung sind (Geburtstage, historische Daten, die du weißt, ...) und erzeuge einen Code mit Hilfe des dir zur Verfügung stehenden Werkzeugs. Stelle einem Freund oder einer Freundin den öffentlichen Code zur Verfügung und er oder sie soll dir eine Nachricht zukommen lassen. Du entschlüsselst anschließend die Botschaft.

Hier sind einige Bilder von der Durchführung am CAS-Rechner. `keys(p, q)` läuft natürlich wesentlich langsamer als am PC.



Der 2. Parameter in `rsa()` ist die Länge der zu erzeugenden Blöcke.

### Erweiterung #1

Versuche, ein Programm (eine Funktion) für den Verschiebungscode zu entwickeln. Das könnte zB so oder so ähnlich aussehen. (Die Leerstelle hat den ASCII-Code 32)

```
caesar(OMNIA GALLIA DIVISA EST IN PARTES TRES, 20, 1)
HFGBUT UE EBUTXBOBLUTYLMTBGTIUKMYLTMKYL
caesar(HFGBUT UE EBUTXBOBLUTYLMTBGTIUKMYLTMKYL, 20, -1)
OMNIA GALLIA DIVISA EST IN PARTES TRES
```

### Erweiterung #2

Im Verlauf des RSA-Verfahrens sind Divisionsreste für sehr große Zahlen zu bilden. Dabei stoßen auch Computer an die Grenzen ihres Leistungsvermögens, manche früher, manche später. Die Modulararithmetik ist Rechnen mit Divisionsresten. Deshalb kann hier ein einfacher Algorithmus eingesetzt werden: *Quadrieren und Multiplizieren*.

Hier ohne Beweis:  $\text{MOD}(a \cdot b, m) = \text{MOD}(a, m) \cdot \text{MOD}(b, m)$ . Oder ein Beispiel in Worten:  
Wenn du  $3656 \cdot 5718$  durch 19 dividierst, bleibt der gleiche Rest, wie bei der Multiplikation der Divisionsreste von 3656 und 5718 durch 19. Probier' das aus!

Das wird für das Potenzieren ausgenützt.

Beispiel: Wir brauchen  $\text{MOD}(2389^{215}, 93)$ .

Der Exponent 215 wird in die Summe von 2er-Potenzen zerlegt:  $1+2+16+32+64+128$ . Damit gilt  $2389^{215} = 2389 \cdot 2389^2 \cdot 2389^{16} \cdot 2389^{32} \cdot 2389^{64} \cdot 2389^{128}$ . Nach dem oben angeführten Satz können wir jetzt mit den Resten arbeiten, die durch Quadrieren erhalten werden:

$$\text{MOD}(2389, 93) = \mathbf{64}$$

$$\text{MOD}(2389^2, 93) = \text{MOD}(64^2, 93) = \mathbf{4}$$

$$\text{MOD}(2389^4, 93) = \text{MOD}(4^2, 93) = \mathbf{16}$$

$$\text{MOD}(2389^8, 93) = \text{MOD}(16^2, 93) = \mathbf{70}$$

$$\text{MOD}(2389^{16}, 93) = \text{MOD}(70^2, 93) = \mathbf{64}$$

$$\text{MOD}(2389^{64}, 93) = \text{MOD}(64^2, 93) = \mathbf{4}$$

$$\text{MOD}(2389^{128}, 93) = \text{MOD}(4^2, 93) = \mathbf{16}$$

$$\text{MOD}(2389^{215}, 93) = \text{MOD}(64 \cdot 4 \cdot 64 \cdot 4 \cdot 16, 93) = \text{MOD}(1048576, 93) = \mathbf{1}$$

Da bleibt genau 1 als Rest, wer hätte das gedacht.

Wir testen am TI-Rechner:

Schon bei dieser vergleichsweise kleinen Aufgabe ist der Taschenrechner überfordert. Derive hat damit keine Probleme.

In das Programm `powmod`(Basis, Exp, Modul) ist der Square&Multiply-Algorithmus eingebaut.

Übung: Wende diesen Algorithmus an und berechne  $\text{MOD}(21456^{200}, 217)$  und  $\text{MOD}(153^{400}, 71)$

## KOMMENTAR des CORONERS

Dieses Beispiel handelt von einem Geheimcode und einer geheimen Kontonummer. Die eigentliche forensische Aufgabe ist, die Umstände des Todes auch dann sehr sorgfältig zu untersuchen, wenn alles augenscheinlich zu sein scheint. Auch scheinbar harmlose Fälle können auf Grund von Beobachtungen vor Gericht enden. In diesem Fall brachte die Autopsie das Ergebnis, dass die Tote eine so große Menge an Tabletten geschluckt hatte, dass eine unglückselige Einnahme der Überdosis ausgeschlossen werden konnte. Der Tod wurde als Selbstmord erkannt und auch offiziell als solcher erklärt.

Leider werden in manchen Fällen von der Familie die Umstände eines Todesfalles verändert, um die Untersuchungen zu erschweren um damit leichter an Versicherungssummen heranzukommen. Das ist Versicherungsbetrug und wird schwer geahndet.



## Tödliche Geschwindigkeit

### Eine Untersuchung von Unfällen mit Fußgängern

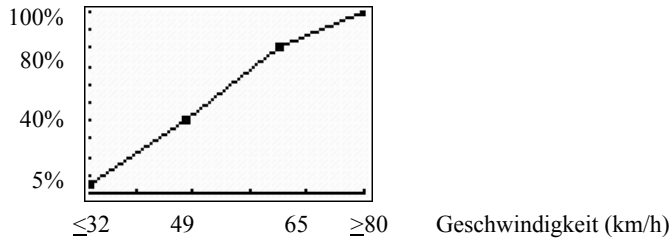


#### WAS GESCHAH ...

Im Büro des Coroners wurde wegen eines schweren Verkehrsunfalls, bei dem ein Fußgänger getötet wurde, angerufen. Du sollst den Unfall untersuchen. Am Unfallort angekommen, ist die Todesursache für dich klar. Das Fahrzeug, das den Passanten niedergestoßen hatte, steht 15 Fuß hinter dem am Boden liegenden Unfallopfer. Das Fahrzeug – ein älteres Modell eines Pick-Ups – weist am rechten vorderen Scheinwerfer eine Beschädigung auf. Das Opfer ist ein ca. 35jähriger Mann. Er ist vollständig bekleidet und hat auch noch die Schuhe an den Füßen. Er liegt mit dem Gesicht nach unten am Boden. Man sieht auch noch die Schleifspur des Mannes am Boden, die vom Ort des Zusammenpralls bis zu seiner letzten Liegeposition führt. Du kannst deutlich Brüche an den Beinen und Quetschwunden am rechten Oberschenkel und an den Rippen erkennen. An diesem Straßenstück ist die vorgeschriebene Höchstgeschwindigkeit 35 Meilen/Stunden. Die Polizei muss feststellen, ob der Chauffeur des Kleinlasters die vorgeschriebene Höchstgeschwindigkeit überschritten hatte.

#### Hintergrundinformationen

Im Jahr 2003 berichtete das *U.S. National Highway Traffic Safety Board* (Nationale Verkehrssicherheitskommission der US Highways), dass über 70 000 Personen bei einem Unfall mit einem Motorfahrzeug verletzt wurden, 4 749 wurden getötet. 22% der Kinder zwischen 5 und 9 Jahren, die bei einem Verkehrsunfall um Leben kamen, wurden als Fußgänger von einem Fahrzeug angefahren. Bei Jugendlichen unter 16 lag dieser Prozentsatz noch immer bei 17%. Die folgende Abbildung zeigt den Zusammenhang zwischen dem Prozentanteil der Personen, die als Fußgänger bei einem Verkehrsunfall getötet worden sind und der Geschwindigkeit des in den Unfall verwickelten Fahrzeugs.



Es ist nur zu klar, dass die Geschwindigkeit des Fahrzeugs ein wesentlicher Faktor für die Folgen eines Zusammenstoßes mit einem Fußgänger ist. Daher ist es wichtig, diese Geschwindigkeit zu ermitteln. Gerade diese Frage lässt sich aber auf Grund der am Unfallort verbliebenen Daten sehr schwer beantworten.

Dabei ist die Grundlage sehr einfach. Der Impuls  $p$  (engl. *momentum*) eines sich bewegenden Objekts ist gegeben durch die Formel:

$$p = m \cdot v$$

wobei  $m$  die Masse und  $v$  die Geschwindigkeit des Objektes sind. Weiters bleibt auch bei einem Unfall zwischen einem Sattelschlepper und einem Fußgänger ein Restimpuls erhalten. Das Problem liegt nun darin, herauszufinden, wie viel Impuls das Fahrzeug beim Zusammenstoß verloren hat. So ist zB ein entscheidender Faktor für die Übertragung des Impulses, wie der Passant angefahren wurde. War der Treffpunkt oberhalb oder unterhalb seines Schwerpunkts oder genau im Schwerpunkt? Wichtig ist auch, welcher Teil des Fahrzeugs das Unfallopfer getroffen hat. War es die Mitte des Fahrzeugs, oder war es „nur“ die Stoßstange? Weitere Faktoren sind Größe und Gewicht des Fahrzeugs und natürlich auch Größe und Gewicht des Fußgängers. Alle diese Daten gehen in die Rekonstruktion der Dynamik eines Unfalls ein.

Eine für die Untersuchung eines Unfalls bedeutsame Größe ist, wie weit das Opfer durch den Zusammenprall geschleudert worden ist. Es herrscht aber keine Einigkeit unter den Fachleuten, wie diese Größe zu bewerten ist. Mehrere Formeln wurden vorgeschlagen: Die erste stellt einen Zusammenhang zwischen der Entfernung und dem Quadrat der Geschwindigkeit her, eine andere findet eine Beziehung dieser Entfernung zu einem linearen und einem kubischen Term und wiederum andere schließen auch den Winkel mit ein, in dem das Opfer weggeschleudert wurde, wobei gerade dieser Parameter sehr schwer zu ermitteln ist. In einem sind sich alle einig: üblicherweise werden Kinder weiter weggeschleudert als Erwachsene. Eine weitere Übereinstimmung liegt in der Ansicht, dass Fahrzeuge mit hohen Kühlerhauben die Fußgänger weiter weg schleudern als solche mit niedrigen Vorderfronten.

In den folgenden Experimenten wirst du zuerst die letztgenannten Behauptungen des vorigen Absatzes untersuchen, nämlich dass Kinder im Allgemeinen weiter weg geschleudert werden wie Erwachsene. Dabei wirst du ein Spielzeugauto über eine verschieden hohe Rampe runterfahren und eine Spielzeugfigur am Fuß der Rampe anfahren lassen. Eine dieser Figuren wird

eine erwachsene Person darstellen und eine leichtere Ausgabe dieser Figur ein Kind. Du wirst die Entfernung und die Position der Figur nach dem Zusammenstoß festhalten. Dabei wird der Zusammenstoß mit dem rechten Kotflügel des Fahrzeugs erfolgen. Nach Sammlung von ausreichend vielen Daten wirst du mittels Regressionsrechnung herausfinden, ob und wie gut ein Zusammenhang zwischen der Entfernung und einer Potenz der Geschwindigkeit hergestellt werden kann.

### Forensische Aufgaben

- Untersuchung der Auswirkung eines Zusammenstoßes zwischen einem Fahrzeug und einer Person, wobei die Masse der Person sehr deutlich kleiner ist wie die Masse des Fahrzeugs
- Untersuchung des Unterschieds der Entfernungen von verschiedenen schweren Objekten, die vom gleichen Objekt mit gleicher Geschwindigkeit angefahren werden

### Naturwissenschaftlich – mathematische Aufgaben

- Genaue Messung der Entfernung und des Winkels für ein von einem bewegten Fahrzeug getroffenes Objekt
- Erstellung von systematischen Aufzeichnungen mit nachfolgender Analyse von Daten, die aus verschiedenen „Unfällen mit Fußgängern“ erhoben wurden
- Testen von einigen Hypothesen, die den Zusammenhang zwischen der zurückgelegten Entfernung des getroffenen Objekts mit der Geschwindigkeit des Fahrzeugs betreffen

### Materialien

- Derive oder ein anderes CAS, CAS-Rechner, Graphischer TR (teilweise) oder Excel
- Vernier Dynamik-System<sup>[1]</sup> (Satz mit Rampe und Fahrzeugmodell) (Option 1)
- Ein 90 x 30 cm großes Stück Wellpappe (Option 2)
- Ein ca. 8,5 cm hohes Spielzeugauto mit einem Gewicht von ca. 4,5 N (Option 2)
- Ein Holzdübel 2,54 cm × 11,5 cm
- Ein Holzdübel 1,6 cm × 8,5 cm
- Zwei 5 cm lange Stücke einer Schaumstoff-Schwimmnudel
  - ein Stück zurecht geschnitten zu einem 4 × 4 cm quadratischen Quader mit einem Loch in der Mitte zur Aufnahme des größeren Dübels
  - das andere Stück zurecht geschnitten zu einem 3 × 3 cm quadratischen Quader mit einem Loch in der Mitte zur Aufnahme des kleineren Dübels
- Ein 1m-Maßstab oder ein Maßband
- Ausreichend viele Bücher, um eine Rampe mit der Höhe 30 – 35 cm errichten zu können (ca. 5 bis 6 Bücher)
- Papier für die Datenaufzeichnung

---

<sup>[1]</sup> Kann ebenso wie *Easy Link* über <http://shop.bk-teachware.com> bezogen werden.

## Durchführung

1. Montiere den größeren Dübel in die Mitte des größeren Schaumstoffquaders, so dass das untere Ende des Dübels mit dem unteren Ende des Schaumstoffquaders abschließt. Den kleineren Dübel stecke bis etwas über die Hälfte ins Zentrum des kleineren Schaumstoffteils. Beide Figuren sollten ungefähr gleich hoch sein.
2. Wenn du eine Rampe aus Wellpappe verwendest, dann zeichne Gerade in den Entfernungen 25 cm, 35 cm, 50 cm, 70 cm, 80 cm und 85 cm vom Ende der Rampe und schreibe die Entfernung dazu. Zeichne auch Gerade, die im rechten Winkel zu den eben gezeichneten Entfernungslinien verlaufen. Längs dieser Geraden wird das Fahrzeug die Rampe hinunter fahren.
3. Staple die Bücher sorgfältig übereinander, um die Rampe einzurichten und richte sie so ein, dass die 85 cm-Marke mit dem Rand des obersten Buchs zur Deckung gelangt. Vergewissere dich bei jedem neuen Versuch, dass diese Lage (wieder) hergestellt ist
4. Miss die Entfernung vom Fuß des Bücherstapels zum Fuß der Rampe (oder miss die Höhe des Stapels).
5. Mit der Länge der Rampe (85 cm) und entweder der horizontalen Entfernung oder der Höhe lässt sich der Winkel  $\angle \alpha$ , unter dem die Rampe geneigt ist, leicht berechnen (entweder mit  $\cos^{-1}$  oder  $\sin^{-1}$  auf dem Taschenrechner oder mit ARCCOS bzw. ARCSIN mit Derive).
6. Wir bezeichnen die Erdbeschleunigung wie üblich mit  $g = 9,8 \text{ m sec}^{-2}$ . Die Beschleunigung des Autos bei der Fahrt die Rampe hinab, ist dann  $a = g \cdot \sin \alpha$ . Damit ergeben sich für die Abwärtsbewegung des Autos die folgenden Bewegungsgleichungen:

$$a = g \cdot \sin \alpha$$

$$v = t \cdot g \cdot \sin \alpha$$

$$d = \frac{t^2}{2} \cdot g \cdot \sin \alpha$$

wobei

$a$  = Beschleunigung längs der Falllinie,

$b$  = die Fahrzeit längs der Falllinie,

$v$  = die Geschwindigkeit des Fahrzeugs nach  $t$  Sekunden,

$d$  = die nach  $t$  Sekunden zurück gelegte Strecke.

7. Mit Hilfe der angegebenen Gleichungen lässt sich die Geschwindigkeit des Fahrzeugs am Fuß der Rampe nach der zurückgelegten Strecke  $d$  ermitteln. Wende nun die Formeln an und berechne die Fahrgeschwindigkeiten für dein Fahrzeug nach den zurück gelegten Wegstrecken von 80, 70, 50, 35 und 25 cm.
8. Übertrage diese Geschwindigkeiten in dein Datenblatt.
9. Stelle die größere Figur so auf, dass sie vom rechten Rad des Fahrzeugs getroffen wird und markiere die Stelle, dass du sie bei jedem Versuch wieder findest. Damit simulierst du einen Schlag mit der rechten Stoßstange unter dem Schwerpunkt.
10. Stelle das Fahrzeug auf die 80 cm Marke und lasse es los.

11. Miss und notiere die Entfernung des Bodens der Figur von ihrer ursprünglichen Standposition.
12. Wiederhole die Schritte 9 bis 11 für die kleinere Figur.
13. Wiederhole die Schritte 9 bis 12 für die Abstände 70, 50, 35 und 25 cm.

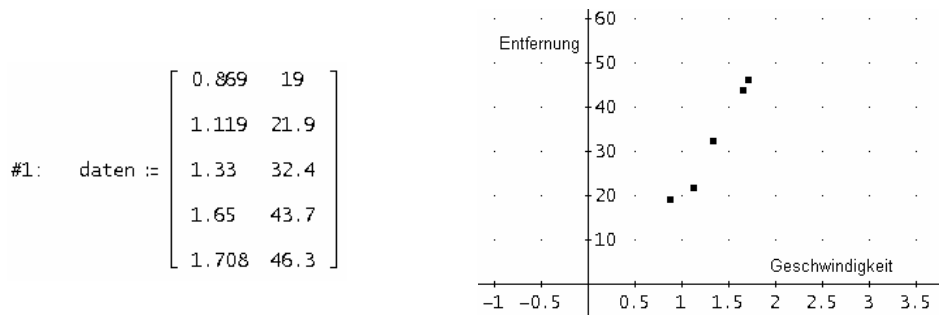
### Die Datenanalyse

Im Unterschied zu anderen Experimenten in diesem Buch werden wir hier keine bereits festgelegte Formel oder Gleichung zur Analyse der Daten verwenden, um zu einer Schlussfolgerung für die Beweissicherung am Tatort eines Unfalls oder einer kriminellen Handlung zu gelangen. Wir werden hier mit den gewonnenen Daten verschiedene Modellformen „experimentell“ untersuchen.

Wir werden dich immer auffordern, dass du diese Experimente mit deinem CAS (oder GTR oder Tabellenkalkulationsprogramm) nachvollziehst und dich dann fragen, welches Modell nach deiner Meinung am besten die im Experiment gewonnenen Daten beschreibt. Vergleiche deine Daten mit denen im Buch und auch mit denen deiner Kollegen. Beeinflussen diese Vergleiche deine Meinung über das beste Modell zur Beschreibung eines Verkehrsunfalls zwischen einem Fahrzeug und einem Fußgänger? Was nützen diese Messungen?

### Simulation eines Unfalls mit einer erwachsenen Person (mit bereits erhobenen Daten aus dem Experiment)

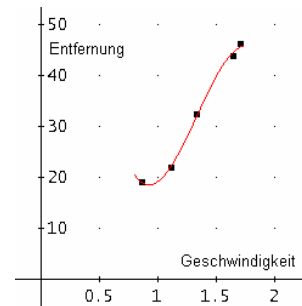
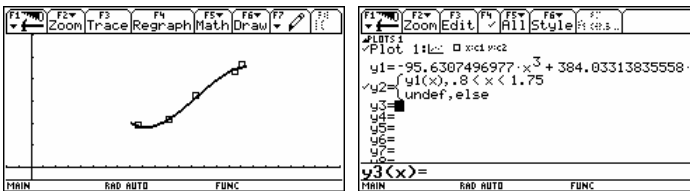
Die folgenden Daten wurden mit einem ca. 12cm hohen Spielzeug-LKW und einer „erwachsenen“ Spielfigur ( $2,54 \times 11,5$  cm Dübel in einem  $4 \times 4 \times 5$  cm Schaumstoffquader) erzeugt. Die Stoßstange des LKW sollte die „Beingegend“ der Figur anfahren. In der Datenmatrix sind die errechneten (siehe oben) Geschwindigkeiten und die von der weg geschleuderten Figur zurückgelegte Entfernung zusammengefasst. Wir zeichnen die Datenpunkte, um ein Gefühl für den Funktionsverlauf zu erhalten:



Eine quadratische oder kubische Funktion dürfte passen. Wir versuchen es mit einer kubischen Regressionslinie. Um nur den interessanten Bereich zu zeichnen, schränken wir den Definitionsbereich mit Hilfe der IF-Funktion (Derive) ein und erhalten den folgenden Graph:

```
#2: NotationDigits := 6
#3: FIT([x, a·x3 + b·x2 + c·x + d], daten)
#4: - 95.6307·x3 + 384.033·x2 - 464.685·x + 195.461
#5: defb(x) :=
      If x > 0.8 ∧ x < 1.75
      1
#6: (- 95.6307·x3 + 384.033·x2 - 464.685·x + 195.461)·defb(x)
```

Natürlich lässt sich die Untersuchung auch auf den Taschenrechnern und mit Excel durchführen.



Bist du mit dem Modell zufrieden? Was spricht dafür? Was spricht dagegen?

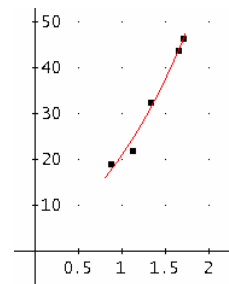
Eines der von den Fachleuten vorgeschlagenen Regressionsmodelle ist die Summe aus einem kubischen und einem linearen Term. Unter der Annahme, dass der Graph steigt, ist er auch nach oben konkav. Beachte, dass der Graph des vorgeschlagenen Funktionstyps immer durch den Ursprung verläuft und entweder monoton steigt oder links und rechts vom Ursprung symmetrisch liegende Extremwerte aufweist. Diese Eigenschaft wird höchstwahrscheinlich das Auftreten von lokalen Extremwerten, wie sie im obigen Graph vorkommen, verhindern. Damit könnte die entstehende Kurve besser unseren Erwartungen entsprechen.

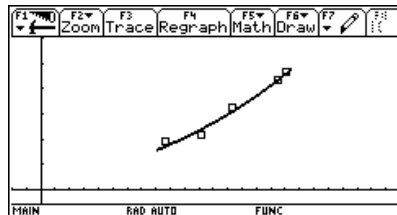
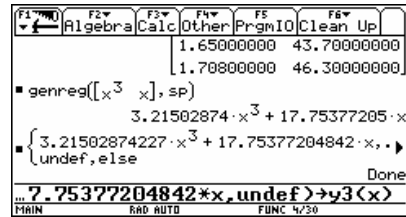
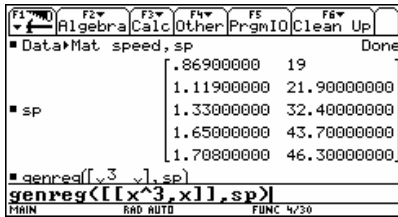
Mit Derive lässt sich die gewünschte Form des Regressionspolynoms leicht festlegen:

```
#7: APPROX(FIT([x, a·x3 + c·x], daten)) = 3.21502·x3 + 17.7537·x
#8: (3.21502·x3 + 17.7537·x)·defb(x)
```

Auf den CAS-Rechnern muss auf ein Hilfsprogramm zurückgegriffen werden und mit Excel wird für den Solver die Fehlerquadratsumme der jeweiligen Form der Regressionslinie angepasst und minimiert. Die Vorgangsweise am GTR wird am Ende des Kapitels gezeigt.

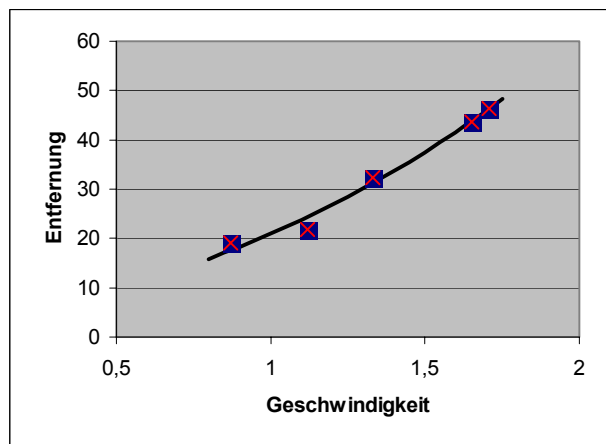
Das Hilfsprogramm `genreg()` ermöglicht eine allgemeinere Regressionsrechnung auf den CAS-Rechnern und basiert auf der Methode der Normalmatrix. Die Daten seien über den Data-Matrix-Editor in der Datentabelle `speed` festgelegt worden:





In Excel legen wir die variablen Werte für  $a$  und  $c$  in die Zellen A9 und B9. In Zelle C2 definieren wir die Modellfunktion  $=A\$9*A2^3+B\$9*A2$  und in Zelle D2 das Fehlerquadrat für jeden Datenpunkt  $=(B2-C2)^2$ . Mit dem Solver minimieren wir die Summe der Fehlerquadrate in Zelle D9. In A9 und B9 findest du die Koeffizienten von  $x^3$  und  $x$ . Vergleiche die Ergebnisse!

	A	B	C	D
1	Geschw.	Entfernung	Modell	
2	0,869	19	17,5378415	2,137907485
3	1,119	21,9	24,3712659	6,10715517
4	1,33	32,4	31,176311	1,497414841
5	1,65	43,7	43,7360323	0,001298329
6	1,708	46,3	46,3429215	0,001842256
7				
8	a	c		
9	3,21502826	17,7537718	SSE=	9,745618081



Dieser Graph kommt schon besser unserer Vorstellung entgegen, wie ein leichter Körper auf einen Zusammenstoß mit einem schweren Fahrzeug reagieren könnte. Aber ist das auch die beste Antwort?

Möglicherweise beschreibt eine Exponentialfunktion die Daten besser. Um mit Derive eine exponentielle Regression durchzuführen, müssen wir eine lineare Regression mit Logarithmen durchführen:

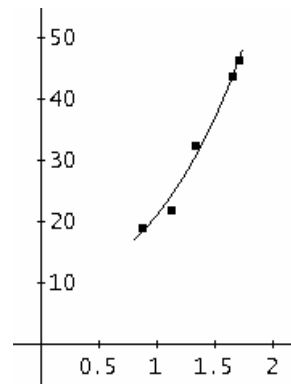
Wenn  $y = c \cdot e^{b \cdot x} = e^a \cdot e^{b \cdot x} = e^{a + b \cdot x}$ , dann ist  $\ln(y) = a + b \cdot x$ , wobei  $a = \ln(c)$ .

```
#12: Ldaten := [ [ 0.869 LN(19)
                  1.119 LN(21.9)
                  1.33 LN(32.4)
                  1.65 LN(43.7)
                  1.708 LN(46.3) ] ]

#13: FIT([x, a·x + b], Ldaten) = 1.11664·x + 1.93337

#14: e1.11664·x + 1.93337 = 6.91276·e1.11664·x

#15: 6.91276·e1.11664·x .defb(x)
```



Als nächstes versuchen wir die Anpassung über eine Potenzfunktion  $y = a \cdot x^b$ . Wenn wir die Potenzfunktion logarithmieren, dann erhalten wir  $\ln(y) = \ln(a) + b \cdot \ln(x) = c + b \cdot \ln(x)$ . Glücklicherweise kann Derive die Logarithmusfunktion (ebenso wie sin, cos, atan, exp, ...) gemeinsam mit Potenzen für die Regression einsetzen, solange die Variable (hier  $x$ ) in der Funktion linear auftritt.

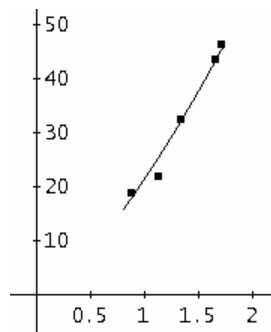
```
#16: FIT([x, c + b·LN(x)], Ldaten)

#17: 1.39481·LN(x) + 3.06353

#18: eFIT([x, c + b·LN(x)], Ldaten)

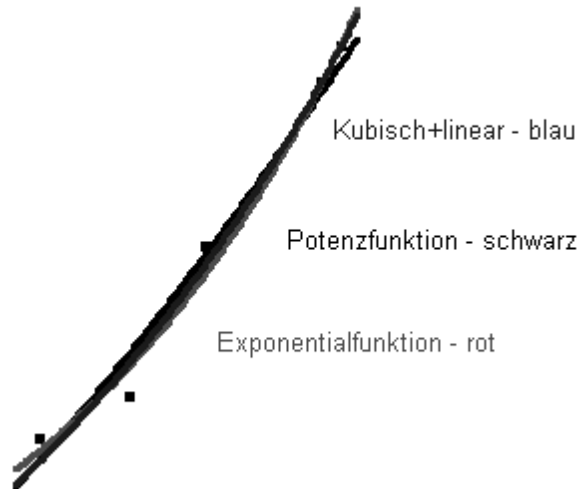
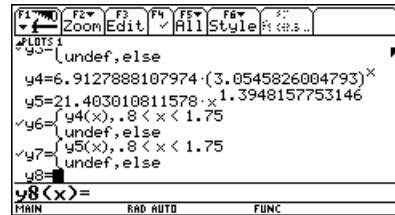
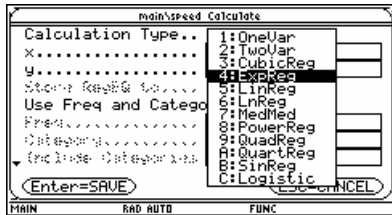
#19: 21.4030·x1.39481

#20: 21.4030·x1.39481 .defb(x)
```



Mit den TI-CAS-Rechnern lassen sich sowohl eine Exponential- als auch eine Potenzfunktion als Regressionslinie ohne Logarithmieren direkt ermitteln. Wenn wir die Datentabelle **speed** öffnen, können über den Menüpunkt **F5 Calc** diese Regressionslinien ausgesucht und dann im **[Y=]**-Editor gespeichert werden. Auch die graphischen TR lassen diese Regressionen problemlos zu (siehe bei den Erweiterungen).





Hier wurden die letzten drei Regressionslinien übereinander gelegt.

### Weiterführende Aufgaben und Fragen

1. Erzeuge eine Regressionsparabel von der Form  $a \cdot x^2 + b \cdot x$  zu den vorliegenden Daten. Wie passt diese Kurve im Vergleich zu den bereits erzeugten Regressionskurven?
2. Welche Regression beschreibt nach deiner Meinung am besten den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit des Fahrzeugs und der Strecke, die die Person weggeschleudert wurde?
3. Wenn jemand die Regressionslinie deiner Wahl betrachtet, dann wird er dich möglicherweise fragen, welche Bedeutung die Konstanten in der Regressionsgleichung haben. Gib eine Erklärung, die im Zusammenhang mit dem beschriebenen Problem steht.
4. Ist es immer die beste Wahl, jene Kurve zu wählen, welche die kleinste Fehlerquadratsumme liefert?
5. Jedes der verwendeten Modelle hat nur eine unabhängige Variable, nämlich die Strecke, die die Person weggeschleudert worden ist. Wenn du als Sachverständiger bei einem

derartigen Unfall aussagen solltest, wärest du dann mit deinem Modell zur Bestimmung der Geschwindigkeit des Fahrzeugs wirklich zufrieden? Warum? Warum nicht?

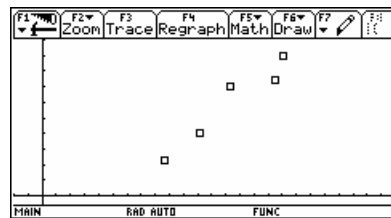
- Welche anderen Faktoren sollte (könnte) man zusätzlich berücksichtigen, wenn man ein mathematisches Modell für derartige Unfälle bilden will? Wie könnte man sie in deinem bestehenden Modell berücksichtigen?

### Simulation eines Unfalls mit einem Kind (mit aus dem Experiment erhobenen Daten)

Die Daten wurden mit dem gleichen Spielzeugfahrzeug erhoben, das für die Simulation des Unfalls mit einem Erwachsenen verwendet wurde. Nun war der Modellfußgänger ein „Dübelkind“ (1,6 cm × 8,5 cm in einem 3 cm × 3 cm × 5 cm Schaumstoffstück). Die Stoßstange trifft die Figur in der Gegend des Oberschenkels oder der Hüften.

DATA	v	E-Daten	K-Daten	
1	c1	c2	c3	c4
2	.8690000	19	23	
3	1.1190000	21.90000	40.70000	
4	1.3300000	32.40000	70.20000	
5	1.6500000	43.70000	73.80000	
6	1.7080000	46.30000	89.20000	
7				

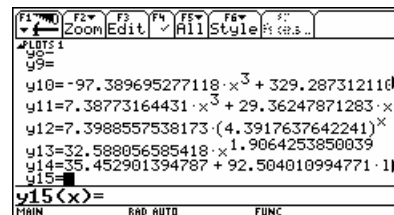
c1, Title="v"  
MAIN RAD AUTO FUNC



Nun gelten die Spalten v und K-Daten. Bei der Darstellung des Streudiagramms bemerken wir, dass die Datenpunkte nicht so schön verteilt sind wie vorher.

Wir erzeugen wiederum alle möglichen Regressionslinien (Funktion 3. Grades, modifizierte Funktion 3. Grades, Exponential- und Potenzfunktion). Hier zeigt die kubische Funktion ein unpassendes lokales Maximum am oberen Ende des Definitionsbereichs.

Die Abbildung zeigt zum Vergleich alle Regressionslinien. y14 wäre auch einen Versuch wert:  $y_{14}(x) \approx 35,45 + 92,50 \cdot \ln \dots$



### Weiterführende Aufgaben und Fragen

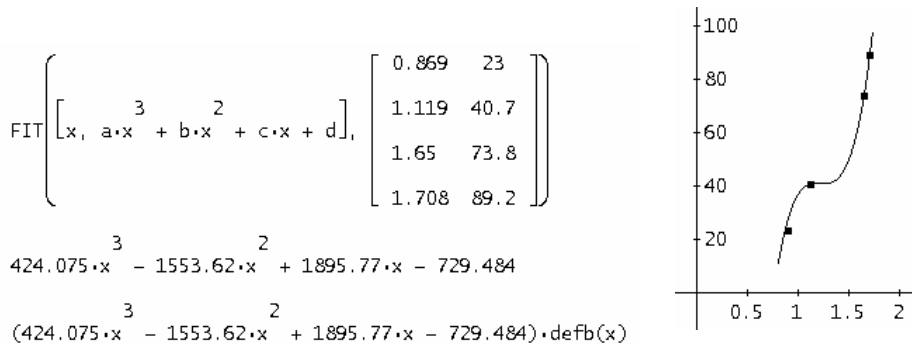
- Welcher Regressionstyp könnte mit y14 gemeint sein?
- Welche Regressionslinie ist nach deiner Meinung am besten geeignet? Ist dies der gleiche Funktionstyp wie der bei der Simulation mit dem „Erwachsenen“? Erkläre deine Antwort.
- Warum sind die Funktionen für die große und kleine „Holzdübelfigur“ verschieden? Wird das in der Realität auch so sein?
- Gibt es unter den Datenpunkten einen Ausreißer?

### Erweiterung

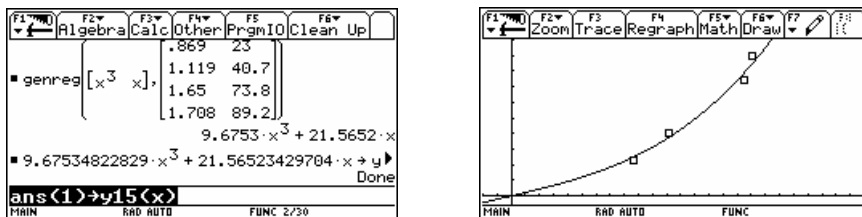
Nimm an, dass wir den Ausreißer mit der Geschwindigkeit von  $1,33 \text{ cm sec}^{-1}$  für unsere Analyse entfernen. Wir führen dann mit den verbleibenden vier Datenpunkten die verschiedenen Regressionen nochmals durch.

Wir wollen an Hand der Punkte  $(0,869|23)$ ,  $(1,119|40,7)$ ,  $(1,65|73,8)$  und  $(1,708|89,2)$  die möglichen Regressionen mit Hilfe verschiedener Technologien berechnen (lassen):

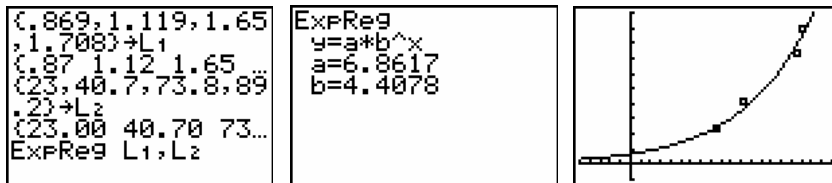
1. Die kubische Regression mit Derive:



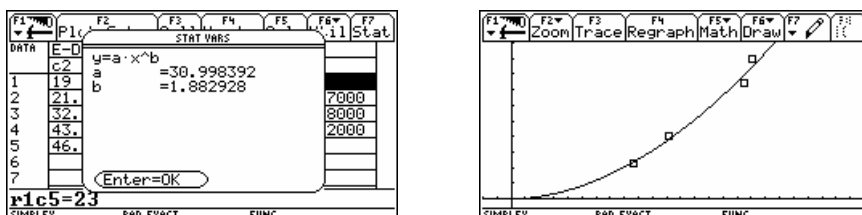
2. Die „reduzierte kubische Regression“ mit dem CAS-Rechner:



3. Die exponentielle Regression mit dem graphischen Taschenrechner:



4. Die Potenzlinienregression mit dem CAS-Rechner:



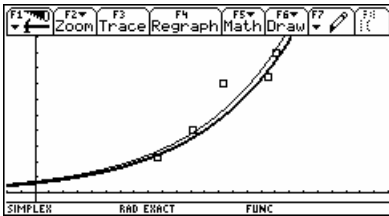
5. Und schließlich eine logarithmische Regression mit der Tabellenkalkulation:

Die Regressionslinie erhält die Gleichung

$$y = 33,58 + 91,625 \cdot \ln(x).$$

	C2	fx = \$A\$8+\$B\$8*LN(A2)		
	A	B	C	D
1	Geschw.	Entfernung	Modell	
2	0,869	23	20,7173525	5,21047948
3	1,119	40,7	43,8845726	10,1415029
4	1,65	73,8	79,4663048	32,1070105
5	1,708	89,2	82,6317559	43,1418301
6				
7	a +	b * ln(x)		
8	33,5826496	91,6252386	SSE=	90,600823

6. Wenn wir alle Regressionslinien übereinander legen, dann fällt eine „aus dem Rahmen“. welche ist dies?
7. Vergleiche die Regressionslinien vor und nach Entfernung des einen Datenpunkts.



Gibt es Unterschiede? Hier ist die Abbildung der exponentiellen Regression vorher und nachher (dicke Linie).

8. Ordne die Regressionskurven nach der Summe der Fehlerquadrate. Welche sollte dann die beste Näherungskurve sein? Ist das deiner Meinung nach wirklich die am besten geeignete Kurve? Begründe deine Antwort. Welcher Kurve würdest du den Vorzug geben, und warum?
9. Welche Meinung hast du überhaupt zur Elimination dieses einen Datenpaares? Hältst du das für vertretbar und erlaubt? Unter welchen Umständen würdest du eine derartige Nichtbeachtung von Daten zulassen?
10. Nun ist die Zeit gekommen, dass du deine eigenen Daten erzeugst und analysierst. Wenn du andere Modellierungsvorschläge hast, dann probiere sie bitte aus.

## KOMMENTAR des CORONERS

Bei der Bestimmung der Geschwindigkeit des Unfallfahrzeugs muss eine ganze Reihe von Faktoren berücksichtigt werden. Abhängig von Geschwindigkeit, Größe und Gewicht des Fahrzeugs, der Größe und dem Gewicht des Unfallopfers und der Stelle, an der das Opfer vom Fahrzeug angefahren wurde, kann der Fußgänger nach vorne oder zur Seite geschleudert werden, auf der Kühlerhaube landen und später von dort herunter fallen oder sogar nach Aufprall auf der Windschutzscheibe so über das Fahrzeug geschleudert werden, dass der Körper dann hinter dem Fahrzeug am Boden landet.

Bei jeder Untersuchung müssen die folgenden Fragen vollständig beantwortet werden:

1. Hatte das Unfallopfer Kontakt mit der Windschutzscheibe?
2. Gibt es eine Delle am Fahrzeugdach?
3. Gab es Kontakt des Opfers mit dem Kofferraum?
4. Gibt es Bremsspuren? Wenn ja, dann untersuche die Rückstände im Kotflügel. Diese können analysiert werden und geben wichtige Hinweise darauf, wo das Fahrzeug vor dem Unfall gewesen ist.
5. Wurde das Opfer aus seinen Schuhen geschleudert?
6. Blieb das Unfallopfer in seiner Kleidung oder wurde die Bekleidung als Folge des Mitschleifens auf der Straße beschädigt?
7. Finden sich Spuren des Zusammenstoßes auf dem Fahrzeug?
8. Kann man am Fahrzeug Haare, Blut oder andere Spuren finden?
9. An welcher Körperstelle wurde das Opfer getroffen, wie zB am rechten oder linken Bein, am Becken, an seiner Vorder- oder Rückseite? Damit kann leichter festgestellt werden, ob und wo das Opfer gegangen sein könnte, oder ob es gestanden oder möglicherweise sogar auf der Straße gelegen ist.
10. Können auf dem Opfer irgendwelche Teilchen des Fahrzeugs entdeckt werden, wie zB abgesplitterte Lackspuren oder Glassplitter.

Die Vorgangsweise am graphischen Taschenrechner zur Bestimmung einer allgemeinen Regressionslinie mit der Normalmatrix am Beispiel von  $y(x) = a \cdot x^3 + c \cdot x$ .

X	Y	Y1	Z
.869	19	.65623	
1.119	21.9	1.4012	
1.33	32.4	2.3526	
1.65	43.7	4.4921	
1.708	46.3	4.9827	

Y2	YY1	YY2	Z2
.869	12.468	17.336	
1.119	30.686	24.506	
1.33	76.225	43.092	
1.65	196.31	72.105	
1.708	250.7	79.08	

$R^2() = .869$        $YY2() = 16.511$

```

ListMatr(LV1, LV
2, [F1])
Done
[F1] → [F1]
[[.656234909 1...
 1.869 1.]]
    
```

```

ListMatr((sum(L
YY1), sum(LVY2)),
[G1])
Done
([F1]*[F1T])-[G1]
[[3.215028742]
 [17.75377205]]
    
```

```

Plot1 Plot2 Plot3
Y1=X^3
Y2=X
Y3=3.21503Y1+17
.75377Y2
Y4=Y3*(.85X and
X≤1.75)
Y5=
    
```

## Die Botschaft der Bremsspuren



### WAS GESCHAH ...

Du wirst vom Büro des Coroners beauftragt, einen Verkehrsunfall mit einem Fahrzeug zu untersuchen. Am Ort des Geschehens findest du ein Fahrzeug, dessen eine Seite an einem Baum lehnt. Du kannst eine lange Bremsspur erkennen, aber weil es bereits dunkel und keine zusätzliche Beleuchtung verfügbar ist, kannst du die Bremsspuren nur teilweise fotografieren. Der Fahrzeuglenker war nicht angegurtet und wurde aus dem Fahrzeug geschleudert. Nach näheren Untersuchungen und Befragungen kann der Unfallhergang folgendermaßen rekonstruiert werden: Das Unfallsopfer war ein 19-jähriger junger Mann, der mit seiner Freundin zu einer Party bei einem Freund gewesen war. Dabei wurde Alkohol konsumiert. Während der Party hatte der junge Mann eine Meinungsverschiedenheit mit seiner Freundin, sprang daraufhin in sein Auto und fuhr mit hoher Geschwindigkeit davon. Nach ungefähr einer Meile kam er in eine leichte Kurve, in der das Fahrzeug aus seiner Kontrolle geriet und dann von der Fahrbahn abkam. Er hatte noch wenig Fahrpraxis, hatte etwas getrunken und so verriss er das Lenkrad, geriet auf die andere Straßenseite und das Fahrzeug begann zu schleudern. Es drehte sich auf die Seite und begann sich zu überschlagen, als es die andere Straßenseite erreicht hatte. Es überschlug sich mindestens dreimal und während eines Überschlags wurde das Opfer aus dem Auto geschleudert. Das Auto kam dann mit den Rädern der Beifahrerseite gegen einen Baum zum Stillstand. Wie man dem Foto entnehmen kann, erlitt das Fahrzeug einen Totalschaden.

### Hintergrundinformationen

Autoreifen spielen eine sehr wichtige Rolle für die Lenkung und die Sicherheit unserer Motorfahrzeuge. Die Kraft der Reibung, die die Reifen gegen den Straßenbelag ausüben, hat

einen Einfluss darauf, wie unser Fahrzeug reagiert und welche Zeit man für ein sicheres Anhalten des Fahrzeugs benötigt. Diese Kraft erzeugt einen Verschleiß (Abrieb) auf den Reifen und „frisst“ nach und nach dessen Profil weg. Demnach hat die Reibung oder der Widerstand eine gute Auswirkung, aber sie kostet etwas. In dieser Untersuchung wollen wir herausfinden, wie der extreme Reifenabrieb oder die als Folge eines abrupten Bremsvorgangs hinterlassenen Bremsspuren Hinweise auf die Fahrgeschwindigkeit des Autos zum Zeitpunkt des Beginns des Bremsvorgangs geben können.

Bei einem plötzlichen Notfall ist die natürliche Reaktion eines unerfahrenen Fahrzeuglenkers, stark auf das Bremspedal zu treten. In den meisten Fällen sollte man gerade das nicht tun. Es bringt das Fahrzeug in eine Schleuderbewegung, in der es äußerst schwierig oder überhaupt nicht mehr kontrolliert werden kann. Ein erfahrener und besonnener Fahrer weiß, dass er das Bremspedal sanfter und abgesetzt einsetzen muss, um das Fahrzeug unter Kontrolle zu behalten. Aber leider ist es gerade dann, wenn eine extreme Situation eintritt, oder wenn der Fahrer unter Alkohol- oder anderem Drogeneinfluss steht, oder einfach dann, wenn er noch unerfahren ist, für diesen fast unmöglich, überlegt zu handeln und damit das Schleudern weitgehend zu vermeiden. In den meisten Fällen nimmt das ein böses Ende und viel zu oft gibt es dann noch einen oder mehrere Toten zu beklagen.

Um einen Zusammenhang zwischen der Länge der Bremsspur und der Fahrzeuggeschwindigkeit zu finden, greifen wir auf das Bewegungsgesetz von Newton und auf die Gleichung für die Reibungskraft zurück. Das Grundgesetz von Newton gibt uns die Formel für die kinetische Energie des Fahrzeugs:

$$KE = \frac{1}{2} m \cdot v^2, \text{ wobei}$$

$KE$  = kinetische Energie und  $m$  = Masse des Fahrzeugs =  $\frac{\text{Gewicht des Fahrzeugs}}{\text{Erdbeschleunigung}} \approx \frac{w}{9,8}$  und  $v$  = Geschwindigkeit des Fahrzeugs.

Die kinetische Energie hängt aber auch mit der Reibung über eine Gleichung zusammen:

$$KE = w \cdot \mu \cdot d, \text{ wobei}$$

$w$  = Gewicht des Fahrzeugs,  $\mu$  = Reibungskoeffizient und  $d$  = zurückgelegte Entfernung.

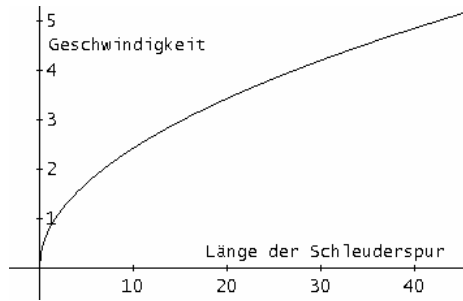
Wenn wir die beiden Ausdrücke für die kinetische Energie eines schleudernden Fahrzeugs gleichsetzen, und die entstehende Gleichung nach  $v$  auflösen, können wir die Länge der Bremsspur (Schleuderstrecke) mit der Geschwindigkeit zu Beginn des Bremsvorgangs in Beziehung setzen.

Im Arbeitsblatt sollst du dann diese Gleichung selbst herleiten. Für die Geschwindigkeit ergibt sich die – vielleicht überraschende – Formel:

$$v = \sqrt{2g \cdot \mu \cdot d}. \quad (1)$$

Formel (1) ist deshalb überraschend, weil das Gewicht des Fahrzeugs keinerlei Einfluss auf die Ermittlung der Geschwindigkeit aus der Länge der Schleuderspur hat. Nur die Erdbeschleunigung  $g$  und der Reibungskoeffizient  $\mu$ , der mit der Reifenbeschaffenheit und dem Straßenbelag zu tun hat, sind von Bedeutung.

Bei gegebenem Reibungskoeffizient lässt sich der Funktionsgraph der Geschwindigkeit  $v$  in Abhängigkeit von der Länge der Schleuderspur  $d$  zeichnen. Er sieht dann etwa so aus:



Es wäre wohl sehr schwierig (und sehr gefährlich sowohl für den Fahrer als auch für den Datensammler), echte Brems- und Schleuderspuren zu erzeugen. Anstelle dessen werden wir eine Brems- (Schleuder-)spur mit Hilfe eines Spielzeugautos und einer schiefen Ebene simulieren. Nachdem das Auto die schiefe Ebene hinunter gerollt ist, wird in der Ebene auf das motorlose Fahrzeug nur mehr die Reibungskraft einwirken. Über die vorhin genannte Gleichung und der vom Fahrzeug zurückgelegten Strecke können wir den Reibungskoeffizient  $\mu$  einfach ermitteln.



Unsere wichtigsten Experimentierwerkzeuge werden jetzt das CBR2 (Calculator Based Ranger) und der Taschenrechner sein.





## Forensische Aufgaben

- Ermittlung der Geschwindigkeit eines Unfallfahrzeugs vor Einleitung des Bremsvorgangs und der damit verbundenen Blockierung der Räder
- Ermittlung des kürzest möglichen Bremswegs eines Fahrzeugs bei vorliegender Geschwindigkeit

## Naturwissenschaftlich-mathematische Aufgaben

- Bestimmung des Rollwiderstands (Reibungskonstante) für ein bestimmtes Fahrzeug
- Herausfinden des Zusammenhangs zwischen Geschwindigkeit und Bremsweg
- Darstellung dieses Zusammenhangs in einem Graph

## Materialien

- Ein Spielzeugauto (mit einer Mindesthöhe von 2,5 bis 4 cm) ohne Reibungsmotor und möglichst ohne Hilfsmittel zur Verminderung der Reibung der Radachsen in ihren Lagern.
- 2 oder 3 dünne Bücher zur Herstellung einer Rampe mit einer Höhe von ca 8 cm
- Ein Stück fester Karton, Pappe oder Sperrholz mit einer Länge von ca 25 bis 30 cm für die Bildung einer Rampe (siehe Abbildung auf Seite 48).
- Ein Maßband (wahlweise, denn der CBR lässt sich für die meisten Messungen einsetzen)

## Experiment – mit Verwendung des CBR (einfache Rechnung)

(Hier kann das CBR oder CBL eingesetzt werden. Die entsprechenden Programme für die Rechner können von den websites von Texas Instruments und/oder Vernier heruntergeladen werden. So zB auch das Programm RANGER für den TI-92/Voyage 200. Hier wird stellvertretend für alle *EasyData* eingesetzt.)

### *Bestimmung des Reibungskoeffizienten*

1. Stelle die Versuchsanordnung wie vorhin beschrieben auf dem Fußboden oder auf einem Arbeitstisch her.
2. Stecke das *EasyLink*-Kabel an. Der Hauptbildschirm der *EasyData*-Applikation sollte im Anschluss an die Begrüßung erscheinen. Am oberen Rand findest du einen Kasten, in dem die Entfernung des vom Sensor wahrgenommenen Objekts angezeigt wird.
3. Wenn die Entfernung nicht in Meter gemessen ist (die Alternative ist Fuß), dann musst du erst die entsprechende Einstellung treffen. Dazu drücke auf die **WINDOW**-Taste. (Über ihr steht **Setup** auf dem Schirm des Rechners.) Damit wird ein Menü am Schirm geöffnet, in dem du die Option **1.Distance** mit der **ENTER**-Taste auswählst. Mit der **ZOOM**-Taste (unter **Units**) gelangst du in ein weiteres Menü, in

dem du als Einheit Meter einstellst. Mit der Taste unter dem **Ok** verlässt du das Hauptmenü.

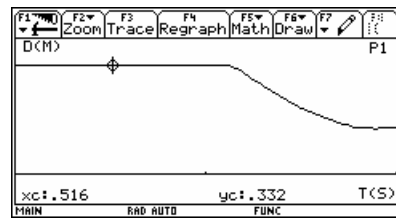
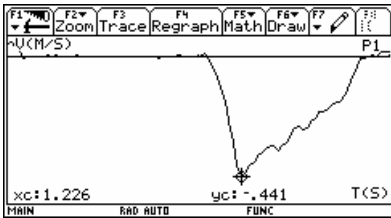
4. Führe nun einen „Testlauf“ mit deinem Auto durch. Stelle das Auto mit den Hinterrädern auf das oberste Ende der Rampe und lasse es los. Ein Mitglied deines Teams soll dabei die Anzeigen am Rechner beobachten. Noch muss EasyData keine Bewegungsdaten aufzeichnen. Versichere dich, dass das CBR die Entfernung des Autos vom Augenblick des Loslassens bis zum Stillstand aufnehmen kann. Das CBR sollte so eingerichtet sein, dass das Auto in einer Entfernung von mindestens 15 cm vor ihm stehen bleibt.
5. Nun kannst du mit dem Experiment beginnen: Wähle unter der Setup-Registerkarte die Option **2.Time Graph** und setze unter **Edit** die folgenden Einstellungen:
  - Sample Interval: 0.05 seconds** – das ist der kleinste Messabstand
  - Number of Samples: 40**
  - Experiment Length(s): 2**Zwei Sekunden sind sicherlich länger als das Experiment dauern wird (außer du hast eine sehr lange Rampe aufgebaut). Aber sie helfen, die Bewegung des Autos besser aufzuzeichnen, wenn du es vor dem Start etwa eine halbe Sekunde festhältst.
6. Wenn alle Mitglieder deines Teams bereit und die Einstellungen überprüft sind, dann drücke die Taste unter **Start** und lasse das Auto vom oberen Ende der Rampe in Richtung zum CBR losfahren. Es muss zum Stillstand gekommen sein, bevor auf dem Schirm zu lesen ist **Transferring Data**.
7. Betrachte den Graph am Schirm. Ist er halbwegs glatt? Wenn große Sprünge auftreten, dann hast du eine Menge „Rauschen“ mit aufgenommen. Überprüfe die Anordnung des Experiments und wiederhole den Lauf und die Messung.
8. Wenn der Graph brauchbar ist, dann drücke die Taste unter **Plots** und wähle die Option **2.Vel vs Time**. Überprüfe, ob der Geschwindigkeitsgraph glatt und brauchbar ist. Wenn dies nicht der Fall ist, überprüfe die Versuchsanordnung und führe den Versuch nochmals durch.
9. Wenn du sowohl einen guten Weg- als auch Geschwindigkeitsgraph gewonnen hast, dann fahre mit dem letzteren fort. Da sich das Fahrzeug in Richtung zum CBR bewegt hat, werden die meisten Daten negativ sein. Suche im **TRACE**-Modus den Minimumpunkt am Graph auf – das ist der am tiefsten liegende Punkt. Damit wird die Geschwindigkeit des Autos am unteren Ende der Rampe angezeigt. Nun verlangsamt sich das Fahrzeug in der Ebene durch den Einfluss der Reibung.
10. Drücke nochmals die Taste unter **Plots** und wähle nun die Option **1.Distance**. Der Cursor bleibt an derselben Stelle der Zeitachse. Damit kannst du die Entfernung des Autos vom CBR ablesen, wenn es das untere Ende der Rampe erreicht hat.

11. Wechsle zurück zum Geschwindigkeitsdiagramm und suche jenen Punkt, in dem die Geschwindigkeit möglichst nahe bei Null liegt. Wegen des Zeitintervalls zwischen der Aufzeichnung der Daten kann der Wert zwischen zwei Datenpunkten das Vorzeichen wechseln. Gehe zurück zum Entfernungsgraph und notiere die Entfernung. Hier ist das Auto stehen geblieben.
12. Mit der Differenz der beiden Entfernungen aus 11. und 10. erhältst du die Strecke, die das Fahrzeug unter Einfluss der Reibung zurückgelegt hat.
13. Gemeinsam mit dem Absolutbetrag der Geschwindigkeit am Fuß der Rampe (gewonnen in Schritt 9) kannst du mit der Formel (1) den Reibungskoeffizient  $\mu$  gewinnen. Halte diesen fest, denn du wirst ihn im nächsten Teil des Experiments wieder brauchen können.
14. Verwende diesen Reibungskoeffizient und erzeuge auf deinem Rechner nach Formel (1) einen Weg-Geschwindigkeitsgraph für die Strecke, die unter Reibung zurückgelegt wird. (Das ist die Strecke vom Fuß der Rampe bis zum Stillstand.) Strecken von maximal 2 m sind möglich.

### *Bestimmung der Anfangsgeschwindigkeit*

1. Erzeuge mit einem Klebeband (ca. 50 cm) oder mit Lineal und Bleistift eine Startgerade auf dem Boden oder auf dem Arbeitstisch.
2. Positioniere das CBR so, dass der Sensor im rechten Winkel auf die Startgerade ausgerichtet ist. Das CBR sollte zumindest 1,50 m von dieser Geraden entfernt aufgestellt werden.
3. Lege ein Buch so an die Startgerade, dass sein Rücken zum CBR zeigt.
4. Halte den Abstand vom Buch zum Sensor fest.
5. Ein Teammitglied soll nun das Auto von etwas hinter der Startgeraden in Richtung zum CBR stoßen. Wenn das Auto die Startlinie passiert, soll nur die Kraft der Reibung auf das Auto einwirken.
6. Notiere die Entfernung des Autos vom CBR, wenn es zum Stillstand gekommen ist. Ein Weg-Zeit-Diagramm ist nicht notwendig, weil du ja nur diese Entfernung von der Entfernung des CBR von der Startgeraden abziehen musst. Bei der Untersuchung eines Unfalls sind die Untersucher kaum einmal Zeugen des Unfalls und können Daten aufnehmen. Sie können nur Anfang und Ende der Schleuderspuren feststellen.
7. Verwende den Weg-Geschwindigkeitsgraph und die TRACE-Option, um die Geschwindigkeit des Autos, mit der es die Startgerade passiert hat, in  $\text{m}\cdot\text{sec}^{-1}$  zu bestimmen.

8. (Optional) Veranstage einen Wettbewerb unter deinen Teammitgliedern oder unter allen Klassenkollegen und -kolleginnen, wer das Auto so wegstoßen kann, dass seine Anfangsgeschwindigkeit möglichst nahe an 1m pro Sekunde herankommt.

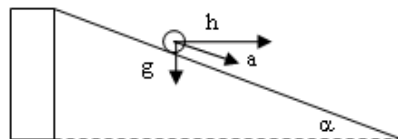


Hier sind zwei Bilder vom CAS-Rechner, die mit dem Programm RANGER erzeugt worden sind. Links siehst du das Zeit-Geschwindigkeitsdiagramm und rechts das Zeit-Wegdiagramm.

## Experiment – Variante unter Einsatz von Trigonometrie

### Bestimmung des Reibungskoeffizienten

1. Stelle die Versuchsanordnung wie vorhin beschrieben auf dem Fußboden oder auf einem Arbeitstisch her.
2. Miss die folgenden Abstände:
  - a) die Höhe der Plattform, auf der der obere Rand der Rampe ruht,
  - b) die waagrechte Entfernung des unteren Rands der Rampe vom oberen Rand,
  - c) die Länge der Rampe.
3. Bestimme aus deinen Abmessungen den Sinus, den Kosinus und den Tangens des Neigungswinkels der Rampe mit der waagrechten Basisebene.
4. Hier findest du das Kräftediagramm für das die Rampe hinunter rollende Auto:



Beachte, dass in diesem Fall die horizontal wirkende Kraft  $h$  den Wert 0 hat. Nimm für  $g$  den Wert  $9,8 \text{ m sec}^{-2}$  und berechne den Wert der längs der Rampe wirkenden Beschleunigung  $a$ .

5. Die folgenden Beziehungen basieren auf den Bewegungsgesetzen von Newton:

$$v = a \cdot t + v_0$$

$$d = \frac{a}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

Dabei bedeutet  $t$  die Zeit, die seit dem Loslassen des Autos vergangen ist,  $v$  die Geschwindigkeit des Autos zu diesem Zeitpunkt  $t$ ,  $v_0 = 0$  ist die Anfangsgeschwindigkeit und  $s_0$  die Anfangsentfernung des Autos. Berechne zuerst, nach welcher Zeit die zurückgelegte Wegstrecke der Länge der Rampe entspricht und dann, welche Geschwindigkeit das Fahrzeug zu diesem Zeitpunkt hat. Das ist seine tatsächliche Geschwindigkeit, die mit keinem Messfehler behaftet ist – wenn die Messungen an der Rampe von vornhin genau durchgeführt worden sind.

6. Lasse das Fahrzeug los, wie in der nebenstehenden Abbildung zu sehen ist.



7. Miss den Abstand vom unteren Ende der Rampe zu den Hinterrädern des Fahrzeugs. Diese Entfernung hat das Auto nur unter Einfluss der Reibung zurückgelegt.
8. Mit dem berechneten Wert für die Geschwindigkeit (aus 5.) und der vom Auto zurückgelegten Entfernung (aus 7.) kannst du unter Verwendung der Formel (1) den Reibungskoeffizient  $\mu$  gewinnen. Halte diesen fest, denn du wirst ihn im nächsten Teil des Experiments wieder brauchen können.
9. Verwende diesen Reibungskoeffizient und erzeuge auf deinem Rechner einen Weg-Geschwindigkeitsgraph für die Strecke, die unter Reibung zurückgelegt wird. (Das ist die Strecke vom Fuß der Rampe bis zum Stillstand.) Strecken von maximal 2 m sind möglich.

### *Bestimmung der Anfangsgeschwindigkeit*

1. Erzeuge mit einem Klebeband (ca. 50 cm) oder mit Lineal und Bleistift eine Startgerade auf dem Boden oder auf dem Arbeitstisch.
2. Ein Teammitglied soll nun das Auto von etwas hinter der Startgeraden in senkrechter Richtung zu dieser Startgeraden stoßen. Wenn das Auto die Startlinie passiert, soll nur die Kraft der Reibung auf das Auto einwirken.
3. Notiere die vom Auto zurückgelegte Entfernung. Bei der Untersuchung eines Unfalls sind die Untersucher kaum einmal Zeugen des Unfalls und können Daten aufnehmen. Sie können nur feststellen, wo die Schleuderspuren beginnen und enden.
4. Verwende das Weg-Geschwindigkeitsdiagramm und die TRACE-Option, um die Geschwindigkeit des Autos, mit der es die Startgerade passiert hat, in  $\text{m}\cdot\text{sec}^{-1}$  zu bestimmen.

5. (Optional) Veranstatte einen Wettbewerb unter deinen Teammitgliedern oder unter allen Klassenkollegen und -kolleginnen, wer das Auto so wegstoßen kann, dass seine Anfangsgeschwindigkeit möglichst nahe an 1 m pro Sekunde herankommt.

### **Rückkehr zum beschriebenen Unfall**

Die Polizei kam zum Schluss, dass sich das Auto zumindest mit 50 km/h bewegte, als es begann, sich zu überschlagen. Die Schleuderspuren vor dem ersten Überschlag wiesen eine Länge von 55 m auf. Aus den üblichen Tabellen fanden sie unter Berücksichtigung des Straßenbelags und der Witterungsumstände für den Reibungskoeffizienten den Wert 0,7.

1. Verwende dein Werkzeug (Rechner oder PC) und erstelle mittels Gleichung (1) das Weg-Geschwindigkeitsdiagramm mit diesen Daten.
2. Welche Schleuderstrecke würde ein Kfz bei der Geschwindigkeit von 50 km/h zurücklegen?
3. Addiere diese Entfernung zu den gemessenen 55 m und schätze die Mindestgeschwindigkeit, die das Fahrzeug vor Beginn des Bremsmanövers hatte.

### **KOMMENTAR des CORONERS**

Die errechnete Geschwindigkeit des Fahrzeugs wird dich überraschen. Sie scheint nicht allzu groß gewesen zu sein. Aber dennoch reichte sie aus, das Auto 55 m auf der Straße schleudern zu lassen und war dann noch groß genug, dass sich das Auto überschlug. Die Hauptursache für den Unfall war, dass der Fahrer in die Kurve hinein beschleunigte. Da die Fahrtüchtigkeit des Lenkers beeinträchtigt war und er außerdem noch wenig Fahrpraxis hatte, verlor er in der Kurve die Kontrolle über sein Fahrzeug und überreagierte, indem er scharf bremste. Das kommt leider nur zu oft vor: Alkohol und überhöhte Geschwindigkeit vergrößern das Risiko für derartige Unfälle. Es ist nicht sehr wahrscheinlich, dass das Opfer angegurtet überlebt hätte, aber mit angelegtem Sicherheitsgurt wäre es nicht aus dem Wagen geschleudert worden. Eine geringere Geschwindigkeit hätte seine Überlebenschance wesentlich erhöht. Wenn an diesem Unfall überhaupt etwas „gut“ war, dann die Tatsache, dass keine anderen Autos und Personen darin verwickelt waren.

### **Bemerkungen für den Lehrer/die Lehrerin**

Hier wird vor allem der Zusammenhang zwischen der Brems- oder Schleuderspur, die tatsächlich eine Folge der Reibungskraft ist, und der Geschwindigkeit eines Fahrzeugs untersucht. Der Zusammenhang ergibt sich als das Ergebnis zweier Gleichungen für die kinetische Energie. Wenn diese Grundidee den Studenten noch nicht bekannt ist, lässt sie sich heuristisch erklären. Die kinetische Energie ist die Energie der Bewegung. Die Studenten werden sehr wohl verstehen, dass es einer gewissen Energie bedarf, ein Auto mit einer gewissen Geschwindigkeit zu bewegen. Je höher die Geschwindigkeit sein soll, desto mehr an Energie ist erforderlich. Das erklärt aber noch nicht den quadratischen Zusammenhang. Das kann

aber auch später behandelt werden. Der Zusammenhang zwischen der Reibungskraft und der kinetischen Energie kann verdeutlicht werden, indem man einen Körper auf verschiedenen Unterlagen gleiten lässt – von der glatten Tischplatte bis zu einem Teppichboden. Dabei können die Studenten die Veränderung der Reibung tatsächlich fühlen. Am wichtigsten ist es, dass sie ein Gefühl für die Hauptgleichung dieses Experiments bekommen:

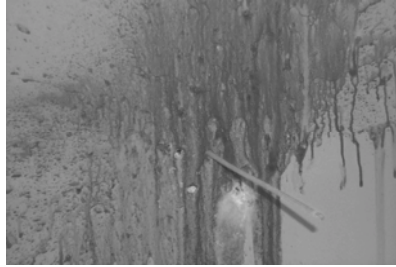
$$v = \sqrt{2g \cdot \mu \cdot d}.$$

Viele Studenten werden überrascht sein, dass das Gewicht des Fahrzeugs in dieser Gleichung nicht aufscheint. Das ist eine Konsequenz aus dem Gleichsetzen der beiden Gleichungen für die kinetische Energie. Dabei ergibt sich eine ausgezeichnete Gelegenheit, um Galileis klassisches Experiment zu erwähnen, in dem er nachwies, dass die Fallgeschwindigkeit eines Körpers nur von der Schwerkraft und nicht vom Gewicht des Körpers abhängt. Man kann auch darauf hinweisen, dass diese Gleichung den Einfluss der Schwerkraft sehr wohl berücksichtigt, da die Erdanziehungskraft  $g$  in ihr vorkommt. Ein Bremsspur auf dem Mond wäre beim gleichen Reibungskoeffizient wohl ein gutes Stück länger als hier auf der Erde.

Es wäre viel zu gefährlich, wenn die Studenten echte Bremsspuren erzeugen, oder solche auf der Straße (oder gar Autobahn) untersuchen müssten. In diesem Experiment wird die Reibung der fixierten Reifen ersetzt durch die Reibung der Achsen in der Führung eines Spielzeugautos. Es findet sich zwar kein Gummiabrieb auf der Spur, aber grundsätzlich sind dieselben Kräfte am Werk. Welche Variante des Experiments sie nun tatsächlich ausführen, hängt einerseits von ihrer Vorliebe und der Vertrautheit mit dem Umgang eines Datenmessgeräts (CBR oder CBL) und andererseits davon ab, ob ihre Studenten schon über Grundkenntnisse der Trigonometrie verfügen. Wenn die Winkelfunktionen bekannt sind und sie über ausreichend Zeit verfügen ist es sicher interessant, beide Alternativen auszuführen. Die zweite Variante gibt mehr oder weniger den genauen Wert der Geschwindigkeit des Fahrzeugs am Ende der Rampe, während bei der ersten Messfehler auftreten können, die auf der Tatsache beruhen, dass zB das CBR nur Daten in Abständen von mindestens 0,05 Sekunden aufzeichnen kann.

## Blutspritzer an der Wand

### „Blut ist ein ganz besonderer Saft“



### WAS GESCHAH ...

Als Beauftragter des Coroners wirst du zu einem gewaltsamen Todesfall gerufen. Es ist nicht klar, ob Mord oder Selbstmord vorliegt. Das Wohnhaus ist ein ebenerdiges Bauernhaus. Die Hauseigentümer hielten sich in ihrem Schlafzimmer auf, während sich ihre Tochter im Schlafzimmer auf der anderen Seite des Hauses befand. Die Eltern hatten nichts Auffälliges während der Nacht gehört, wurden aber misstrauisch, als sie am morgen die Tochter aufwecken wollten und die Tür zum Schlafzimmer versperrt vorfanden. Als sie keine Antwort bekamen, öffneten sie die Tür gewaltsam. Sie fanden ihre Tochter mit mehreren Schusswunden im Kopf auf ihrer rechten Seite liegend. Neben der Tochter lag ein junger Mann, der nur eine Schusswunde am Kopf aufwies. In der Wand vor dem Gesicht der Tochter gab es mehrere Löcher mit deutlichen Blutspritzern. Wegen der offensichtlich tödlichen Verletzungen musst du sowohl den Einschusswinkel als auch die Entfernung der Opfer vom Schützen feststellen.

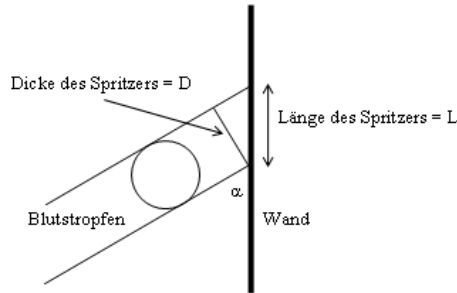
### Hintergrundinformationen

Bei vielen kriminaltechnischen Ermittlungen im Zusammenhang mit einem gewaltsamen Tod durch einen Schuss, einen Schlag mit einem stumpfen Gegenstand oder einem Messerstich ist es entscheidend, die Position des Opfers und/oder des Angreifers zu kennen. Dann kann der Untersucher sagen, ob das Opfer bewegt oder ob am Tatort irgendetwas verändert wurde. Manchmal sind die einzigen sichtbaren Spuren Blutspritzer an umliegenden Gegenständen, Flächen oder Wänden. Mit einigen physikalischen und mathematischen Kenntnissen kann man die Lage des Ausgangspunkts für diese Spritzer bestimmen.

Die physikalische Grundlage leitet sich davon ab, dass Blut eine dicke und zähe Flüssigkeit ist. Wenn ein Blutstropfen durch die Luft fliegt, nimmt er sofort eine Form an, die seine Oberfläche möglichst klein macht. Das ist die Kugelform. Wenn nun der Blutstropfen auf eine ebene Oberfläche auftrifft, wie zB auf eine Wand, eine Tischfläche oder den Fußboden, dann verändert sich die dreidimensionale Form in eine zweidimensionale. Wenn er auf diese Fläche unter  $90^\circ$  auftrifft, dann breitet er sich in alle Richtungen gleichmäßig aus, um den

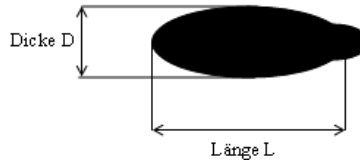


Inhalt des Tropfens auf eine möglichst kleine Fläche zu verteilen – es entsteht ein Kreis. Wenn aber der Tropfen – die Kugel – unter einem anderen Winkel auf die Oberfläche auftrifft, dann trifft der Boden der Kugel die Wand während sich der Oberteil weiter bewegt. Die Abbildung illustriert den Sachverhalt.



Beachte, dass die Dicke des Spritzers an der Wand mit der Dicke des Originaltropfens übereinstimmt. Das Erstaunliche ist nun, dass der Winkel, unter dem der Blutstropfen auf die Wand aufgetroffen ist, aus seiner Dicke  $D$  und Länge  $L$  bestimmt werden kann.

Die Form des Blutspritzers ähnelt einem Tränentropfen, der aus einer Ellipse mit einer leichten Ausdehnung besteht. Diese Ausdehnung rührt vom Flugimpuls her und zeigt die Richtung an, von der der Tropfen aufgeprallt ist.



Die Hauptachse der Ellipse zeigt in die Richtung, aus der das Blut auf der Fläche aufgekommen ist. Wenn man daher mehrere Spritzer betrachtet und ihre Hauptachsen in die zur Ausdehnung entgegengesetzten Richtung verlängert, sollten sich diese in einer gemeinsamen Stelle  $S$  an der Wand treffen.

Diese Stelle gibt aber noch keine Auskunft darüber, in welcher Entfernung von der Wand sich das Opfer befunden hat. Die erste Abbildung oben zeigt uns, wie wir den Ausgangspunkt der Spritzer feststellen können. Wenn wir den Winkel, unter dem die Spritzer auf die Wand aufgetroffen sind, mit  $\alpha$  bezeichnen, dann können wir mit elementarer Trigonometrie die folgende Beziehung (1) ableiten.

$$\sin \alpha = \frac{D}{L} \quad (1)$$

Beachte, dass  $L$  ohne die Ausdehnung gemessen werden muss. Um das zu gewährleisten, kann man auch von der Stelle der weitesten Ausdehnung des Tropfens zum Rand messen,

der der Ausdehnung gegenüber liegt. Damit erhält man die halbe Hauptachse der Ellipse  $\frac{L}{2}$ .

Aus Formel (1) gewinnt man über die Umkehrfunktion den Winkel  $\alpha$ .

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{D}{L}\right) \quad (2)$$

In Derive führt die Funktion ARCSIN(D/L) sofort zur Ausgabe des Winkels in Grad während ASIN(D/L) den Winkel im Bogenmaß ausgeben lässt.

Um auch den Herkunftsort der Blutstropfen, die zu den Spritzern geführt haben, zu ermitteln, wird ein dünner Faden im Zentrum eines Spritzers befestigt und in die Richtung der Hauptachse gelegt. Dann hebt man den gespannten Faden so weit von der Wand ab, dass er mit ihr den Winkel  $\alpha$  bildet und sucht auf dem Faden jenen Punkt, der sich genau vor dem vorhin ermittelten Treffpunkt der Achsen  $S$  auf der Wand befindet: Von dieser Stelle aus wurde das Blut verspritzt.

Das Experiment besteht aus zwei voneinander unabhängigen Teilen. Im ersten Teil sollst du ein „virtuelles Spritzmuster“ auf dem Schirm deines Computers erzeugen und dann jene Gerade herausfinden, die zum Ursprungspunkt führt. Da du nur mit einem Spritztropfen arbeiten wirst, kannst du unmöglich die Lage der Quelle für das Spritzmuster feststellen.

Im zweiten Teil wirst du deinen Rechner dazu verwenden, um Berechnungen anzustellen. Zuerst wirst du mit einer Zahnbürste und „künstlichem Blut“ (zB Tinte, ...) ein Spritzmuster erzeugen. Das wirst du besser irgendwo im Freien machen, denn in der Schule wird es vielleicht keinen geeigneten Ort für diese eher schmutzige Angelegenheit geben. Nach der Herstellung dieses Musters durch Verspritzen mit einer farbgetränkten Zahnbürste auf ein genügend großes Stück Papier kannst du einige geeignete Tropfmuster auswählen und diese so analysieren, dass du zuerst den „Konvergenzpunkt“ und dann auch den Einfallswinkel bestimmen kannst. Aus diesen Informationen wirst du dann den Rückschluss auf die Position der Zahnbürste beim Verspritzen des „Blutes“ ziehen können.

### Forensische Aufgaben

- Bestimmung der Lage des Ausgangspunkts für verspritztes Blut
- Entscheidung, ob es nur eine derartige Quelle oder mehrere Quellen für das Spritzmuster gibt

### Naturwissenschaftlich-mathematische Aufgaben

- Lernen, wie man die Definition einer Ellipse einsetzen kann, um eine Ellipse mit vorgegebener Richtung der Hauptachse zu konstruieren
- Mit Hilfe der Hauptachsen von mehreren Ellipsen, die das Spritzmuster bilden, einen Konvergenzpunkt in der Ebene finden
- Das Achsenverhältnis der Ellipsen zur Bestimmung des Einfallswinkels einsetzen

## Materialien

Für das erste Experiment

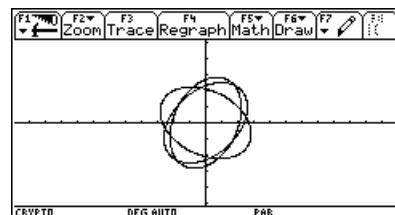
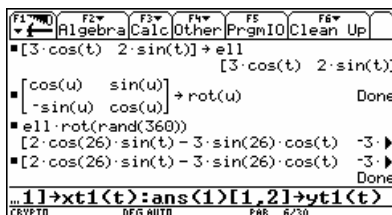
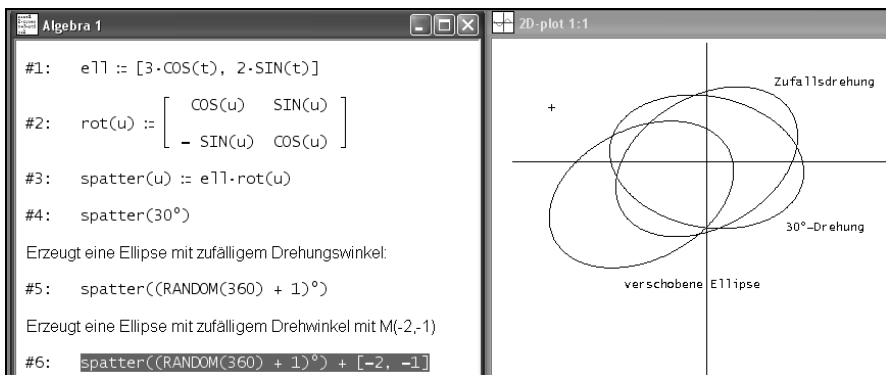
- Derive oder ein anders CAS, CAS-Rechner oder Graphischer TR.
- Ein Stück schwarzen Baumwollfaden von 1,5m Länge
- Ein Winkelmesser
- Ein Meterstab

Für das zweite Experiment

- Ein großes Blatt Papier und ein großes Stück Plastikfolie
- Eine Zahnbürste
- Ein Glas mit rot gefärbtem Wasser (am besten mit Lebensmittelfarbe)
- Klebeband zum Befestigen des Papiers und der Folie

## Experiment 1 – Erzeugung eines „virtuellen Blutspritzers“

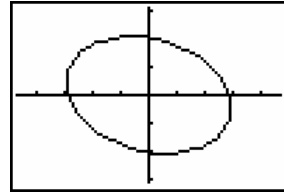
1. Erzeuge das Bild einer Ellipse, die um einen beliebigen Winkel gedreht ist. Der Bildschirmausschnitt zeigt eine Methode mit Hilfe der Parameterdarstellung der Ellipse und einer Rotationsmatrix, durchgeführt mit Derive. Wende diejenige Methode zur Erzeugung der Ellipse an, mit der du am besten vertraut bist.



Auf dem CAS-Rechner kann ähnlich vorgegangen werden. Hier wurden drei gedrehte Ellipsen in Parameterdarstellung erzeugt. Am graphischen Taschenrechner geht es leider nicht so elegant, da keine Funktionen definiert werden können, aber trotzdem:

```
randInt(360,1)→W
                228
randInt(360,1)→W
                344
```

```
Plot1 Plot2 Plot3
\X1r 3*cos(T)*co
s(W)-2sin(T)*sin
(W)
Y1r 3*cos(T)*si
n(W)+2sin(T)*cos
(W)
\X2r =
```



Erzeuge einen Zufallswinkel, die Parameterdarstellung aus der Matrizenmultiplikation von oben und dann den Graph der Ellipse.

2. Der Graph stellt deinen „Blutspritzer“ dar. Du wirst ihn dazu verwenden, um den Winkel zu berechnen, unter dem das „Blut“ auf deinen Schirm gespritzt ist.
3. Miss die Länge der Hauptachse (=  $L$ ) und der Nebenachse (=  $D$ ) und berechne über die Formel (2) den Einfallswinkel.
4. Halte ein Ende des Fadens im Mittelpunkt der Ellipse fest und spanne ihn in Richtung der Hauptachse, wobei du darauf achtest, dass der Faden mit dem Schirm den eben berechneten Winkel einschließt. Damit hast du die Richtung festgestellt, aus der der Fleck auf den Schirm gekommen ist. Du kannst den Faden mit dem Meterstab unterstützen.
5. Wähle einen Punkt auf dem Faden (Stab) und lasse deine Kollegen ihre Fäden zu anderen Stellen des Schirms spannen.
6. Die Kollegen sollen nun ihre „Blutflecken“ mit dem Mittelpunkt an der Stelle, wo ihr Faden den Schirm traf, erzeugen. Das sind wieder Ellipsen mit der Hauptachse in Richtung ihres Fadens und mit ihrem spezifischen Einfallswinkel, der sich auf das Verhältnis von Haupt- und Nebenachse auswirkt.

## Experiment 2 – Analyse eines vollständigen Musters von Blutflecken

1. Befestige ein großes Stück Plastikfolie an der Wand.
2. Befestige nun das Blatt Papier in der Mitte der Plastikfolie in einer Mindesthöhe von 1,80 m über dem Boden.
3. Trage eine Schürze oder sonstige Arbeitsbekleidung und wenn möglich auch eine Schutzbrille.
4. Stelle dich in einer Entfernung von ca. 1,50 m von der Wand und 1 bis 2 m seitlich vom Papier auf. Vergewissere dich, dass sich keine Personen und Gegenstände zwischen dir und dem Papier befinden. Am besten ist es, wenn alle hinter dir stehen.
5. Tauche die Zahnbürste leicht in deinen „Blutbehälter“.
6. Halte die Zahnbürste in Schulterhöhe mit den Borsten gegen das Papier gerichtet, ziele auf das Papier und spritze mit raschen Bewegungen aus dem Handgelenk das „Blut“ von der Bürste auf das Papier.

7. Überzeuge dich, ob du zumindest drei oder vier brauchbare Spritzspuren (Blutflecken) in Ellipsenform auf dem Papier finden kannst. Wenn nicht, dann wiederhole den Versuch mit einem neuen Blatt Papier. Wenn es wiederholt nicht gelingt, dann solltest du das Kunstblut etwas „verdicken“ (zB mit etwas Mehl oder Stärke). Nimm aber nicht zu viel davon, denn sonst bleibt dein „Blut“ nicht flüssig genug.
8. Wenn dir eine gute Vorlage gelungen ist, lasse sie einige Minuten trocknen und bringe sie in die Klasse.
9. Verlängere bei vier oder fünf „schönen“ Flecken die Hauptachse der Ellipsen und versuche einen „Konvergenzbereich“ in Bezug auf das Papier zu finden. (Das ist der Bereich in dem die Achsen zusammenlaufen.) Es ist sehr wahrscheinlich, dass sie sich nicht in einem Punkt treffen, aber die gegenseitigen Schnittpunkte sollten schon recht nahe beisammen liegen.
10. Suche dir nun den am besten gelungenen Fleck aus und miss möglichst genau die Längen der Achsen der Ellipse. Der Maßstab ist dabei nicht von Bedeutung, da es ja nur auf das Verhältnis der Achsenlängen ankommt.
11. Nun kannst du mit dem Taschenrechner nach Formel (2) den Auftreffwinkel des Tropfens berechnen.
12. Befestige das Papier an der Wand und markiere den Treffpunkt der Hauptachsen.
13. Befestige einen Faden im Zentrum des in 10. gewählten Spritzflecks.
14. Ein Teammitglied soll den Winkelmesser halten und du achtest darauf, dass der gespannte Faden mit der Wand den berechneten Winkel einschließt, wenn du ihn bis genau vor den „Konvergenzpunkt“ spannst.
15. Von dieser Stelle weg solltest du vorher mit der Zahnbürste die Flecken am Papier erzeugt haben. Stimmt das ungefähr?

### **KOMMENTAR des CORONERS**

Der Coroner hat in diesem Fall große Bedeutung für die Untersuchung. Eine genaue Überprüfung der Wunde gibt Auskunft darüber, wie nahe beim Opfer die Waffe abgefeuert wurde. Röntgenstrahlen helfen bei der Bestimmung des Einschusswinkels. Auch die Anbringung von Holzdübeln in den Einschusslöchern in der Wand hilft zur Feststellung des Winkels. Die Körpertemperatur und der Kaliumgehalt des Glaskörpers im Auge der Opfer sind Hilfen in der Bestimmung des Todeszeitpunkts. Ausführliche Interviews mit Familienmitgliedern vermitteln ein vollständiges Bild der äußeren Umstände. Du erfährst, dass die beiden Toten ein Verhältnis gehabt haben und dass die Tochter den jungen Mann kürzlich davon unterrichtet hat, dass sie die Verbindung auflösen würde. Die Polizei wird die Projektile finden und untersuchen, ob sie zu den am Tatort gefundenen Waffen gehören.

## Mit der Matrix zu den Tatverdächtigen



### WAS GESCHAH ...

Die örtliche Polizei ruft dich zu einer Stelle im Wald, wo zwei Jäger in einer Mulde eine seicht begrabene Leiche aufgefunden haben. Du sicherst den Tatort durch Absperrungen und lässt die menschlichen Überreste sorgfältig bergen. Es ist augenscheinlich, dass der Körper nicht erst kürzlich dort begraben wurde. Im Wesentlichen bestehen die Reste nur aus Knochen und einigen Textilfetzen. Dein erfahrenes Auge sagt dir, dass es sich bei der Leiche um eine junge Frau handeln muss, aber das ist alles, was du bei dem Grab feststellen kannst. Du hilfst bei der sorgfältigen Exhumierung des Körpers und ordnest an, dass er ins nächstliegende Leichenschauhaus überführt wird.

Dort kannst du eine genauere Analyse durchführen. Aus der Länge der Knochen und einer Untersuchung der Knochenenden schließt du, dass es sich bei dem Opfer um ein Mädchen im vorpubertären Alter handeln muss. Die gerichtsmedizinische Untersuchung des Gebisses bringt die Gewissheit, dass es sich um ein junges Mädchen handelt, dass vor etwa 20 Jahren als vermisst gemeldet worden ist. Eine weitere Untersuchung enthüllt, dass dem Opfer zumindest dreimal in die Brust geschossen wurde. Projektile wurden keine beim Grab gefunden, aber das Ausmaß der Zerstörung an den Knochen weist darauf hin, dass die Schüsse aus einer Pistole vom Kaliber 45 stammen müssen. Sonst lässt sich nichts über die Waffe sagen.

Damit ist deine Mitwirkung an den Ermittlungen beendet. Die Aufklärung des Falls ist Aufgabe der Polizei. Eine Gruppe von Kriminalpolizisten übernimmt den Fall und die Beamten beginnen mit der mühsamen Arbeit, Leute aus dem Verwandten- und Bekanntenkreis der Toten zu befragen. Das Opfer lebte in einer kleinen Ortschaft, daher beginnen die Polizisten dort mit ihrer Arbeit. Sie lassen die Akten ausheben, die vor 20 Jahren bei der Untersuchung des Verschwindens des Mädchens angelegt worden sind. Hauptverdächtiger war damals ein 14-jähriger Afro-Amerikaner, der Sohn der Nachbarfamilie des Mädchens. Diese Familie war die einzige nichtweiße Familie in der Umgebung. Die Schwester des Burschen war die „beste Freundin“ des Mädchens. Die beiden Mädchen hatten aber einen kleinen Streit, der offenbar von der Mutter des Opfers vom Zaun gebrochen worden ist.

## Die weiteren polizeilichen Ermittlungen

Die Polizei begann mit der Befragung des nun bereits erwachsenen Sohnes und seiner Schwester. Wie bei vielen Untersuchungen wurden bei den Befragungen weitere Personen genannt, die für den Fall interessant waren. Aus allen Aussagen kristallisierte sich für die Polizei eine Liste von sechs Hauptverdächtigen heraus. Hier folgt eine sehr kurze Zusammenfassung der Ergebnisse der polizeilichen Ermittlungen. Wir wollen die Personen mit den Buchstaben A bis F bezeichnen.

- A Das afro-amerikanische Mädchen: Sie war eine Freundin des Opfers seit dem Zeitpunkt, als ihre Familie das Nachbarhaus während einer Demonstration durch das örtliche „Bürgerkomitee für eine saubere Nachbarschaft“ bezogen hat. Kürzlich hatte es einen kindischen Streit zwischen ihnen gegeben. Das Mädchen hat dem Opfer am Tag, an dem es verschwand, eine Nachricht zukommen lassen, dass sie sich an ihrem „geheimen Ort“ treffen sollten.
- B Der afro-amerikanische Bub: Seine Schwester, für die er sich als Beschützer fühlt, hat gerade eine „Zurückweisung“ durch das Opfer erfahren. Er wurde in der Nacht, in der das Mädchen verschwunden ist, auf deren Grundstück gesehen. Er galt als ein anständiger Teenager, war aber sehr empfindlich gegenüber der seiner Familie entgegengebrachten Diskriminierung.
- C Der Obmann des Bürgerkomitees: Er führte eine Demonstration an, die den Möbelwagen der afro-amerikanischen Familie empfing, als sie ihr Haus bezogen. Er war sehr aufgebracht darüber, dass das Opfer sehr gut mit B befreundet war. Er pflegte zu sagen: „Das Einzige, das noch schlechter ist als ein Schwarzer, ist ein Weißer, der ein Freund eines Schwarzen ist.“ Er galt als unnachgiebiger Vater und Ehemann. Man wusste, dass er ein Gewehr besaß.
- D Grundstücksmakler: Er versuchte, aus der Stimmung Kapital zu schlagen, die entstehen kann, wenn sich eine nichtweiße Familie in einer Wohngegend ansiedelt. Er versuchte einerseits, dort billig Häuser zu kaufen, und andererseits, Häuser in einer neuen Siedlung am Stadtrand zu verkaufen. Er beurteilte die offene Freundschaft zwischen den beiden Mädchen als „schlecht fürs Geschäft“.
- E Teenager: Sohn des Verdächtigen C: Voreingenommen, aber unsicher in seinem Verhalten, verursacht durch die Freundschaft zwischen den beiden Mädchen. Er wurde vom Opfer öffentlich zurechtgewiesen und auch leicht geschlagen, als er das Mädchen in der Schule einschüchtern wollte. Er entschuldigte sich dann beim Opfer und ihrer Freundin und wurde dafür von seinem Vater bestraft. Er versuchte immer, seinem Vater alles recht zu machen.
- F Die Mutter des Opfers: Sie war empfänglich für die Versuche von D, der Familie ein neues Haus zu verkaufen, aber ihr Mann war dagegen. Sie bestand auf einer Beendigung der Freundschaft der Mädchen und brachte ihre Tochter dazu, ihre Freundin in der Öffentlichkeit nicht mehr zu „kennen“.

Für jede der eben genannten Personen gibt es einen Grund dafür, dass sie in die Liste der Verdächtigen aufgenommen wird. Die Arbeit der Ermittler ist es nun, diese Gründe zu sortieren und zu bewerten, um herauszufinden, auf wen sich die weiteren Untersuchungen konzentrieren sollen.

Eine alte Faustregel für die Untersuchung von Kriminalfällen ist, sich an drei Gesichtspunkten zu orientieren: Motiv, Gelegenheit und Nutzen. Wer hatte das stärkste Motiv, das Mädchen zu töten? Wer hatte die beste Gelegenheit, das Verbrechen zu begehen? Wer kann aus der Tat den größten Nutzen ziehen? Wir wollen diese Punkte mit MGN abkürzen und sie auf den vorliegenden Fall anwenden.

### Forensische Aufgaben

- Sinnvolle Organisation von Ermittlungsergebnissen, sodass diese zur Lösung des Falles führen können

### Mathematische Aufgaben

- Suche nach einer Möglichkeit, subjektive Eindrücke in eine geeignete Form zu bringen, sodass eine quantitative Analyse möglich wird
- Ordnen der unterschiedlichen Lösungsmöglichkeiten nach Prioritäten und Bedeutung der Aussagen
- Anwendung eines zweiseitigen Vergleichs der Alternativen, um die Reihenfolge herzustellen
- Kennenlernen des Begriffs des *dominanten Vektors* bezüglich gewisser Matrizen

### Die mathematische Grundlage

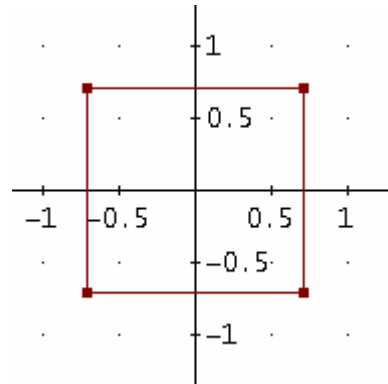
In diesem Abschnitt wollen wir den Begriff des *dominanten Vektors* vorstellen. Dieser kann zu bestimmten Typen von Matrizen gebildet werden. Im ersten Anschein mag einem das als eine unbedeutende mathematische Spielerei vorkommen, aber es hat in der Tat mit unserem Versuch, den Kriminalfall zu lösen, zu tun. Die Idee des dominanten Vektors (genauer gesagt, eines *dominanten Eigenvektors*) ist die Grundlage des „*Analytischen Hierarchischen Prozesses*“ (AHP), der von *Thomas Saaty* in den späten 70er-Jahren entwickelt wurde. Dabei werden verschiedene Alternativen untereinander abgewogen und in eine logische Reihenfolge von Entscheidungen gebracht.

Wir werden das Konzept des dominanten Vektors anhand einer  $2 \times 2$ -Matrix einführen. Nehmen wir an, dass alle Elemente der Matrix positiv sind und dass die zweite Zeile kein Vielfaches der ersten ist. Betrachte dazu die Matrix  $A$ :

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$



Beobachte nun, was geschieht, wenn die Matrix, bestehend aus den Ecken eines Quadrats mit der Matrix  $A$  (von links) multipliziert wird:



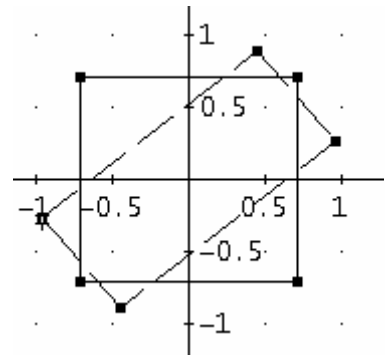
Da die Multiplikation mit der Matrix  $A$  eine lineare Transformation ist, werden die Seiten des Quadrats in Seiten der Abbildung des Quadrats transformiert. Jeder Punkt im Inneren des Quadrats wird in einen Punkt im Inneren des Bildvierecks abgebildet. Das Ausgangsquadrat soll aus den folgenden Punkten bestehen:

$$Q := [-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2; -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2; -\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2]$$

Jeder Punkt(vektor) wird mit  $A$  multipliziert und der resultierende wird Vektor normiert, indem wir ihn durch seine Länge dividieren.

$$\text{VECTOR} \left( \frac{A \cdot v}{|A \cdot v|}, v, Q \right)$$

Das Ergebnis ist das strichlierte Rechteck, das gegenüber dem Quadrat in eine Richtung gekippt und gestaucht wurde.



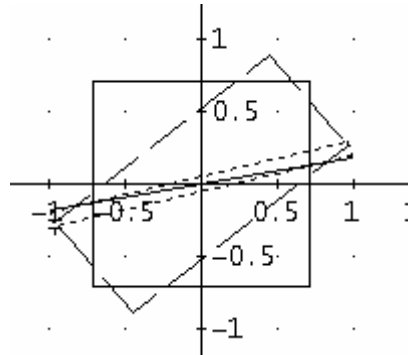
Mit den Ecken dieses Rechtecks wird genau so verfahren: wir multiplizieren mit  $A$  und normieren die entstehenden Ortsvektoren. Damit entsteht das punktiert eingezeichnete Rechteck, das noch weiter gekippt und noch mehr gestaucht wird (siehe Bild auf der nächsten Seite). Dieser Vorgang kann beliebig oft wiederholt werden. Wir produzieren das Ergebnis nach dem 20. Schritt, indem wir gleich mit  $A^{20}$  multiplizieren und das entstehende „Rechteck“ einzeichnen.

Damit wird das Ausgangsquadrat praktisch schon auf eine Strecke komprimiert. Die Strecke liegt auf der Geraden  $y = 0,18301x$  und enthält den Punkt  $D (0,8453 / 0,1547)$ .

Die exakte Rechnung ergibt für den Punkt  $D$  die Koordinaten  $\left( \frac{6-2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}-3}{3} \right)$ .

$$\text{VECTOR} \left( \frac{2}{A \cdot v}, v, Q \right)$$

$$\text{VECTOR} \left( \frac{20}{A \cdot v}, v, Q \right)$$



Überprüfe die oben angegebenen numerischen Ergebnisse durch eigene Rechnung.

Der Ortsvektor von  $D$ , der auf dieser Geraden liegt und die Eigenschaft besitzt, dass die Summe seiner Komponenten genau 1 ergibt, wird als *dominanter Vektor der Matrix A* bezeichnet. Dieses Konzept des *dominanten Vektors* wird eine bedeutende Rolle in der Analyse der von der Polizei gesammelten Aussagen in dem Mordfall spielen.

Es muss aber unbedingt darauf hingewiesen werden, dass nicht jede Matrix einen dominanten Vektor besitzen muss. So hat zum Beispiel die Matrix  $B$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

die Eigenschaft, dass das Produkt eines jeden Vektors mit aufeinander folgenden Potenzen von  $B$  zu einer Liste von 12 verschiedenen Vektoren führt, die sich periodisch wiederholen.

$$B \cdot [x, y] = \left[ \frac{\sqrt{3} \cdot x}{2} - \frac{y}{2}, \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot y}{2} \right]$$

$$B^{13} \cdot [x, y] = \left[ \frac{\sqrt{3} \cdot x}{2} - \frac{y}{2}, \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot y}{2} \right]$$

$$\text{VECTOR}(B \cdot [2, 2], k, 20)$$

Der dritte Ausdruck führt zur Liste der ersten 20 Produkte.

Glücklicherweise haben wir es aber in unserem Zusammenhang immer mit anderen Matrizen zu tun. Unsere Matrizen haben nur positive Elemente. Zwei deutsche Mathematiker, *Oskar Perron* (1880 – 1975) und *Ferdinand Georg Frobenius* (1849 – 1917) bewiesen, dass jede Matrix, die nur positive Elemente besitzt, einen zugehörigen dominanten Vektor hat, der ebenfalls nur aus positiven Elementen besteht. Tatsächlich haben sie wesentlich stärkere Ergebnisse bewiesen, aber für unsere Zwecke soll das ausreichen.

Da vorher von einem *Eigenvektor* die Rede war, soll dieser wichtige mathematische Sachverhalt kurz besprochen werden.

Wenn  $A$  eine reguläre quadratische Matrix ist, kann man die Gleichung  $A \cdot v = \lambda \cdot v$  aufstellen. Skalare  $\lambda$  und Vektoren  $v$ , die diese Gleichung erfüllen, heißen *Eigenwerte* ( $\lambda$ ) mit den jeweils zugehörigen *Eigenvektoren*  $v$ . Ein derartiger *Eigenvektor* wird durch die Multiplikation mit  $A$  nur in seiner Länge, nicht aber in seiner Richtung verändert. Du kannst die Eigenvektoren von  $A$  auch mit Derive oder mit dem CAS-Rechner aufsuchen und zeigen, dass einer von ihnen mit dem oben experimentell gefundenen *dominanten Vektor* übereinstimmt.

EIGENVALUES(A)

$[2 \cdot \sqrt{3} + 5, 5 - 2 \cdot \sqrt{3}]$

EXACT\_EIGENVECTOR(A,  $2 \cdot \sqrt{3} + 5$ )

$$\begin{bmatrix} -2\sqrt{3} - 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$[-2\sqrt{3} - 2, -1]$

$\Sigma([-2\sqrt{3} - 2, -1])$

$[0.8452994616, 0.1547005383]$

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$\text{eigUc} \left( \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right) \quad \begin{bmatrix} .9837 & -.8258 \\ .1800 & .5640 \end{bmatrix}$					
$\begin{bmatrix} .9837 & .18 \\ .9837 & .18 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} .8453 & .1547 \end{bmatrix}$					
$[.9837, .1800] / [.9837, .1800]$					
MAIN      RAD AUTO      FUNC 2/30					

Die beiden Eigenvektoren werden als Spaltenvektoren ausgegeben. Nur derjenige, für den beide Komponenten gleiche Vorzeichen aufweisen, kann der dominante sein.

Mehr Informationen über AHP kannst du unter den folgenden URLs finden:

[http://en.wikipedia.org/wiki/Thomas\\_Saaty](http://en.wikipedia.org/wiki/Thomas_Saaty)

[http://en.wikipedia.org/wiki/Analytic\\_Hierarchy\\_Process](http://en.wikipedia.org/wiki/Analytic_Hierarchy_Process)

<http://www.boku.ac.at/mi/ahp.pdf>

## Die Anwendung von AHP für die Beurteilung der Anhaltspunkte

Die AHP-Methode wurde von *Thomas Saaty* 1977 veröffentlicht. Dabei werden die Prioritäten von unterschiedlichen Maßnahmen oder Personen bezüglich verschiedener Kriterien in eine Ordnung gebracht. Hier haben wir es mit sechs Verdächtigen zu tun, von A bis E, und drei Kriterien oder Beurteilungspunkte: Motiv, Gelegenheit und Nutzen. Diese Technik ist gerade dann sehr nützlich, wenn eine Situation eintritt, die nur schwer in Zahlen gefasst werden kann, wo wir aber Meinungen oder Gefühle haben, wenn wir die Maßnahmen oder die Personen im Zusammenhang mit den Beurteilungspunkten vergleichen und wir die Stärke unsere Meinungen in eine Reihenfolge bringen können. Du wirst sehen, dass wir mit dieser Methode Dinge quantifizieren können, für die dies vorerst nicht möglich scheint.

Zuerst brauchen wir ein Schema, um zwei Sachverhalte in Bezug auf ein bestimmtes Kriterium vergleichen zu können. Saaty schlägt eine Skala von 1 bis 9 vor, mit der die Einschätzung von zwei Personen/Maßnahmen (zB X und Y) bezüglich eines Beurteilungskriteriums vorgenommen werden soll:

- 1 = X und Y werden **gleich** bewertet
- 3 = **mäßige** Bevorzugung von X gegenüber Y
- 5 = X hat **deutliches Übergewicht** gegenüber Y
- 7 = es gibt **einige sichere Anhaltspunkte** für die Bevorzugung von X
- 9 = X ist **ganz sicher** Y vorzuziehen

Die Zwischenwerte 2, 4, 6 und 8 werden als Kompromiss genommen, wenn keine Einigkeit in der Bewertung erzielt werden kann. Das ist eine Erweiterung der Standardskala, um auch Kompromisse unterbringen zu können. Es geht nun darum, die Präferenzen beim Vergleich zweier Verdächtiger in einer  $n \times n$  Matrix  $[a_{i,j}]$  festzulegen, wobei gilt:

$a_{i,j} = s$  mit  $s$  = die Maßzahl der Bevorzugung der verdächtigen Person  $i$  gegenüber der verdächtigen Person  $j$  und

$a_{j,i} = \frac{1}{s}$ . Damit ergibt sich aber auch:  $a_{i,i} = 1$  für alle  $i = 1, \dots, n$ .

Wir wollen nun dieses Schema für den ersten Verdächtigen A im Vergleich mit allen anderen Verdächtigen B bis F bezüglich des Kriteriums *Motiv* verwenden. Hier ist das Ergebnis der Beratung der vier auf diesen Fall angesetzten Kriminalbeamten.

A im Vergleich mit B:

Das Team hat keinen Unterschied in der Stärke des Motivs für A und B gefunden und vergibt daher

$$a_{1,2} = a_{2,1} = 1.$$

A im Vergleich mit C:

Obwohl C wollte, dass die afro-amerikanische Familie wegziehen sollte, glaubten die Beamten, dass die Beleidigung von A durch ihre frühere Freundin sehr stark überwog und vergaben daher die Wertung

$$a_{1,3} = 7 \text{ und } a_{3,1} = \frac{1}{7}.$$

A im Vergleich mit D:

Das Opfer war den Geschäftsinteressen des Maklers D in doppelter Hinsicht hinderlich: sowohl hinsichtlich seines Projekts mit der neuen Siedlung als auch hinsichtlich der Möglichkeit, ein Wohnobjekt billig erstehen zu können. Alle waren sich darüber einig, dass dies ein deutlich stärkeres Motiv als die Verletzung von A darstellen kann und vergaben daher

$$a_{1,4} = \frac{1}{5} \text{ und } a_{4,1} = 5.$$

A im Vergleich mit E:

In diesem Punkt waren sich die Beamten nicht einig. Ein Teil von ihnen glaubte, dass die Peinlichkeit, vom Opfer in aller Öffentlichkeit geschlagen worden zu sein, zusammen mit der folgenden Bestrafung durch den Vater unzweifelhaft die ableh-

nende Haltung des Opfers gegenüber A übertrifft. Der andere Teil sah das nicht als ganz so deutlich an und man einigte sich auf

$$a_{1,5} = \frac{1}{8} \text{ und } a_{5,1} = 8.$$

A im Vergleich mit F:

Übereinstimmend beurteilten die Beamten, dass die Zurückweisung ein etwas stärkeres Motiv sein kann, als der Wunsch der Mutter nach einem anderen Haus. Daher ergab sich

$$a_{1,6} = 3 \text{ und } a_{6,1} = \frac{1}{3}.$$

Mit diesen Wertungen können wir bereits die erste Zeile und die erste Spalte der Motivmatrix  $A$  füllen. Es sind aber noch weitere 10 Vergleiche der möglichen Motive vorzunehmen und gegeneinander abzuwägen. Dann ist die Matrix voll. Wir wollen annehmen, dass die vier Beamten zu folgender Motivmatrix gekommen sind:

$$\text{Motiv} := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 & \frac{1}{5} & \frac{1}{8} & 3 \\ 1 & 1 & 9 & 2 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{9} & 1 & 2 & \frac{1}{5} & 4 \\ 5 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 8 & 8 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ \frac{1}{3} & 4 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Ein Blick auf die Matrix zeigt, dass die fünfte Zeile ganz deutlich alle anderen übertrifft. Das bedeutet, dass offensichtlich der Verdächtige E die stärksten Motive für die Tat hatte. Aber wie steht es um die Reihenfolge der anderen in Bezug auf das Motiv? Wie schneiden die Verdächtigen hinsichtlich der beiden anderen Kriterien ab? Das wollen wir dann gemeinsam behandeln. Zuerst reihen wir die Verdächtigen nach der Stärke des Motivs. Dabei kommt der *dominante* Vektor ins Spiel.

Wenn wir die Vergleichszahlen aus der Matrix  $\text{Motiv}$  auf jede beliebige Reihenfolge der Verdächtigen immer wieder anwenden, dann sollte sich der Effekt des Vergleichens langfristig auswirken und die Reihenfolge sollte gegen eine „Gerade“ konvergieren, die durch den dominanten Vektor bestimmt wird.

Du kannst das probieren: Verwende dein CAS (oder auch den graphischen Taschenrechner

oder ein Tabellenkalkulationsprogramm) und berechne nach dem Vorbild von oben näherungsweise den dominanten Vektor von `Motiv` mit der 30. Potenz von `Motiv`. Dabei übernimmt `Motiv` die Rolle von `A` und anstelle des Quadrats nimmst du als Ausgangsvektor den Vektor der Gleichbeurteilung aller Motive `[1, 1, 1, 1, 1, 1]`. Die „Normierung“ wird allerdings anders vorgenommen: da die Summe aller Elemente des Ergebnisvektors 1 ergeben soll, ist der Produktvektor durch die Summe aller Komponenten zu dividieren.

Im Begleitmaterial findest du die Datei `MGN_Analysis.dfw`. Das dort vorhandene kleine Programm `Dom_vec(Matrix)` berechnet den dominanten Vektor der `Matrix`:

```
Dom_vec(Motiv)
[0.1297259782, 0.1456126901, 0.08680762219, 0.1275789495, 0.4186657991, 0.09160896074]
```

Vergleiche mit deinem Ergebnis. Wie schon die 5. Zeile der Matrix zeigt, liegt nach dem `Motiv` der 5. Verdächtige – das ist `E` – an der Spitze, gefolgt von `B`, `A`, `D`, `F` und `C`.

Wir kommen nochmals auf den *Eigenvektor* zurück und zeigen, dass sich unsere approximierende Vorgangsweise auch höchst mathematisch über den Eigenvektor bestätigen lässt:

```
EIGENVALUES(Motiv)
[9.525092213, 0.1448988646, -1.850230785 + 4.749211729*i, -1.850230785 - 4.749211729*i, 0.01523524609 +
 2.871021193*i, 0.01523524609 - 2.871021193*i]
```

```
dv := APPROX_EIGENVECTOR(Motiv, 9.525092213)
```

```
dv := [-0.2618124729, -0.2938766355, -0.1751914252, -0.2574760579, -0.8449398924, -0.1848820549]
```

$$\frac{dv}{\sum(dv)}$$

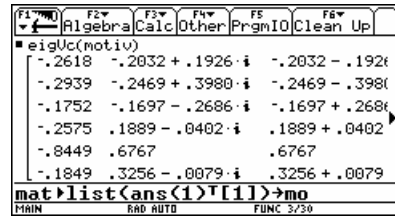
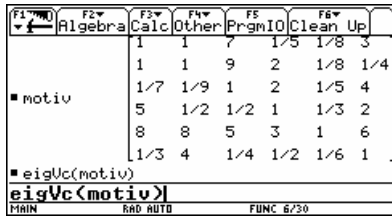
```
[0.1297271118, 0.1456147857, 0.08680670311, 0.1275784341, 0.4186645909, 0.09160837427]
```

`Derive` liefert – näherungsweise – zwei reelle *Eigenwerte* (näherungsweise, weil sie Lösungen einer Gleichung 6. Grades sind) und schon der Versuch mit dem ersten Eigenwert führt zum passenden Eigenvektor, der sich nach Normierung mit dem obigen Ergebnis deckt. Bei größeren Matrizen kann die Ermittlung der Eigenwerte zu Problemen führen, daher ist es sicherer, iterativ in die Nähe der Endlage zu kommen. Neben dem angebotenen Programm, das eine vorgegebene Genauigkeit berücksichtigt, können wir auch über `ITERATES` die ersten 20 Multiplikationen durchführen und dann die ganze Entwicklung betrachten oder gleich nur die letzte Zeile der entstehenden Tabelle verwenden:

$$\left( \text{ITERATES} \left( \frac{\text{Motiv} \cdot a}{\sum(\text{Motiv} \cdot a)}, a, [1, 1, 1, 1, 1, 1], 20 \right) \right)_{21}$$

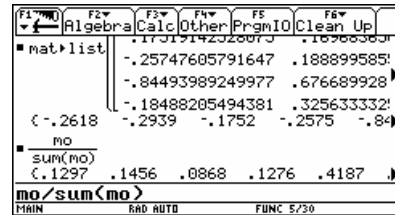
```
[0.1297271819, 0.1456148412, 0.08680682625, 0.1275784064, 0.4186644587, 0.09160828539]
```

Auch auf dem CAS-Rechner lassen sich die Eigenvektoren für größere Matrizen – ohne Umweg über die Bestimmung der Eigenwerte – finden:



Hinweis: Mit dem graphischen TR und Excel können die Matrizenoperationen durchgeführt werden. Die Eigenwerte und –vektoren kann man damit nicht finden.

Um die Normierung vornehmen zu können, muss die erste Spalte (der brauchbare Eigenvektor) in eine Liste konvertiert werden.



Wir lassen die vier Detektive die Vergleiche zwischen den Verdächtigen hinsichtlich der beiden anderen Kriterien anstellen und sehen nun die von ihnen aufgestellten Matrizen und berechnen anschließend auf eine der vorgestellten Arten die jeweils dominanten Vektoren:

$$\text{Gelegenheit} := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 3 & 8 & 5 & \frac{1}{8} \\ 4 & 1 & 9 & 9 & 6 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & 1 & 5 & \frac{1}{7} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & 7 & 8 & 1 & \frac{1}{6} \\ 9 & 2 & 6 & 9 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Profit} := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{9} & \frac{1}{7} & \frac{1}{4} \\ 6 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{9} & 1 & \frac{1}{3} \\ 4 & 7 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 4 \\ 9 & 9 & 3 & 1 & 7 & 8 \\ 7 & 1 & 5 & \frac{1}{7} & 1 & 6 \\ 3 & 3 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{6} & 1 \end{bmatrix}$$

Dom\_vec(Gelegenheit)

[0.1334946072, 0.2871976170, 0.03994007481, 0.01830037297, 0.09048927793, 0.4305780499]

Dom\_vec(Profit)

[0.02237547391, 0.06672618176, 0.1511818775, 0.4865026054, 0.2127299999, 0.06048386136]

**Aufgabe:** Bestätige die Ergebnisse mit Hilfe der Berechnung der Eigenvektoren.

Wenn wir die drei dominanten Vektoren betrachten, erkennen wir, dass sich für jedes Beurteilungskriterium eine andere Reihenfolge der Verdächtigen ergibt. Das Team der ermittel-

den Beamten muss eine weitere gemeinsame Beurteilung treffen: Welche Bedeutung (welches Gewicht) müssen sie den Kriterien *Motiv*, *Gelegenheit* und *Nutzen* beimessen? Sie bleiben bei der AHP-Methode und legen die folgende vergleichende Gewichtungsmatrix fest:

$$\text{Gewichtung} := \begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 \\ \frac{1}{5} & 1 & 4 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

*Aufgabe:* Versuche zu erklären, wie diese Matrix zustande kommt.

Diese Matrix führt zum dominanten Vektor

$$\text{Dom\_vec}(\text{Gewichtung}) = [0.7333845209, 0.1990699619, 0.06754551704]$$

Es ist klar, dass für diesen Fall *Motiv* und *Gelegenheit* die wichtigen Beurteilungskriterien sind. Das wird man bei einem Mord an einem Kind aus der Mittelschicht der Bevölkerung nicht anders erwarten. Das *Motiv* steht aber ganz deutlich an der Spitze. Wir müssen nun die Ergebnisse aller Verdächtigen für MNG mit der zugehörigen Gewichtung versehen und alle Werte addieren:

$$\begin{bmatrix} 0.1297259782 & 0.1334946071 & 0.0223754739 \\ 0.1456126901 & 0.2871976169 & 0.06672618175 \\ 0.08680762219 & 0.0399400748 & 0.1511818775 \\ 0.1275789495 & 0.01830037297 & 0.4865026054 \\ 0.418665799 & 0.09048927792 & 0.2127299999 \\ 0.09160896074 & 0.4305780498 & 0.06048386135 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.7333845209 \\ 0.1990699619 \\ 0.06754551704 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1232251536 \\ 0.1684695660 \\ 0.08182589366 \\ 0.1300685513 \\ 0.3394256713 \\ 0.1569851634 \end{bmatrix}$$

In der linken Matrix stehen die Werte für MNG zeilenweise für die Personen A bis F. Das Produkt liefert die Wertungen, die jetzt nur noch der Größe nach zu ordnen sind. In der 5. Zeile steht der größte, in der 3. Zeile der kleinste Wert. Damit wird E zum Hauptverdächtigen während auf C die geringsten Verdachtsmomente hinweisen. Das kleine Programm `MGN_Verd()` erzeugt gleich die geordnete Liste für uns:

$$\text{MGN\_Verd}(\text{Gewichtung}, \text{Motiv}, \text{Gelegenheit}, \text{Profit}) = \begin{bmatrix} 0.3394246880 & \text{E} \\ 0.1684714990 & \text{B} \\ 0.1569841259 & \text{F} \\ 0.1300679955 & \text{D} \\ 0.1232264953 & \text{A} \\ 0.08182519605 & \text{C} \end{bmatrix}$$



Nach weiteren Untersuchungen und Verhören stellte sich endgültig heraus, dass tatsächlich der damalige Teenager E den Mord begangen hatte. Er gestand, kam vor das Gericht und wurde verurteilt.

### **Anregungen für weiterführende Aufgaben**

1. Lies einen Kriminalroman, in dem der Täter/die Täterin erst am Ende der Geschichte entlarvt wird. Stelle die Hauptverdächtigen fest. Wende die AHP-Methode an, um den möglichen Täter zu finden. Vergleiche mit der tatsächlichen Lösung des Autors.
2. Verfolge mit einer Gruppe von Freunden eine Kriminalgeschichte im Fernsehen, bei der viele Verdachtsmomente deutlich gemacht werden. Alle Zuseher sollen vor Ende der Sendung den Raum verlassen, die Sendung wird aber bis zum Ende aufgezeichnet. Erzeuge mit deinem Team geeignete Matrizen zur Anwendung der AHP-Methode und lege damit einen Hauptverdächtigen fest. Vergleiche mit dem Ende des Films.
3. Die AHP-Methode kann in vielen Gebieten angewendet werden. Versuche, sie als Entscheidungshilfe für einen wichtigen Schritt in deinem Leben einzusetzen, wie zB: Wahl einer Ferienbeschäftigung, Wahl eines möglichen Studiums, Auswahl des Ziels für eine Ferienreise, ... Natürlich wirst du da andere Kriterien einsetzen als bei der Lösung eines Kriminalfalls.
4. Suche wichtige Erfolgskriterien für eine bestimmte Sportart. Reihe die Mannschaften der Liga in Bezug auf diese Kriterien mit der AHP-Methode. Wie verhalten sich deine theoretischen Ergebnisse zum Tabellenstand am Ende der Saison?

### **KOMMENTAR des CORONERS**

Die Aufgabe des Coroners endete in diesem Fall mit der Feststellung der Art der Tat – Mord – und der vermutlichen Todesursache – Schusswunde in der Brust. Die restliche Arbeit verblieb der Polizei. Die führte die Befragungen durch und sammelte die Beweise. Die Lösung von Kriminalfällen ist – ebenso wie die Anwendung von Medizin – keine Naturwissenschaft. Naturwissenschaftliche Methoden werden zur Sammlung von Beweisen angewendet, aus denen dann Schlüsse gezogen werden können. Es ist aber ganz selten so, dass die Ergebnisse ganz fest auf naturwissenschaftlichen Gesetzen oder auf unbezweifelbaren Tatsachen beruhen. Es bedarf immer tiefer Kenntnisse und großer Erfahrung der Ermittler. Die hier vorgestellte Methode zeigt einen möglichen Weg zur Organisation der Kenntnisse und „Gefühle aus dem Bauch“. Sie kann nur eine weitere Untersuchungsrichtung andeuten, aber keine unfehlbaren Tatsachen feststellen. Im vorliegenden Fall führte die Methode zu einer Schwerpunktsverlagerung der Untersuchung, die schließlich zum Geständnis des Täters führte.

## Knochenreste vom Bruderkrieg

### Wie Skelettreste zur Identifizierung führen können

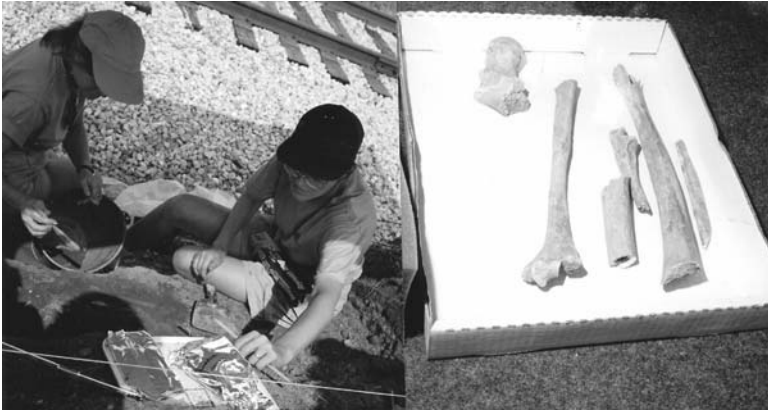


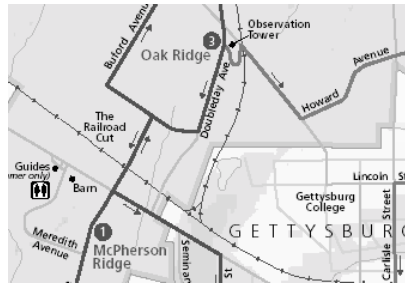
Bild links: Forensischer Anthropologe des Nationalparks an der Grabungsstätte

Bild rechts: Die, am 19. und 20. März 1999 am „Railroad Cut“ im Schlachtfeld von Gettysburg gefundenen Skelettreste

### WAS GESCHAH ...

Im März 1996 wanderte ein Besucher aus Oregon im Nationalpark Gettysburg (Ort der berühmten Schlacht im Bürgerkrieg zwischen den Nord- und Südstaaten) im nördlichen Randbereich des Parks, der unter dem Namen „Railroad Cut“ bekannt ist. Hier fand am Morgen des 1. Juli 1863 das erste schwere Gefecht der Schlacht statt. Der Tourist bemerkte Knochenreste im Verlauf des Cut und er verständigte den National Park Service in Gettysburg. Die Knochen wurden geborgen und nach Washington ins berühmte Smithsonian Institut gebracht, um dort von einem gerichtsmedizinischen Anthropologen untersucht zu werden. Sein Bericht war im August 1996 fertig und man verständigte die zuständige Behörde in Adams County, dem Bezirk, in dem sich der Nationalpark befindet. Da ich Coroner in Adams County war, wurde ich benachrichtigt. Wir begaben uns an die Fundstelle der Knochen. Nach dem Bericht des Sachverständigen handelte es sich um einen 20 – 25 Jahre alten Mann, der durch eine Kopfwunde getötet wurde. Die Wunde stammte von einem im Bürgerkrieg gebräuchlichen Gewehr. Die Knochen waren über 100 Jahre alt und stammen daher mit hoher Wahrscheinlichkeit von einem Soldaten, der an der berühmten Schlacht teilgenommen hatte.

In gegenseitigem Übereinkommen wurde die weitere Vorgangsweise der Parkverwaltung überlassen, die eine archäologische Grabung an der Stelle anordnete. Das Projekt wurde im September 1996 durch das *National Park Service*, das *Colorado Service Center Applied Archeology Center*, den *Gettysburg National Military Park* und den *GAI Consultants* von Monroeville in Pennsylvania ausgeführt.



Die Fundstelle und rechts das Gettysburg College,  
die Wirkungsstätte von Carl Leinbach

## Hintergrundinformationen

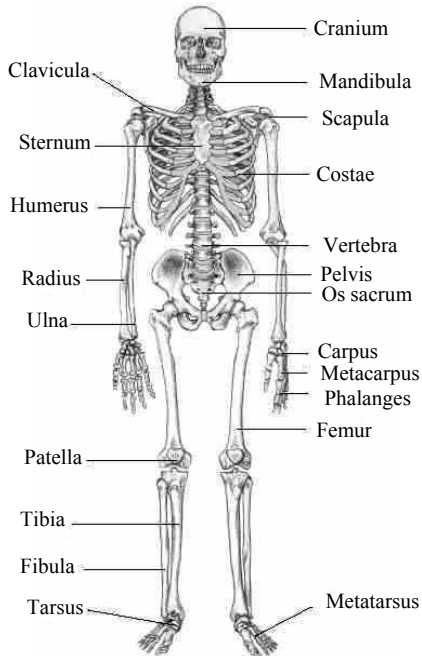
Manchmal, wenn der Coroner zu einem Geschehen gerufen wird, und im Besonderen dann, wenn damit ein vor langer Zeit verübtes Verbrechen verbunden ist, oder wenn vergrabene Körper gefunden werden, ist oft nur mehr ein Skelett übrig. Manchmal ist es noch schlimmer, wenn überhaupt nur noch Skelettreste vorhanden sind. Man könnte meinen, dass die Identifizierung der entdeckten Personen eine unmögliche Aufgabe darstellt. Doch mit Hilfe eines guten gerichtsmedizinischen Anthropologen ist es möglich, das ungefähre Alter, das Geschlecht, die rassische Zugehörigkeit und die ungefähre Statur der Person zu bestimmen. Diese Informationen reichen noch nicht zur Feststellung der Identität aus, aber sie können wertvolle Hinweise dafür sein. Ein bedeutender Teil dieser Informationen lässt sich auch aus Teilen des Skeletts, wie sie oben abgebildet sind, gewinnen.

Die folgenden Unterlagen sollen dir zeigen, wie Knochen einem kundigen Anthropologen verraten können von wem sie stammen. Wenn du in der glücklichen Lage bist, in deiner Schule ein „echtes“ Skelett zu haben, dann solltest du nach Studium des hier angebotenen Materials in der Lage sein, einige Merkmale der Person zum Zeitpunkt ihres Ablebens zu erkennen. Das Skelett ist „echt“, wenn es von einem echten Menschen stammt oder nach seinen Knochen genau nachgebildet wurde. Auch wenn du mit keinem derartigen Skelett arbeiten kannst, wirst du einige – nicht alle – Messungen und Beobachtungen an deinen Mitschülern vornehmen und dann deine Ergebnisse mit den mathematischen Werkzeugen, die die Anthropologen einsetzen, vergleichen können.

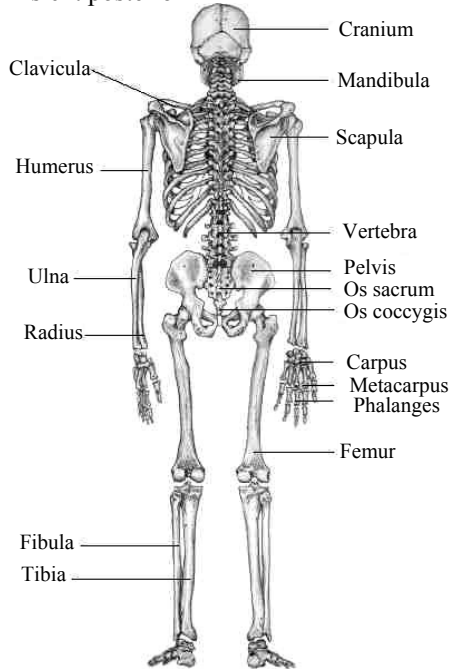
Zuerst müssen wir ein wenig über die Anatomie der Knochen lernen. Die nächste Abbildung zeigt zwei Ansichten eines Skeletts: eine Ansicht *anterior* (von vorne) und eine Ansicht *posterior* (von hinten). (Da die Sprache der Medizin weltweit das Latein ist, werden wir auch weitgehend die entsprechenden Fachausdrücke verwenden, um möglichst authentisch zu bleiben.) Die Knochen sind bezeichnet. Die Bilder stammen von der Internetseite der *Hillendale Elementary School* in Chadds Ford, Pennsylvania:

<http://hes.ucf.k12.pa.us/gclaypo/skelweb/skel04.html>

Ansicht anterior



Ansicht posterior



*Aufgabe:* Suche mit Hilfe eines Lexikons, eines Biologielehrbuchs oder über das Internet die deutschen Bezeichnungen der Knochen.

Die wichtigsten Knochen zur Bestimmung der Gestalt der Person sind Oberschenkel- und Oberarmknochen, sowie Schien- und Wadenbein. Du wirst die drei erstgenannten für dein Experiment verwenden.

Zur Festlegung des Geschlechts und der Abstammung spielen Schädel, Becken und Kreuzbein eine entscheidende Rolle.

Der Grad der Verknöcherung der Knorpelschicht an den Knochenenden kann helfen, das Alter der Person zum Zeitpunkt des Todes zu bestimmen.

#### *Die Schätzung des Alters zum Zeitpunkt des Todes*

Es ist vielleicht die schwierigste Aufgabe, dies mit einiger Genauigkeit durchführen zu können. Für einen erfahrenen Beobachter ist es relativ einfach, eine gute Schätzung zu erreichen, wenn der Mensch zum Zeitpunkt des Todes noch nicht voll ausgewachsen war. In Zahlen ausgedrückt heißt dies: von der Geburt bis zu den frühen Zwanzigerjahren. Der Grund dafür ist, dass die Knochen während dieser Zeit wachsen. Zwischen dem Knochenkopf und dem Knochenkopf der langen Knochen befinden sich Wachstumszentren. Das sind Stellen, die eine biochemische Reaktion zum Wachstum der Knochen anregen. Diese Enden sind von Knorpelschichten bedeckt, die zu so genannten Wachstumsplatten oder *epiphysis* gehören. Sie befinden sich am Schaftende der langen Knochen. Die Knorpelmasse produziert Substanzen, die das Wachstumszentrum aktiv halten und die dann in Knochenmasse umgewan-

delt werden. Obwohl dieser Vorgang während der ganzen Zeit des Heranwachsens anhält, ist er zwischen dem 17. und 20. Lebensjahr am aktivsten. So ist für Personen, die zum Zeitpunkt ihres Todes noch nicht erwachsen waren, die Menge der Knorpelmasse an den Enden der langen Knochen ein deutlicher Hinweis auf ihr Alter.

Für eine erwachsene Person ist die Altersbestimmung schwieriger. Die Ermittler können den Grad der Verschlechterung des Knochenbildes feststellen, aber das ist kein verlässliches Maß. Der Allgemeinzustand der Knochen wird beeinflusst von den Ernährungsgewohnheiten, dem Gewicht, dem Ausmaß und der Art der ausgeübten Tätigkeiten und der Gesundheit der Person, sowie von weiteren Faktoren. Am ehesten kann man noch ein Durchschnittsalter für alle solche Personen festlegen, bei denen das Ausmaß des Knochenschwunds ähnlich zu dem des gefundenen Skeletts ist.

Gerade auf diesem Gebiet, genauer das Alter von Toten auf Grund von Skelettresten festzustellen, werden nun von den forensischen Anthropologen große Anstrengungen unternommen. Es werden andere Skeletteile untersucht, wie zB das Darmbein und der Darmbeinkamm (das Darmbein ist ein Teil des Hüftbeins). Es gibt Fortschritte in der DNA-Analyse von Knochengewebe. Ein Zugang ist die Untersuchung der Länge von Aminosäurefolgen in bestimmten Abschnitten der DNA des Knochengewebes, die sich aus den Nukleotiden GAG zusammensetzen. Diese Folgen scheinen ein parabolisches Wachstumsmuster aufzuweisen, bei dem der Scheitel in den mittleren 40er-Jahren auftritt. Zur Zeit ist nur ein mathematisches Durchschnittsalter als Ergebnis zu erwarten.

Der Zahn eines Skeletts kann einen Hinweis auf das ungefähre Alter geben. Da die verschiedenen Zähne zu unterschiedlichen Lebenszeiten eines jungen Menschen das Gebiss vervollständigen, kann der Zustand des Gebisses eine ziemlich genaue Altersschätzung ermöglichen. Wenn in einem Schädel das komplette Gebiss erhalten ist, wird die genaue Beurteilung der Abnutzung der Zähne bzw. das Fehlen von Zähnen einen Hinweis auf das Alter der toten Person geben können.

Schlussbemerkung: Wenn du Zugang zu einem „echten“ Skelett hast, untersuche die Enden von Oberschenkel- und Oberarmknochen, bzw. Wadenbein auf Zeichen von Knorpelschichten. Sieh dir auch die Zähne an. Es ist in höchstem Maße unwahrscheinlich, dass du etwas Interessantes finden wirst, da die meisten echten Skelette von Erwachsenen stammen. Außerdem ersetzen die Hersteller der Skelette zumeist fehlende Zähne.

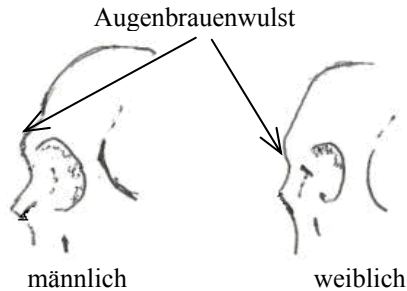
### *Die Bestimmung des Geschlechts*

Für die meisten Primaten ist die Bestimmung des Geschlechts ein binärer Prozess. Das einzelne Lebewesen war weiblich oder nicht. Die Antwort lautet JA oder NEIN, WAHR oder FALSCH usw. Einer der Vorteile davon ist, dass man im Gegensatz zu den vorher vorgenommenen quantitativen Beobachtungen zur Geschlechtsbestimmung eines Skeletts qualitative Beobachtungen heranziehen kann. Von besonderem Interesse sind dabei der Schädel

und das Becken. Wir werden aber auch den Oberschenkelknochen benutzen, wenn Schädel und Beckenknochen nicht verfügbar sind.

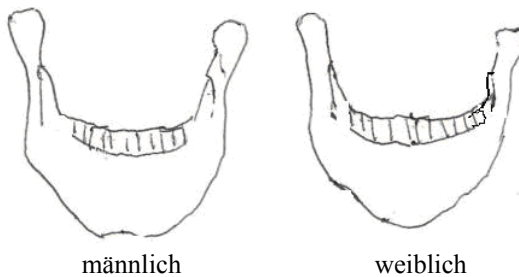
Beginnen wir mit dem Schädel. Da gibt es drei interessante Stellen: den Augenbrauenwulst, den Unterkieferknochen und die Basis des Hinterhaupts, die das Kleinhirn (*cerebellum*) beschützt.

Beginnen wir mit dem Vergleich der *lateralen* (seitlichen) Ansicht eines männlichen und weiblichen Schädels.



In der Skizze wurde etwas übertrieben, aber es ist tatsächlich so, dass der Augenbrauenwulst bei den Männern deutlicher ausgeprägt ist als bei den Frauen. Daher unterstützt ein relativ flacher Bereich über der Augenhöhle die Annahme, dass es sich um ein weibliches Skelett handelt. Hingegen deutet eine sichtliche Erhöhung auf einen Mann hin.

Als nächstes betrachten wir den Unterkiefer. Eine weibliche Kinnpartie ist wesentlich glatter und runder als eine männliche. Ein männlicher Unterkiefer ist im Allgemeinen deutlich eckiger.



Und schließlich weist auch das *occipitale* (hintere) Profil des Schädels einen Unterschied für Männer und Frauen auf. Wiederum erscheint das weibliche Profil (rechts) des unteren Hinterhauptschädels runder als das männliche (links).



Den deutlichsten Hinweis auf das Geschlecht des Skeletts gibt aber das Becken. Am Beginn der Pubertät beginnt das weibliche Becken seine Form zu ändern. Das ist auf neu produzierte Hormone zurückzuführen und bereitet das weibliche Becken darauf vor, in der Zukunft Kinder austragen zu können. Auch das männliche Skelett reagiert in dieser Zeit auf Änderungen im Hormonhaushalt. Das geht weitgehend im Gleichklang zwischen einer erhöhten Muskelmasse und den damit verbundenen gesteigerten auf das Skelett einwirkenden Kräften.

#### weibliches Becken



Vorderansicht

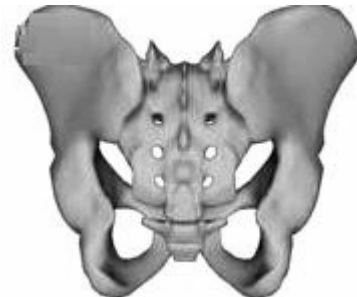


Hinteransicht

#### männliches Becken



Vorderansicht



Hinteransicht

Die Bilder stammen von der BBC-Internetseite

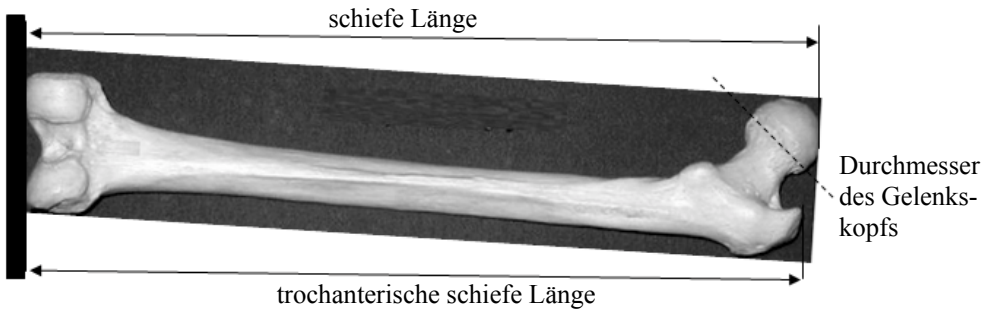
[http://www.bbc.co.uk/science/humanbody/body/factfiles/pelvis/female\\_pelvis.shtml](http://www.bbc.co.uk/science/humanbody/body/factfiles/pelvis/female_pelvis.shtml)

Die Bilder zeigen deutlich, dass das männliche Becken größer ist als das weibliche. Das weibliche Becken ist proportional flacher und weiter als das männliche. Es gibt aber noch andere, verlässlichere Hinweise: den Schambogen und das Kreuzbein. Beide ändern sich, wenn die Mädchen erwachsen werden, sodass der Geburtskanal angelegt werden kann.

Wenn wir die Vorderansicht der beiden Becken vergleichen, sieht man ganz deutlich, dass sich der weibliche Schambogen in einem wesentlich weiteren Winkel öffnet als der männliche. Es gilt die Faustregel, dass ein Winkel über  $90^\circ$  beim weiblichen Skelett auftritt. Kleinere Öffnungswinkel gehören zu männlichen. Manche Anatomielehrbücher machen die Trennung sogar schon bei  $70^\circ$ .

Ein zweiter Anzeiger des Geschlechts wird in der Rückansicht des Beckens deutlich gezeigt, das Kreuzbein (*os sacrum*). Das weibliche Kreuzbein ist breiter, kürzer und weniger geschwungen als das männliche. Dieser Umstand wird im nächsten Abschnitt sogar zahlenmäßig belegt durch ein bestimmtes Verhältnis, den *Sakralindex*.

Unser letzter Hinweis auf das Geschlecht ist der Oberschenkelknochen. Diesen größten Knochen des menschlichen Körpers legt man, wie in der Abbildung gezeigt, an ein Brett an und führt zwei Messungen sorgfältig durch:



Zwei Abmessungen sind für das Geschlecht maßgeblich: die trochanterische schiefe Länge und der Durchmesser des Kopfs. Dabei nimmt man an, dass es sich um eine bereits erwachsene Person handelt (also ohne epiphysis). (*Trochanterisch* benannt nach dem *Trochanter* = Rollhügel, Muskelansatz am Oberschenkelknochen.)

<b>Geschlecht</b>	<b>Troch. schiefe Länge</b>	<b>Kopfdurchmesser</b>
weiblich	< 390 mm	< 41,5 mm
männlich	> 450 mm	> 45,5 mm
unbestimmt	405 bis 430 mm	43,5 bis 44,5 mm

Du wirst feststellen, dass in der Tabelle Bereiche fehlen. Wenn Messungen in diese Intervalle fallen, dann lautet der Schluss „wahrscheinlich weiblich“ oder „wahrscheinlich männlich“.

#### *Die Bestimmung der rassischen Zugehörigkeit*

Wir beginnen wiederum mit dem Schädel. Er ist der genaueste Indikator für die rassische Zugehörigkeit. Wir wollen drei Rassen klassifizieren: europäische Herkunft, afrikanische Herkunft oder mongolische Herkunft, wobei die mongolische Rasse die Asiaten, die Indianer und alle Nichteuropäer bzw. Nichtafrikaner einschließen soll.

Die folgende Tabelle zeigt einige der am leichtesten festzustellenden unterschiedlichen Merkmale am Schädel der drei genannten Rassen.



### Unterschiede in den Schädelformen für die Menschenrassen

Eigenschaft	Europäisch	Afrikanisch	Mongolisch
Profil	gerade	betonter Kiefer	mittel
Schädellänge	groß	klein	mittel
Schädelbreite	schmal	schmal	breit
Gesichtslänge	groß	klein	groß
Gesichtsbreite	schmal	schmal	sehr breit
Nasenöffnung	schmal & hoch	weit & niedrig	schmal & hoch
Gaumenform	schmalere Keil	weit U-förmig	mäßig weit

So wie das Geschlecht sind auch die Merkmale, die sich auf die rassische Zugehörigkeit eines Skeletts beziehen, diskret. Daher ist es am besten, eine Tabelle für diese Merkmale zu benutzen und die zutreffenden Kästchen zu markieren. Danach lässt sich eine so genannte „informierte Entscheidung“ treffen.

Hier siehst du die Abbildung von drei Skelettschädeln, von denen jeder zu einer anderen Menschenrasse gehört. Kannst du sie mit Hilfe der angegebenen Tabelle ihren Rassen zuordnen?

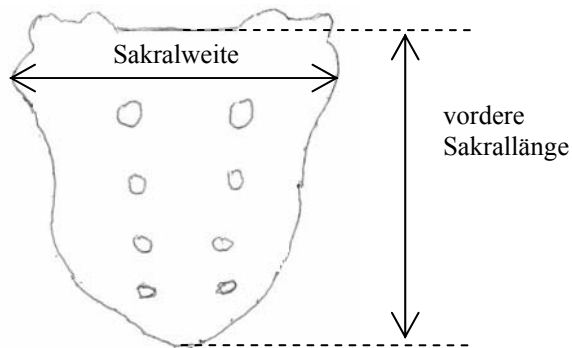


Ein weiterer Knochen von Bedeutung ist das Kreuzbein. Das ist eigentlich nicht ein Knochen, sondern drei zusammengewachsene Wirbelknochen. Es leitet seinen Namen von unseren Vorfahren her, die geglaubt haben, dass der Körper eine heilige Reise zum Land der Götter unternimmt. Wegen seiner Dicke und Größe hat es am längsten Bestand und so glaubten die Menschen früher, dass es heilig war und den Grundstein für einen neuen Körper des Verstorbenen bildete.

Wenn wir das Kreuzbein näher betrachten, dann werden zwei Abmessungen verwendet: seine Breite und seine vorne gemessene Länge. Da sich das Kreuzbein von der Hauptlinie des Rückgrats weg biegt, kann die Bestimmung dieser Länge schwierig werden. Man verwendet dazu am besten ein Maßband oder einen genau markierten Faden. Der Sakralindex wird mit der folgenden Formel berechnet:

$$\text{Sakralindex} = \frac{\text{Sakralbreite}}{\text{vordere Sakrallänge}} \times 100.$$

Eine grobe Skizze der Vorderansicht des Kreuzbeins zeigt die beiden Abmessungen.



In der nächsten Tabelle sind einige Durchschnittswerte für den Sakralindex zusammengefasst.

<b>Herkunft</b>	<b>weiblich</b>	<b>männlich</b>
europäisch	112,4	102,9
afrikanisch	103,6	91,4
japanisch	107,1	101,5

Diese Tabelle ist in mehrfacher Hinsicht sehr eingeschränkt, da sie nur drei Rassen beinhaltet, und von einer davon auch nur eine spezielle Untergruppe. Sie enthält auch nur Durchschnittswerte und keine Standardabweichungen. Dann könnten einzelnen Beobachtungen auch Wahrscheinlichkeiten zugemessen werden. Auf der anderen Seite ist es oft schon ausreichend, feststellen zu können, ob der oder die Tote von europäischer oder afrikanischer Herkunft ist.

Ein weiterer Anzeiger des Geschlechts ist der Oberschenkelknochen. Einerseits wird die Krümmung zwischen Vorderseite und Hinterseite und andererseits die Verwindung des Knochens zwischen dem Oberschenkelkopf und dem Knieansatz betrachtet.

<b>Eigenschaft</b>	<b>Europäisch</b>	<b>Afrikanisch</b>	<b>Mongolisch</b>
Krümmung	nach vorne gebogen	schwach	nach außen gekrümmt
Verwindung	verwunden	keine	stark verwunden

#### *Die Bestimmung der Statur des Toten*

Es gibt viele Methoden, die Größe der toten Person aus der Länge der verschiedenen langen Knochen oder aus Kombinationen von ihnen zu schätzen. Hier wollen wir nur eine dieser Methoden besprechen. Dabei wird die schiefe Länge des Oberschenkelknochens verwendet. Seine Länge korreliert nämlich am besten mit der Größe des ganzen Körpers.

Die Formel, die die forensischen Anthropologen benutzen, hängt von der rassischen Zugehörigkeit der Person ab. In den folgenden Formeln sind die Zahlen in cm gegeben.

Europäisch:	$2,32 \times$ schiefe Länge des Oberschenkelknochens + 65,53
Afrikanisch:	$2,10 \times$ schiefe Länge des Oberschenkelknochens + 72,22
Mongolisch:	$2,15 \times$ schiefe Länge des Oberschenkelknochens + 72,57

Die Schätzungen sind im Allgemeinen auf  $\pm 3$  cm genau.

Wie schon erwähnt, gibt es auch Schätzungen, die andere lange Knochen berücksichtigen. Am meisten verwendet werden noch Oberarmknochen und Schienbein, bzw. eine Kombination aus Oberschenkelknochen und Schienbein.

### Forensische Aufgaben

- Verstehen, wie eine sorgfältige Untersuchung helfen kann, wesentliche Kenntnisse über einen Toten zu gewinnen, auch wenn nur Skelettreste verfügbar sind. Diese Kenntnisse können bis zur genauen Identifizierung des/der Toten führen.
- Organisation einer sorgfältigen forensischen Bewertung von Beweismitteln in Form von Skelettresten

### Naturwissenschaftlich-mathematische Aufgaben

- Durchführung einer sorgfältigen wissenschaftlichen Beweissicherung
- Sorgfältige Erhebung und Analyse von Daten unter Verwendung der statistischen Werkzeuge, die dein CAS zur Verfügung stellt
- Testen von anerkannten Formeln aus der forensischen Anthropologie
- Einsatz der Regressionsanalyse, um eine Formel zu entwickeln, die die Größe einer Person aus der Länge des Oberschenkelknochens schätzen lässt

### Materialien

- Derive oder ein anders CAS, CAS-Rechner, Graphischer TR oder Excel, die eine lineare Regression durchführen lassen
- Am besten ein Maßband und wenn dies nicht verfügbar ist, ein Faden und ein Maßstab

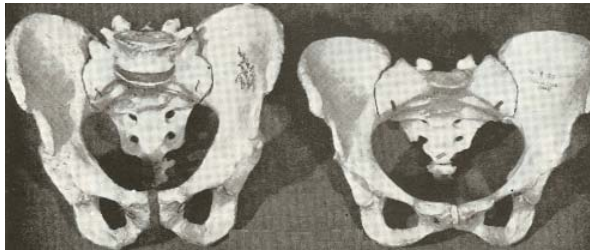
### Experiment 1 – wenn ein „echtes“ Skelett verfügbar ist

1. Stelle mit Hilfe eines Tabellenkalkulations- oder Textverarbeitungsprogramms eine Übersicht für alle im vorliegenden Text besprochenen Eigenschaften zusammen, die das Geschlecht, die Größe und die rassische Zugehörigkeit enthält. Die Tabelle soll dem anatomischen Sinn Rechnung tragen. Zeige die Tabelle deinem Lehrer /deiner Lehrerin bevor du weiter arbeitest.
2. Erfasse mit der erarbeiteten Tabelle deine Beobachtungen und Abmessungen.

3. Falls notwendig führe auch die entsprechenden Berechnungen durch.
4. Ergänze deine Aufzeichnungen um eine weitere Spalte und trage deine Schlussfolgerung aus den Untersuchungen ein.
5. Gib deinen Klassenkollegen und dem Lehrer/der Lehrerin einen abschließenden Bericht.

### **Experiment 2 – Fragen und eine eigene Untersuchung**

1. Betrachte das Bild des Oberschenkelknochens auf Seite 80. Versuche aus der Abbildung auf die rassische Zugehörigkeit der Person zu schließen und begründe deine Vermutung.
2. Im Abschnitt über die Schätzung der Größe eines Verstorbenen wurde mit Abmessungen in cm gearbeitet. Bei der Bestimmung des Sakaralindex wurden aber keine Maßeinheiten genannt, warum nicht?
3. Ordne den folgenden Abbildungen von zwei Becken das Geschlecht zu. Begründe auch deine Entscheidungen.



4. In der Abbildung der drei Schädel auf Seite 81 ist einer offensichtlich männlich. Welcher ist es? Wie hast du das herausgefunden?

### ***Durchführung einer eigenen Untersuchung***

1. Suche einen Partner. Bitte deinen Partner aufrecht zu stehen. Du bist auf einer Seite des Partners und fixierst das Knie des dir zugewandten Beins. Dann drehst du das Bein auf deine Seite. Der Drehpunkt sollte dir eine genaue Schätzung der Lage des Oberschenkelknochenkopfs dieses Beins ermöglichen.
2. Dein Partner soll das Knie abbiegen und du kannst die Mitte der Kniescheibe lokalisieren.
3. Miss nun sorgfältig den Abstand vom Kopf des Oberschenkelknochens zu einer gedachten Linie, die parallel zum Fußboden durch die Mitte der Kniescheibe verläuft (in cm). Damit solltest du eine ordentliche Schätzung der Länge des Oberschenkelknochens erhalten, die festgehalten werden soll.
4. Miss und notiere auch die Körpergröße deines Partners in cm.

5. Dein Partner soll nun dieselben Messungen an dir vornehmen.
6. Verwendet nun beide die entsprechenden Formeln von Seite 83 und berechnet gegenseitig eure theoretischen Körpergrößen. Sind die errechneten Größen innerhalb der Toleranz von  $\pm 3$  cm? Wenn nicht, was könnte daran schuld sein?
7. Wenn alle Paare ihre Untersuchungen beendet haben, sammelt die Datenpaare und gebt zu jedem Paar (Knochenlänge, Körpergröße) auch die rassische Zugehörigkeit an.
8. Teilt die Daten nach den Rassen auf (falls möglich!). In einer Gruppe müssen mindestens 2 Datenpaare enthalten sein, um eine lineare Regression durchführen zu können. Warum?
9. Führt für jede Rasse eine lineare Regression durch (Knochenlänge = unabhängige Variable und Körpergröße = abhängige Variable). Vergleicht die Ergebnisse mit den Formeln auf Seite 83.
10. Zeichnet eure Regressionsgerade und die der forensischen Anthropologen in verschiedenen Farben. Zeichnet weiters einen  $\pm 3$ cm breiten Streifen um die Anthropologengerade (eventuell strichliert).
11. Liegt eure Regressionslinie im Bereich der gemessenen Knochenlängen innerhalb des Streifens? Was sagt das aus?

### KOMMENTAR des CORONERS

Wir lassen Pat Leinbach erzählen: Ich war öfters auch in andere Fälle involviert, in denen Skeletteile gefunden worden sind, aber dieser eine Fall hat wegen seiner historischen Bedeutung besonderes Aufsehen erregt. Am 2. Juni 1998 erschien in der Zeitung *Hanover Evening Sun* (Hanover, Pennsylvania) ein Artikel, der sich auf den Bericht der angesehenen *Smithsonian Institution* und auf die Untersuchungen von *John W. Busey*, einem Amateurhistoriker aus Virginia bezog. John W. Busey ist Spezialist in der Erforschung von Dienstlisten von Militäreinheiten des amerikanischen Bürgerkriegs. Der Artikel in der Zeitung wurde vom *Evening Sun* Reporter *T. W. Burger* verfasst. Das sind die zusammengefassten Ergebnisse:

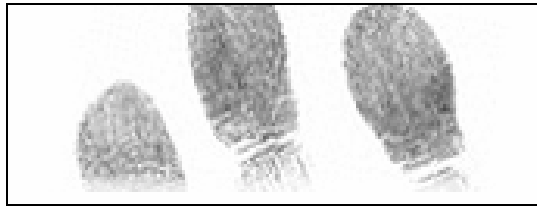
- Die Knochendichte, die geringen Verformungen durch Arthritis und das vollständig entwickelte Gebiss ergeben ein Alter von 20 bis 25 Jahren.
- Der Vergleich der Muskelmassen von rechtem und linkem Arm lassen auf einen Rechtshänder schließen (Bemerkung: Auf die Muskelmassen kann aus den Armknochen geschlossen werden).
- Er war höchstwahrscheinlich ein Bauer, da er gesund und kräftig war, und weil dies die meisten Amerikaner im 19. Jahrhundert waren.
- Er ist häufig geritten, was durch Reibspuren an den Beingelenken abzulesen war.

- Als Kind hat er an Feuchtblattern (Windpocken), Erkältungen und wahrscheinlich Mumps gelitten, was an Markierungen an den Zähnen erkennbar war.
- Die Ernährung des Mannes war gut, da man in den Knochen keinen Eisenmangel feststellen konnte. Seine Zähne zeigten keine Schäden, daher gab es keine nennenswerten Mengen an Zucker in seiner Nahrung. Das wiederum war ein Hinweis darauf, dass er aus keiner wohlhabenden Bevölkerungsschicht stammte, die sich Zucker leisten konnte – und damit für Zahnschäden sehr empfänglich war.
- Die Mitarbeiter des Smithsonian fanden Teilchen des Schädels und konnten mit einer Röntgenuntersuchung auch Bleiteilchen nachweisen. Das passte zum Bild der durch einen Gewehrschuss verursachten schweren Kopfverletzung.

Der Artikel berichtete weiters, dass nach J. W. Buseys Nachforschungen die 2. und 42. Mississippiinheit am Railroad Cut gekämpft haben. Besonders die 42. erlitt dort schwere Verluste im Gefecht. 5 oder 6 Bauern waren in dieser Einheit. Nach Meinung des Historikers stammen die Knochen von Jim Bond, einem damals 24-jährigen Bauern aus Jacinto, Mississippi. Allerdings gibt es dafür keinen eindeutigen Beweis.

## Stumme Zeugen: Fingerabdrücke

### Eine Einführung in die Daktyloskopie



#### WAS GESCHAH ...

Man ruft dich zu einem Unfall, in dem ein Fahrzeug verwickelt ist. Kurz vor dem Unfall hatte es zu regnen begonnen. Dann ist die Fahrbahn immer besonders rutschig. Der Wagen ist von der Fahrbahn geschlittert und gegen einen Mast geprallt. Das einzige Unfallopfer ist der Lenker des Fahrzeugs. Er erlitt schwere Kopfverletzungen, da er durch die Windschutzscheibe geschleudert worden ist. Sein Gesicht ist so schwer verletzt, dass eine Identifizierung durch eine Fotografie unmöglich ist. Weder an seiner Person noch am Fahrzeug kann etwas gefunden werden, das der Identifizierung des Opfers dienlich ist. Es gibt Hinweise darauf, dass es Mitfahrer gegeben haben muss. Diese sind aber unauffindbar. Nach Untersuchung des Opfers, stellst du fest, dass es am Unfallort verstorben ist und du kannst mit deinen Ermittlungen beginnen. Deine Aufgabe besteht auch darin, den Toten zu identifizieren und dann die Angehörigen zu benachrichtigen. Da du keinen anderen Hinweis auf die Identität des Opfers hast, beschließt du, dass im Leichenschauhaus Fingerabdrücke des Opfers abgenommen werden sollen. Diese werden dann zum Vergleich zur Datenbank der Fingerabdrücke geschickt. Möglicherweise findet sich dort ein passendes Vergleichsmaterial. Es stellt sich heraus, dass das Opfer beim Grenzübertritt um eine Arbeitsbewilligung angesucht hatte, und bei dieser Gelegenheit seine Fingerabdrücke genommen wurden. Diese kamen dann in die Datenbank. So kann eine positive Identifizierung vorgenommen werden. Du wirst über die Identität des Unfallopfers und die Anschrift seines Arbeitgebers verständigt. In weiterer Folge kannst du die Angehörigen des Unfallopfers in seinem Heimatland über den traurigen Vorfall informieren.

#### Hintergrundinformationen

In den Vereinigten Staaten wurden Fingerabdrücke zum ersten Mal 1901 von der New Yorker Zivildienstkommission zur Identifizierung aller ihrer Angestellten eingesetzt. Die Abdrücke wurden klassifiziert und zentral gespeichert. Das geschah vier Jahre nachdem in England Scotland Yard die Abnahme von Fingerabdrücken zur Identifizierung von Kriminaltätern und bei kriminologischen Ermittlungen eingeführt hatte. Dem waren Jahre vorausgegangen, in denen sich Sir Francis Galton, ein Halb Cousin von Charles Darwin, für den Einsatz der Fingerabdrücke eingesetzt hatte. (Galton war ein „*polymath*“, „*anthropologist*“, „*eugeni-*

cist“, tropical „explorer“, „geographer“, „inventor“, „meteorologist“, proto-„geneticist“, „psychometrician“ und „statistician“.)

*Aufgabe:* Suche im englischsprachigen Wikipedia (<http://en.wikipedia.org>) unter den oben unterstrichenen Suchbegriffen nach Galton und versuche auch eine adäquate deutsche Übersetzung der verschiedenen Tätigkeiten, die Galton ausübte, zu geben. Verwende parallel dazu auch das deutschsprachige Wikipedia oder andere Suchmaschinen.

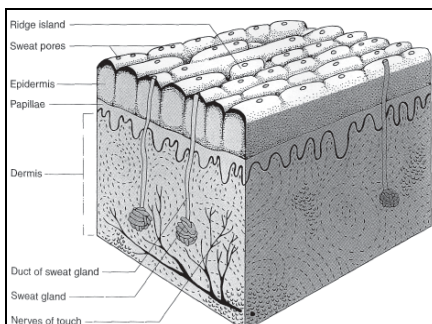
Vor 1896 verwendete man ein System von detaillierten Abmessungen von bestimmten physikalischen Merkmalen zur Identifizierung einer Person. Man verlor das Vertrauen in dieses alte System, als zwei Häftlinge des Bundesgefängnisses in Fort Leavenworth, Kansas, obwohl nicht verwandt, neben ähnlichem Namen und äußerer Erscheinung auch gleiche physikalische Abmessungen aufwiesen. Ihre Fingerabdrücke allerdings waren verschieden.

Fingerabdrücke sind eigentlich Reibungsleisten (Papillarlinien), die sich auf der Haut von Händen und Füßen der Menschen entwickeln. Sie sind angeboren und ändern sich mit zunehmendem Alter nicht. Sie entwickeln sich bereits im menschlichen Fötus, wenn sich die Hautpapillen entwickeln. Es gab Personen, die versucht haben, ihre Fingerabdrücke zu ändern, indem sie äußerst schmerzhaft die Fingerkuppen mit einem Messer entfernten oder wie es der berühmte amerikanische Gangster der 30er Jahre, John Dillinger, tat, die Fingerkuppen mit Säure verätzten. Alles vergeblich, das Muster der Rillen blieb erhalten. Im Fall von Dillinger stimmten die Fingerabdrücke, die ihm nach seiner Ermordung im Leichenschauhaus abgenommen wurden, mit jenen, die ihm viel früher während eines Gefängnisaufenthalts abgenommen wurden, überein.

Bemerkung: Obwohl auch bei einem Neugeborenen die Fingerabdrücke bereits voll entwickelt sind, werden zur Identifizierung der Babys die Fußabdrücke genommen, weil das eben einfacher geht.

Die nächste Abbildung stammt von der Internetseite des *New Mexico Department of Health*:

[http://dhi.health.state.nm.us/elibrary/cchspmanual/fingerprint\\_manual.pdf](http://dhi.health.state.nm.us/elibrary/cchspmanual/fingerprint_manual.pdf)



Die Fachausdrücke von oben nach unten:

Leisteninsel  
Schweißporen  
Epidermis (Oberhaut)  
Papillen (Warzen)  
Dermis (Lederhaut)  
Schweißdrüsengang  
Schweißdrüse  
Nerven für den Tastsinn

Die Kernaussage ist, dass auch dann, wenn wir uns in den Finger schneiden, oder sonst die Haut beschädigen, das bestehende Muster der Leisten sich nie ändert.



(Die Fingerabdrücke gehören zu dem nach dem französischen Kriminalisten *Dr. Alphonse Bertillon* auch Bertillon-System benannte Verfahren, das – hauptsächlich zu kriminalistischen Zwecken – der Identifizierung einer Person dient.)

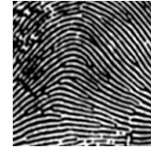
Der erste Schritt in der *Daktyloskopie* (aus dem Griechischen: *daktylos* = Finger, *skopein* = = schauen) liegt darin, die üblichen Muster, die die Leisten bilden, zu erkennen. Die folgenden Abbildungen bilden die Grundlage und die Muster sind deutlich erkenn- und unterscheidbar.



Schleife



Wirbel



Bogen

60% aller Abdrücke sind Schleifen, 35% Wirbel und die restlichen 5% treten als Bögen auf. Aber sogar auf dieser Betrachtungsebene ist das Leben nicht so einfach. Es gibt zwei Arten von Bögen: den oben abgebildeten einfachen Bogen und den Tannenbogen. Es gibt auch zwei Arten von Schleifen: die Ulnarschleife, die zum kleinen Finger zeigt, und die Radialschleife, die zum Daumen zeigt. Manchmal werden diese auch als rechte und linke Schleife bezeichnet. Am unterschiedlichsten stellen sich die Wirbel heraus, von denen es vier Arten gibt. Den einfachen Wirbel (Bild oben), die Zentraltasche (sieht aus wie eine Schleife, hat aber einen kleinen Wirbel im Zentrum), die Zwillingsschleife (eine Radialschleife verflochten mit einer Ulnarschleife), und einen Zufallswirbel (eine Kombination von zwei oder mehreren Mustern oder ein anderes nicht klassifiziertes Muster). Ein Prozent aller Fingerabdrücke sind Zufallswirbel.



Tannenbogen



Ulnarschleife



Zwillingsschleife



Zentraltasche



Zufallswirbel

Die beiden linken Bilder und die drei oben gezeigten konnte ich in der Dissertation von *Sharat S. Chikkerur* finden:

<http://web.mit.edu/sharat/www/research/thesis.pdf>

Die restlichen drei Bilder stammen wiederum von der schon oben zitierten Internetseite des New Mexico Department of Health.

Daher lassen sich die Abdrücke in acht Klassen einteilen. *Sir Edward Richard Henry* schlug 1897 ein System zur Aufzeichnung aller 10 Fingerabdrücke einer Person vor, um die Suche

in einer Datenbank von Fingerabdrücken zu vereinfachen. Das FBI hat seine Methode weiter verfeinert und sie wird heute von den meisten Polizeiorganisationen verwendet.

Das vollständige FBI-System ist etwas kompliziert, aber es beginnt mit einem „Hauptklassifikationssystem“, das einfach erklärt werden kann. Dieses System bildet die Basis für deine späteren Aufgaben.

Das System bezieht sich auf die zehn Finger eines Durchschnittsmenschen und erzeugt die folgenden „Brüche“:

$$\begin{array}{ccccc} \frac{\text{re Zeigef.}}{\text{re Daumen}} & \frac{\text{re Ringf.}}{\text{re Mittelf.}} & \frac{\text{li Daumen}}{\text{re kleiner F.}} & \frac{\text{li Mittelf.}}{\text{li Zeigef.}} & \frac{\text{li kleiner F.}}{\text{li Ringf.}} \end{array}$$

Die Hauptklassifizierung beruht auf der Existenz eines Wirbels in jedem der Brüche. Wenn der erste Bruch einen Wirbel im Zähler- oder Nennerfinger aufweist, dann erhält der entsprechende Teil des Bruchs den Wert 16 zugewiesen. Im zweiten Bruch wird dem Finger mit einem Wirbel der Wert 8 zugeteilt, im dritten Bruch der Wert 4, im nächsten der Wert 2 und im letzten der Wert 1.

Alle Zähler werden addiert und die Summe um 1 vermehrt. Das Gleiche wird mit den Nennernzahlen durchgeführt. Wenn zB der rechte Ringfinger und der linke Zeigefinger einen Wirbel zeigen, dann sieht die einfache Rechnung so aus:

$$\frac{0+8+0+0+0+1}{0+0+0+2+0+1} = \frac{9}{3}$$

Der so entstandene Bruch wird **nicht** gekürzt.

Etwa ein Viertel aller Ergebnisse fallen in die  $\frac{1}{1}$ -Kategorie, d.h., dass auf allen 10 Fingern nur Schleifen oder Bögen vorkommen.

Zusätzlich zu dieser ersten Klassifikation gibt es weitere Auffälligkeiten der Abdrücke. Sie beziehen sich auf die individuellen Papillarlinien selbst. Diese Charakteristika werden als *Minutien* bezeichnet. Sie beschreiben besondere Unterbrechungen und Verzweigungen der Papillarlinien.

Hier werden die elf häufigsten Arten von Minutien abgebildet:



*Ridge Dot*  
Punkt



*Bifurcation*  
Verzweigung



*Double Bif.*  
doppelte V.



*Opposed Bif.*  
gegenüberl. V.



*Trifurcation*  
dreif. Verzw.



*Ridge Ending*  
Ende/Anfang



*Ridge Crossing*  
Kreuzung



*Lakes*  
Öse



*Islands*  
Strich/Insel



*Hooks*  
Haken



*Bridges*  
Brücke

Diese Abbildungen und ihre Bezeichnungen findet man auf:

[www.virtualsciencefair.org/2004/fren4j0/public\\_html/ridge\\_characteristics.htm](http://www.virtualsciencefair.org/2004/fren4j0/public_html/ridge_characteristics.htm).

Wenn man nun den Abdruck eines jeden Fingers einer Person in vier Quadranten teilt und man die Anzahl der auftretenden Minutien mit den oben angeführten Mustern zählt, ergibt das zusammen mit der zuerst durchgeführten Klassifizierung über die Wirbel eine große Anzahl von Möglichkeiten für die Unterscheidung der Fingerabdrücke von Personen.

### Forensische Aufgaben

- Die Natur von Fingerabdrücken verstehen
- Durchführung der Hauptklassifizierung von Fingerabdrücken
- Das FBI-Verfahren zur Klassifizierung anwenden können
- Die Minutien-Muster der Fingerabdrücke verstehen

### Mathematisch-naturwissenschaftliche Aufgaben

- Mit dem Computer die Anzahl der möglichen Fingerabdruckmuster mit Hilfe der hier vorliegenden Informationen berechnen
- Wahrscheinlichkeitsverteilungen verstehen und Wahrscheinlichkeiten berechnen
- Zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen vergleichen
- Den Wert des Einsatzes eines CAS zur Durchführung von Berechnungen mit sehr großen ganzen Zahlen erkennen

### Materialien

- Ein CAS, das im *Exact-Modus* rechnen kann
- Option 1: Besuche eine Polizeistation in der Nähe und bitte, dass deine Fingerabdrücke abgenommen werden. Ersuche um eine Kopie der Fingerabdrücke. (In den USA werden diese Abdrücke dann in einer zentralen Datenbank gespeichert).
- Option 2: a) Ein Stempelkissen  
b) Eine Karteikarte zur Aufnahme von 5 Spalten und zwei Zeilen (je eine Zeile für die Abdrücke der Finger der rechten und eine für die Abdrücke der linken Hand)  
c) Mittel zum Reinigen der Hände
- Option 3: a) Einen gespitzten weichen Graphitbleistift  
b) Ein Blatt Papier (5 cm × 5 cm ist groß genug)  
c) Eine Karteikarte wie oben in b) beschrieben  
d) Mittel zum Reinigen der Hände
- Ein gutes Vergrößerungsglas (Lupe)
- Ein Computer zum Aufzeichnen und Abzählen der Daten, sowie zur Durchführung der entsprechenden statistischen Analyse

## Aufgaben, die sich auf die Hintergrundinformationen beziehen

1. Bestätige mit Hilfe der in diesem Abschnitt angegebenen Verteilung der Fingerabdrücke, dass 25% Abdrücke nach dem FBI-Hauptsystem in die  $\frac{1}{4}$ -Kategorie fallen.
2. Wie viele verschiedene Kategorien gibt es nach dem FBI-Hauptsystem?  
Hinweis: Denke binär!
3. Nimm an, dass jeder Fingerabdruck in vier Quadranten geteilt wird und dass jeder Minutientypus höchstens einmal in jedem Quadrant auftreten kann. Wie viele verschiedenen Klassifikationen nach Minutien gibt es für jeden Quadrant? Wie viele für alle vier Quadranten? Wie viele, wenn du alle 10 Finger berücksichtigst?  
Hinweis: Ziehe das Vorkommen oder Nichtvorkommen eines Typus im Quadrant in Betracht. (Diese Annahme stimmt mit der Realität nicht überein, aber sie macht das Problem einfacher).
4. Verbinde die Ergebnisse aus Aufgabe 2 und 3 und berechne die Anzahl der möglichen verschiedenen Fingerabdrücke nach deinem – stark vereinfachten – Modell. Vergleiche die Zahl mit der Bevölkerungszahl der größten Stadt deines Landes, deines ganzen Landes, deines Kontinents und schließlich der ganzen Welt.
5. Bist du überzeugt davon, dass jede Person einen einzigartigen Satz von Fingerabdrücken hat und dass sie daher danach auch identifiziert werden kann? Formuliere deine Begründung für deine Antwort.
6. Zu diesem Thema gibt es viel Material im Internet. Gehe auf Internetrecherche.

## Experiment

Die Schüler bilden Gruppen zu zwei Personen. Abhängig von der gewählten Option sind die folgenden Vorbereitungen zu treffen:

### Für Option 1:

1. Hole deine Fingerabdrücke vom Lehrer. Sei vorsichtig, verwische oder verschmutze die Abdrücke nicht.

### Für Option 2: Jedes Team braucht 2 Karteikarten und ein Stempelkissen

1. Stelle deine persönliche Fingerabdruckkarte wie oben beschrieben her. Schreibe deinen Namen auf die Rückseite der Karte.
2. Überprüfe, ob sich die Stempelfarbe vom Stempelkissen auf deine Fingerspitzen überträgt. Wasche danach deine Hände.
3. Teammitglied #1 übernimmt die Rolle des Ermittlers, der die Abdrücke von seinem Partner (Mitglied #2) abnimmt. Mitglied #2 streckt der Reihe nach alle Finger aus und #1 rollt die erste Fingerspitze von #2 mit der Seite links vom Fingernagel beginnend über das Stempelkissen. Dabei ist wichtig, dass die ganze Fingerspitze erfasst wird.

4. #1 rollt nun den Abdruck der Fingerspitze in das entsprechende Feld der Karteikarte von #2. Die überschüssige Stempelfarbe wird vom bereits „behandelten“ Finger weggewischt.
5. #1 überträgt auch die weiteren 9 Fingerabdrücke von #2 auf die Karte.
6. #2 wird sich die Hände reinigen.
7. Tausche die Rollen im Team und beginne neuerlich bei Schritt 3.

**Für Option 3:** Jedes Team braucht 2 Karteikarten, ein Stück dünnes weißes Papier und einen gespitzten weichen Graphitstift.

1. Stelle deine persönliche Fingerabdruckkarte wie oben beschrieben her. Schreibe deinen Namen auf die Rückseite der Karte.
2. Schwärze mit dem seitlich gedrehten Graphitstift eine Fläche auf dem weißen Papier, die groß genug ist, dass man eine Fingerspitze vollständig auf ihr abrollen kann. Das wird nun zu deinem „Stempelkissen“.
3. Überprüfe, ob sich die „Stempelfarbe“ vom Papier auf deine Fingerspitzen überträgt. Wasche danach deine Hände.
4. Teammitglied #1 übernimmt die Rolle des Ermittlers, der die Abdrücke von seinem Partner (Mitglied #2) abnimmt. Mitglied #2 streckt der Reihe nach alle Finger aus und #1 rollt die erste Fingerspitze von #2 mit der Seite links vom Fingernagel beginnend über das Stempelkissen. Dabei ist wichtig, dass die ganze Fingerspitze erfasst wird.
5. #1 rollt nun den Abdruck der Fingerspitze in das entsprechende Feld der Karteikarte von #2. Wische nachher den bereits „behandelten“ Finger ab.
6. #1 überträgt auch die weiteren 9 Fingerabdrücke von #2 auf die Karte.
7. #2 wird sich die Hände reinigen.
8. Tausche die Rollen im Team und beginne neuerlich bei Schritt 4.

### **Klassifiziere den Fingerabdruck**

1. Lasse deinen Lehrer die Karte mit den Abdrücken zum Weiterarbeiten genehmigen.
2. Untersuche mit deinem Partner mit Hilfe der Lupe jeden Fingerabdruck und klassifiziere ihn als Bogen, Schleife oder Wirbel. Schreibe aber nichts auf die Karte.
3. Gib die Fingerbezeichnung und seine Klassifizierung in eine Tabellenkalkulation oder in ein Textdokument in deinen Computer oder in deinen Taschenrechner ein.
4. Klassifiziere deine Fingerabdrücke nach dem FBI-Hauptsystem.
5. Übergib deine Aufzeichnungen deinem Lehrer oder dem dafür verantwortlichen Mitschüler, der eine Zusammenstellung aller unterschiedlichen Typen von Fingerabdrücken in der Klasse vornehmen wird. Erzeugt ein Diagramm (zB ein Tortendiagramm) zur Darstellung der Verteilung der Typen.

6. Wie sieht die Verteilung in deiner Klasse aus, verglichen mit der in den Hintergrundinformationen gegebenen globalen Verteilung?
7. Bitte deinen Lehrer, dass er alle Karteikarten mit den Fingerabdrücken photokopiert und dann jedem von euch die Kopien zur Verfügung stellt.
8. Wie viele verschiedene FBI-Hauptklassen gibt es in dieser Sammlung? Wie viele gehören in die  $\frac{1}{1}$ -Kategorie?
9. Du und dein Partner erzeugen eine Datei und speichern die Karten für jede Kategorie, die in deiner Klasse auftritt.

### Identifiziere den „Täter“

1. Dein Lehrer berichtet, dass in der letzten Nacht jemand in der Klasse gewesen ist, der seinen Fingerabdruck auf der Tafel hinterlassen hat. Der Lehrer hatte vorher eine Karte aus der Sammlung von Fingerabdruckkarten der Klasse herausgenommen und beschreibt nun das Muster eines jeden Fingers.
2. Berechne die FBI-Hauptklassifizierung nach der Beschreibung des Lehrers.
3. Verwende nun die oben in Pkt 9. erzeugte Datei und entscheide, ob es mehr als nur einen Verdächtigen nach der Hauptklassifikation gibt.
4. Wenn dies der Fall ist, dann betrachte die Unterschiede in den Abdrücken innerhalb dieser Klasse. Versuche für jeden Satz von Fingerabdrücken charakteristische Einzelheiten zu erkennen, die zu den Verdächtigen gehören.
5. Stelle eine Liste von höchstens 10 Fragen zusammen, die sich auf die von dir erkannten Unterschiede beziehen und bitte den Lehrer um die Antworten.
6. Kannst du nun, unterstützt von diesen Antworten, den „Täter“ oder die „Täterin“ identifizieren?

### KOMMENTAR des CORONERS

Im Allgemeinen ist es nicht notwendig, von Toten Fingerabdrücke zu nehmen. In den meisten Fällen gibt es Zeugen, die den Toten kennen. Damit beginnt die Identifizierung. Die tote Person kann einige Hinweise auf ihre Identität mit sich tragen. Es ist möglich, ein Fahrzeug über seine Registrierung zum Händler zurück zu verfolgen. Das Fahrzeug wird identifiziert durch Familienmitglieder, Arbeitskollegen oder Freunde. Außergewöhnliche körperliche Merkmale oder zB Tätowierungen erleichtern die Identifizierung. Trotzdem verhelfen Fingerabdrücke, sofern sie in einer Datenbank vorhanden sind, zu einer positiven Identifizierung.

In den USA werden von allen Personen, die in den Militär-, Polizei- oder Zivildienst eintreten Fingerabdrücke genommen. Alle Häftlinge in Bundes- oder Staatsgefängnissen geben ihre Fingerabdrücke ab. Im Falle des Todes einer dieser Personen werden die Abdrücke des Leichnams mit den gespeicherten Abdrücken zur eindeutigen Identifizierung verglichen.

## Ein GPS – nicht nur für das Auto!

### Die Mathematik des GPS



#### WAS GESCHAH ...

Zwei Wanderer sind schon fünf Tage auf dem Appalachian Trail unterwegs. Morgen wollen sie das Ziel ihrer Wanderung erreichen und dann von ihren Ferientagen in der unberührten Natur nach Hause zurückkehren. Sie haben eine wunderbare Woche in den Wäldern verlebt, die ihre ganze Herbstpracht zeigen konnten. Dadurch sind derartige Wanderungen so ganz anders wie im Sommer. Zum letzten Mal bauen sie ihr Zelt auf und bereiten ein einfaches Abendessen. Von einem nahe gelegenen Hügel wollen sie den Sonnenuntergang erleben. Auf dem kurzen Weg dorthin nimmt der idyllische Tag ein jähes Ende. Sie finden im Wald in der Nähe ihres Zeltplatzes mehrere Knochen, die von Menschen zu stammen scheinen. Das Skelett ist unvollständig erhalten. Es dürfte sich um Knochen von Beinen und Rippen handeln.

Die entsetzten Wanderer wollen sofort die für diese Gegend zuständige Notrufzentrale verständigen. Sie haben ein Mobiltelefon und ein Taschen-GPS (Global Positioning System) mit sich. Sie rufen die Nummer 911 um ihre Entdeckung zu melden und geben die GPS-Daten der Fundstelle der Knochen durch. In der Notrufzentrale kann man auf einer Landkarte die Position des Zelts der Wanderer bestimmen. Die Polizei wird benachrichtigt. In diesem Fall muss keinerlei medizinisches Personal zum Fundort. Du als Coroner wirst verständigt, da es sich bei dem Fund offensichtlich um Reste eines Leichnams handelt.

Du rufst deinen Assistenten an, er soll dich zur Fundstelle begleiten. Du ziehst dich warm an, schnürst deine Wanderschuhe, packst eine Taschenlampe und dein kriminalistisches Instrumentenkästchen ein und fährst zum nächstgelegenen Zugangspunkt der Wanderroute. Nach der Ankunft des Assistenten begeben ihr euch gemeinsam zur Stelle, an der die Knochen gefunden worden sind. Eine kurze Untersuchung zeigt, dass es sich nicht um menschliche Gebeine handeln kann. Sie scheinen von einem Reh zu stammen, das irgendwo in den Wäldern umgekommen ist. An einigen Stellen sind deutlich Zahnsuren zu erkennen. Aasfresser hatten sich offensichtlich am Kadaver gütlich getan und die Knochen waren wahrscheinlich verstreut worden, als sie zu „privaten Mahlzeiten“ weggeschleppt worden waren.

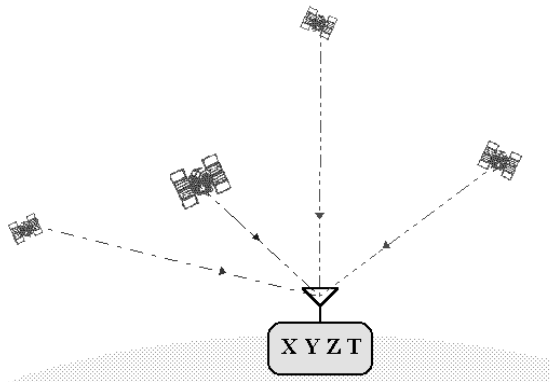
## Hintergrundinformationen

Der Einsatz eines GPS in der oben beschriebenen Begebenheit war sehr wichtig, denn nur mit seiner Hilfe war es dem Einsatzleiter der Notrufzentrale möglich, die Position der Fundstelle rasch auf der Landkarte zu finden und dann sofort und erfolgreich die betroffenen Personen dorthin zu schicken. In diesem speziellen Fall war es zwar vergebliche Liebesmüh („wild goose chase“), aber in einem dringenden Notfall kann der Zeitgewinn entscheidend sein. Auch hier wurde ein langer Marsch durch den finsternen Wald deutlich verkürzt.

Zur Zeit sind zwei Arten von GPS (Global Positioning Systems) im Einsatz. Das erste ist ein zweidimensionales System. Es verwendet die Bandbreite und Zeitsignale von HD-TV-Signalen. Diese Signale können Gebäude und Gebiete durchdringen und so in Gegenden eingesetzt werden, in denen andere GPS nichts nützen. Sie liefern nur die geographische Länge und Breite. Daher finden sie vor allem dort Verwendung, wo die Höhe über dem Meeresspiegel relativ konstant ist.



Das andere System ist dreidimensional. Es erhält die Entfernungen von drei Satelliten mit bekannten Positionen und liefert geographische Länge, geographische Breite und die Höhe des empfangenden Geräts. Es wird daher dann eingesetzt, wenn größere Gebiete betroffen sind, in denen ein zweidimensionales System nicht ausreicht.



### Global Positioning System

Messungen der Ankunftszeiten von zumindest 4 Satelliten ermöglichen die Schätzung der Position in drei Dimensionen und der GPS-Zeit.



Beide Systeme haben sowohl Vor- als auch Nachteile. 2D-Systeme können Gebäude durchdringen und Koordinaten ermitteln, aber sie können keine Höhen feststellen. 3D-Systeme liefern alle drei Ortskoordinaten, aber das Empfangsgerät muss „freie Sicht“ haben.

Die Grundbausteine eines GPS sind:

- Ein vorher festgelegtes Koordinatensystem
- Stationen (TV-Sender oder Satelliten), deren genaue Positionen in diesem Koordinatensystem bekannt sind. Diese Stationen müssen ihre Positionen durch Senden von Signalen übertragen können
- Ein Taktgebermechanismus für die Zeitmessung, der mit dem Signal verbunden ist
- Ein Gerät, das Signale von verschiedenen Stationen empfangen und aus diesen entweder rasch die Entfernungen zu den Sendern berechnen oder die empfangenen Informationen zu einer Zentralstelle, die diese Berechnungen durchführt, weitergeben kann.

Wir haben bis jetzt noch kein Wort über die Landkarten oder über die Orientierung, die auf diesen Berechnungen beruhen, gesagt. Jetzt besprechen wir das „Ortsbestimmungssystem“. Wenn wir die Hintergründe besprechen werden, wird auch einiges an interessanter Mathematik auftreten.

### Das zweidimensionale GPS

In den Vereinigten Staaten und in einigen anderen Ländern wird das 2D-GPS benutzt, um die Ortsveränderungen von Gefangenen zu beobachten, die unter strengen Auflagen ihre Strafe zu Hause absitzen dürfen. Du hast sicherlich schon von der „elektronischen Fußfessel“ gehört. Man verwendet dieses System auch, um Kinder mit einem GPS in Arm- oder Fußbändern auszustatten. Das hat schon oft geholfen, vermisste Kinder wieder zu finden und damit sehr wahrscheinlich auch manchmal deren Leben zu retten.

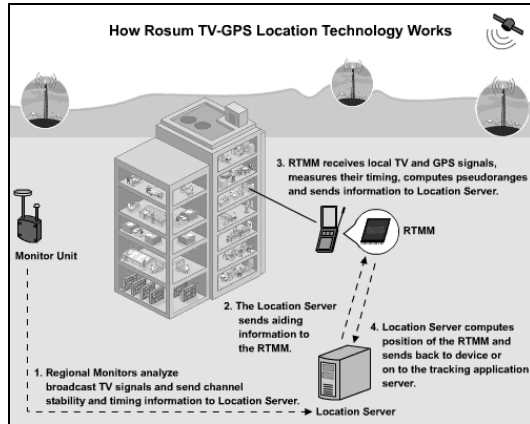
Im Grunde basiert ein GPS auf nichts anderem als auf einer Triangulierung, die du sicherlich als Anwendung der Trigonometrie kennst, wenn du an Vermessungsaufgaben denkst. Eine Empfangsstation empfängt Signale von drei Sendern, deren Lage genau bekannt ist. Diese haben eine genaue, untereinander abgestimmte Zeitmessung. Sie senden ununterbrochen ihre Position und einen „Zeitstempel“ – das ist der Zeitpunkt zu dem das Signal abgeschickt wird –, der nicht mit den Sendern synchronisiert sein muss. Aus den von den Sendern empfangenen Signalen und dem Zeitsignal kann das Empfangsgerät entweder selbst die  $x$ - $y$ -Koordinaten seiner Lage berechnen oder es gibt die Signale an eine zentrale Recheneinheit weiter, die diese Berechnung durchführt. Diesen Fall zeigt die Grafik auf der nächsten Seite.

Die modernen Systeme beruhen auf den Synchronisierungssignalen, die in den Standardübertragungen des digitalen Fernsehens bereits implementiert sind. Daher kann diese Art von GPS mittels bereits bestehender Anlagen durchgeführt werden und es bedarf keiner Errichtung von neuen Sendestationen.

Der Einsatz der Technologie des digitalen Fernsehens hat in bestimmten Umgebungen einige wesentliche Vorteile gegenüber eines durch Satelliten gestützten GPS.

Digitale TV-Signale haben:

- durchschnittlich 40dB mehr Intensität,
- eine größere Bandbreite,
- eine niedrigere Frequenz und
- eine überlegene Geometrie.



Damit können diese Signale Stellen erreichen, die für Standard GPS-Signale unerreicht sind. Diese Technologie erweitert entscheidend die üblichen GPS-Anwendungen. Hier sind zwei Beispiele:

1. Die Lokalisierung von „*first responder*“<sup>(1)</sup>, die ein Modul benutzen, das in Notrufradios und tragbaren Signalerzeugern eingebaut ist, die auf Gürtel aufgesteckt werden.
2. Die Suche nach Kindern, die in geschlossenen Örtlichkeiten, wie zB in Einkaufszentren oder Vergnügungsparks, aber auch in dicht bewaldetem Gebiet verloren gehen. Die Kinder tragen den Sender in einem Armband oder in einem Fußkettchen.

*Wie funktioniert das 2D-GPS?*

Ein Kind, das ein „GPS-Armband“ trägt, wurde in einem Einkaufszentrum verloren. Es gibt drei Sendestationen, von denen sich die erste 100m östlich und 200m nördlich, die zweite 300m westlich und 100m nördlich und die dritte 200m östlich und 200m südlich der zentralen Kontrollstation befindet. Sie zeichnen die folgenden Abstände zum Armband des Kindes auf:

Station 1: 223.60680 Meter

Station 2: 200.00000 Meter

Station 3: 424.26407 Meter

Die nächste Abbildung zeigt, wie wir die ungefähre Position des „verlorenen Kindes“ mit Derive 6 unter Verwendung von Schieberegler feststellen können.

<sup>(1)</sup> Spezialausdruck für einen Ersthelfer des Roten Kreuzes oder einer anderen Sanitätsorganisation

Die Vorgangsweise ist relativ einfach. Da sich die digitalen TV-Signale von jedem Sender gleichmäßig kreisförmig in alle Richtungen ausbreiten, erzeugen wir ein Koordinatensystem, in dem wir die Positionen der drei Sender im Maßstab 1:100 durch die Punkte (1, 2), (-3, 1) sowie (2, -2) festlegen.

Dann geben wir die Gleichungen von drei Kreisen mit den Punkten als Mittelpunkt und unbekanntem Radien ein:

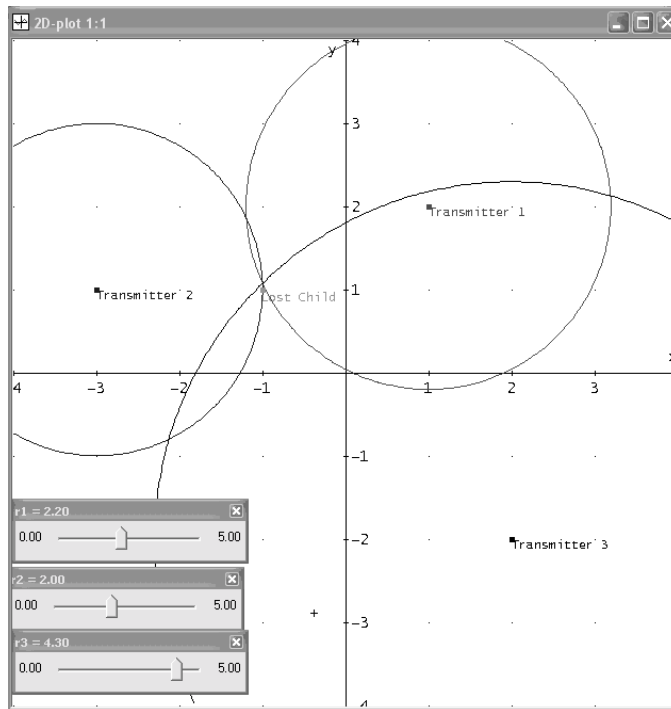
$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = r_1^2$$

$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = r_2^2$$

$$(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = r_3^2$$

Im vorletzten Schritt wechseln wir ins Grafikenfenster und richten für die drei unbekanntem Radien  $r_1$ ,  $r_2$  und  $r_3$  Schieberegler ein. Der Bereich soll von 0 bis zu einer Zahl gehen, so dass die Entfernung zum Kind sicher eingeschlossen wird. Als Schrittweite wählen wir 0.01. Damit kommen wir der genauen Entfernung ausreichend nahe.

Stelle nun den ersten Schieberegler auf 2,24, den zweiten auf 2,00 und den dritten auf 4,24 ein.



Obwohl die Abstände nicht ganz genau sind, scheinen sich die drei Kreise in einem gemeinsamen Punkt (-1,1) zu treffen. Das Kind wird sich daher ziemlich genau 100m westlich und 100m nördlich vom Kontrollzentrum befinden.

Diese Lösung ist sicher nicht exakt, alleine aus dem Grund, weil wir nicht genug Pixel am Schirm für eine bessere Auflösung haben. Aber auch die näherungsweise Lösung sollte uns nahe genug bringen, um das Kind zu finden. Außerdem vermittelt uns der Einsatz der Schieberegler einen guten Eindruck der Arbeitsweise eines GPS. (Eine kleine Hilfe wäre Hineinzoomen in die Gegend um den Schnittpunkt).

*Frage:* Ein CAS kann auch nichtlineare Gleichungssystem lösen. Warum wird man in diesem Fall scheitern?

*Die exakte Lösung des Gleichungssystems*

Radio- und TV-Signale verbreiten sich mit Lichtgeschwindigkeit  $c = 299\,792,458$  km/s. Daher gilt für die von den Signalen zurückgelegte Strecke:

$$\text{Wegstrecke} = c \cdot (\text{Zeit zwischen Senden und Empfang} - \text{Zeitunterschied})$$

oder

$$d = c * (t - \delta)$$

wobei  $\delta$  der Unterschied zwischen wahrer und beobachteter Zeit ist.

Betrachten wir nun die Informationen, die in der Empfangseinheit unseres GPS gespeichert sind:

Sender 1:

Position:  $(a_{11}, a_{12})$

Zeit bis zum Empfang des Signals:  $t_1$

Sender 2:

Position:  $(a_{21}, a_{22})$

Zeit bis zum Empfang des Signals:  $t_2$

Sender 3:

Position:  $(a_{31}, a_{32})$

Zeit bis zum Empfang des Signals:  $t_3$

Aus diesen Informationen entsteht das folgende Gleichungssystem:

$$(x - a_{11})^2 + (y - a_{12})^2 = c^2(t_1 - \delta)^2$$

$$(x - a_{21})^2 + (y - a_{22})^2 = c^2(t_2 - \delta)^2$$

$$(x - a_{31})^2 + (y - a_{32})^2 = c^2(t_3 - \delta)^2$$

*Bemerkung:* Die näherungsweise geometrische Lösung kann nun nicht mehr gefunden werden, da wir die Entfernungen zwischen den Sendern und dem Empfänger nicht kennen. Wir wissen nur den Zeitpunkt, zu dem die Signale vom Empfänger aufgenommen worden sind. Dieses Gleichungssystem besteht aus drei *nichtlinearen* Gleichungen in den Unbekannten  $x$ ,  $y$  und  $z$ . Wir können eigentlich nur *lineare* Gleichungssystem lösen. Eine Möglichkeit, dieses

Problem zu umgehen, wäre, einen vierten Sender zu verwenden. Dann könnte man die von diesem Sender empfangenen Daten dazu verwenden, das System der nichtlinearen Gleichungen auf ein System von drei linearen Gleichungen mit drei Unbekannten zu reduzieren.

Es ist aber nicht immer und überall eine vierte Sendestation erreichbar und selbst, wenn es eine gibt, dann macht die Synchronisation dieses zusätzlichen Senders mit den drei anderen zusätzliche Schwierigkeiten. Das heißt, dass wir damit die Fehlerwahrscheinlichkeit deutlich erhöhen würden.

Wie bereits oben erwähnt, können wir aber den in unserem CAS implementierten Lösungsalgorithmus zur Lösung von polynomialen Gleichungssystemen verwenden. Damit akzeptieren wir eine Lösung, die auf einer Methode beruht, die wir nicht kennen. Blindes Vertrauen kann auch in der Mathematik sehr gefährlich sein. Andererseits hofft der Autor, dass du dich über diese Methoden informierst und damit mehr Mathematik kennen lernst. Dieses Werkzeug soll deinen Appetit auf ein genaueres Studium wecken.

(Tipp: Suche im Internet unter *Gröbnerbasen*. Nach wem wurde ein Algorithmus zur Lösung dieser Gleichungssysteme benannt?)

Wir wollen nun nochmals das Problem um das vermisste Kind lösen. Wir erinnern uns, dass  $x$ ,  $y$  und  $\delta$  die Unbekannten sind. Alle Messungen sollen in km angegeben werden und wir verwenden für die Lichtgeschwindigkeit den Wert

$$c = 0.299792458 \text{ km}/\mu\text{sec}.$$

Im abgebildeten Derive-Listing wird das Gleichungssystem gelöst. Beachte die getroffenen Einstellungen. SOLVE und SOLUTIONS haben die gleiche Syntax wie für lineare Systeme:

```
#1: c := 0.299792458
```

Die empfangenen "Zeitstempel" sind:

```
#2: t := [6.377871991, 6.29912819, 7.047192602]
```

```
#3: k1 := (x - 0.1)2 + (y - 0.2)2 = c · (t1 - δ)2
```

```
#4: k2 := (x + 0.3)2 + (y - 0.1)2 = c · (t2 - δ)2
```

```
#5: k3 := (x - 0.2)2 + (y + 0.2)2 = c · (t3 - δ)2
```

```
#6: [Precision := Mixed, Notation := Mixed]
```

```
#7: [PrecisionDigits := 25, NotationDigits := 10]
```

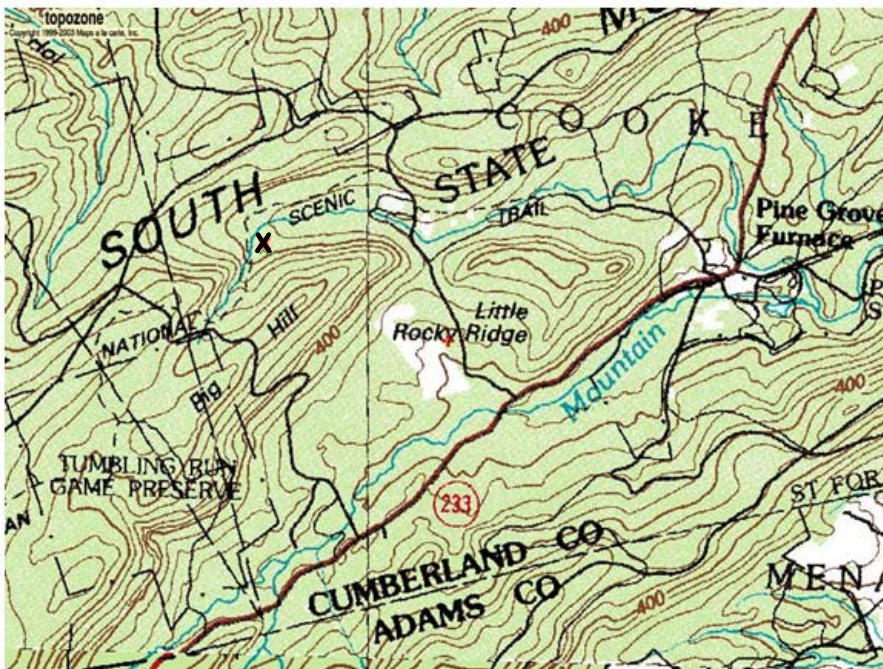
```
#8: SOLVE(k1 ^ k2 ^ k3, [x, y, δ])
#9: (x = 0.007232271666 ^ y = -0.1830929454 ^ δ = 7.692664945) v (x = -0.09999
#10: SOLUTIONS(k1 ^ k2 ^ k3, [x, y, δ])
#11: [ -0.099999999998  0.1000000001  5.631999999
      0.007232271666  -0.1830929454  7.692664945 ]
```

SOLUTIONS hat eine kompaktere Form. Beachte, dass du über Simplify (die =-Schaltfläche) arbeitest und nicht über Approximate (die ≈-Schaltfläche).

Du siehst, dass dieses System zwei Lösungen hat. Das ist durch zwei mögliche Werte für  $\delta$  begründet. Die erste Lösung deckt sich praktisch mit der vorhin auf geometrische Weise mit dem Schieberregler gefundenen. Die Position wird in km und  $\delta$  in  $\mu$ -Sekunden ausgegeben.

### Wir erzeugen eine GPS-Übung

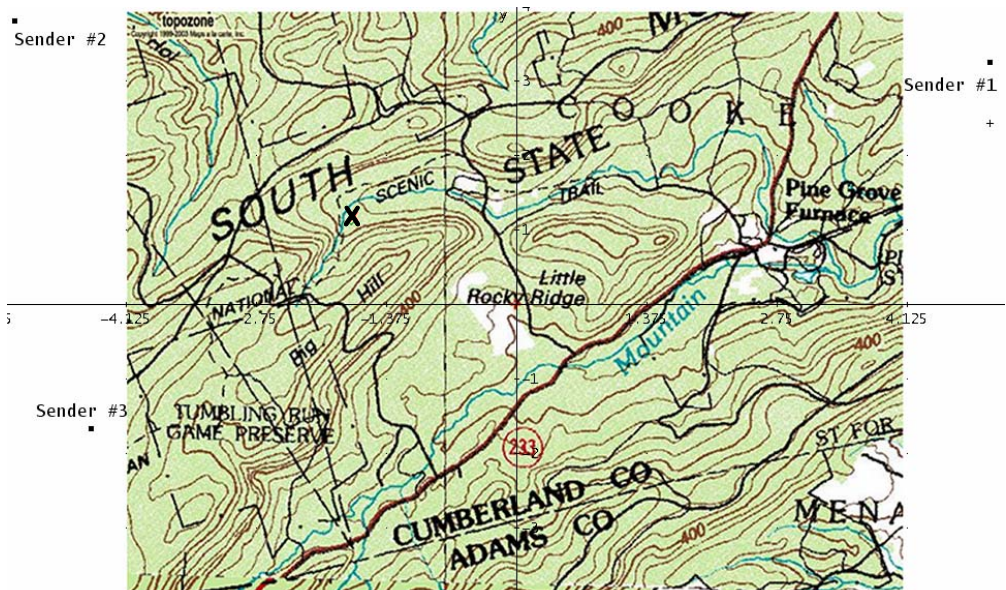
Wir kehren zu unserem eingangs beschriebenen grausigen Erlebnis der Wanderer zurück. Sie befinden sich tief in den Wäldern der Appalachen. Du siehst hier einen Ausschnitt aus einer topographischen Karte der Gegend, in der sie sich aufhalten. Die Karte haben wir über **topozone**<sup>tm</sup> (<http://www.topozone.com>) erhalten. Der Mittelpunkt des Kartenausschnitts hat die GPS-Koordinaten  $40^\circ 2.77'N$  und  $77^\circ 22.28'W$ . Der Maßstab ist 1:50 000.



Ein Kreuz unter dem „H“ von „SOUTH“ markiert die Fundstelle der Knochen.

Wir wollen nun mit Hilfe von Derive 6 eine Aufgabe, die auf unserer Geschichte basiert konstruieren. Im ersten Schritt erzeugen wir ein Derive-Grafikfenster mit der Landkarte als Hintergrundbild. Die Mitte der Landkarte soll im Koordinatenursprung zu liegen kommen. Hier ist die Anleitung dazu:

1. Öffne ein volles Derive-2D-Grafikfenster.
2. Miss mit einem Lineal die Länge der Achsen und wähle einen Achsenbereich (über **Einstellen**>**Zeichenbereich**>**Länge/Mittelpunkt**) sodass zB eine Skaleneinheit einem Kilometer in der Realität entspricht (hier gilt 1 Einheit = 2 cm).
3. Wenn das Bild der Landkarte noch keine Bitmapdatei (bmp-Format) ist, konvertiere die Grafik mit Hilfe eines beliebigen Grafikprogramms (Paint Shop, Photo Shop, IrfanView, usw.) in dieses Format, denn nur bmp-Dateien können in den Hintergrund von Derive geladen werden.
4. Klicke **Extras**>**Anzeige**>**Farbe**>**Bild**. Du gelangst mit einem Klick auf die „...“-Schaltfläche zur Dateiauswahl, in der dir die verfügbaren Bitmap-Grafiken angezeigt werden. Da solltest du auch das Bild der Landkarte (zB map) finden. Markiere die gewünschte Datei und klicke zuerst auf „Öffnen“, wähle dann die Option „Zentriert“ und beende die Auswahl mit einem Klick auf OK. Nun sollte die Landkarte in der gewünschten Größe im Hintergrund sichtbar sein. Falls der Maßstab nicht passt, musst du geeignet adaptieren.
5. Setze den Mauszeiger auf den Ort, an dem die Knochen gefunden wurden und lies die Koordinaten im Derive-Koordinatensystem ab. In unserem Fall liegt der Fundort in (-1,72, 1,18).



6. Wähle nun drei beliebige Positionen für die Sendertürme. Sie müssen nicht unbedingt im am Schirm sichtbaren Achsenbereich liegen. Aber für dieses Demonstrationsbeispiel wählen wir die Punkte  $(5; 3,25)$ ,  $(-5,3; 3,8)$  und  $(-4,5; -1,67)$ . Die Punkte werden gezeichnet und beschriftet.

Bemerkung: Die Größe der Landkarte wurde etwas reduziert, sodass sie auf den Derive-Schirm passt. Die Skalierung wurde aber beibehalten.

Und so kannst du nun eine Aufgabe für einen Kollegen oder eine Kollegin konstruieren:

1. Lege einen Zeitunterschied  $\delta$  fest, der zwischen den synchronisierten Uhren in den Sendern einerseits und dem GPS-Empfänger andererseits herrscht. So wählen wir zB  $\delta = 23.57 \mu\text{sec}$ . Diesen Wert darfst du nicht weitergeben, aber du brauchst ihn, um die Zeitmarken, mit denen die Signale versehen sind, herstellen zu können. Du erinnerst dich, dass diese „Zeitstempel“ zur Lösung des Gleichungssystems benötigt werden.
2. Berechne nun die Zeiten in  $\mu\text{sec}$ , die die Signale benötigen, um den GPS-Empfänger zu erreichen:
  - (a) Berechne die Entfernung zwischen den Sendern und der (unveröffentlichten) Position des GPS-Empfängers in km.
  - (b) Dividiere diese Entfernungen durch die Lichtgeschwindigkeit in  $\text{km}/\mu\text{sec}$ .
3. Addiere  $\delta$  zu jeder dieser Zeiten und veröffentliche diese Zeitstempel.
4. Erzeuge nun selbst das entsprechende Gleichungssystem und überprüfe die Lösung.

Hier sind alle notwendigen Berechnungen in einer kurzen Form zusammengefasst. Analysiere sorgfältig die verwendeten Derive-Befehle:

$$\#15: \text{sender} := \begin{bmatrix} 5 & 3.25 \\ -5.3 & 3.8 \\ -4.5 & -1.67 \end{bmatrix}$$

Berechnung der Zeitstempel:

$$\#16: t := \text{VECTOR}\left(\frac{|v - \text{loc}|}{c} + 23.57, v, \text{sender}\right)$$

$$\#17: t := [47.02486954, 38.36791986, 36.85025028]$$

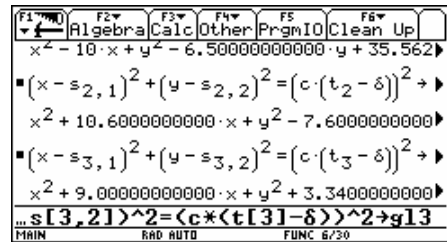
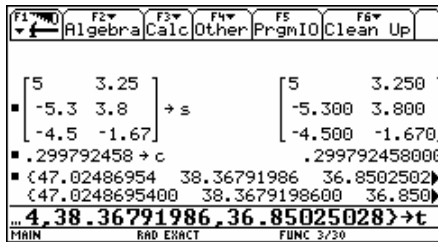
$$\#18: \text{SOLUTIONS}\left(\text{VECTOR}\left((x - \text{sender}_{i,1})^2 + (y - \text{sender}_{i,2})^2 = (c \cdot (t_i - \delta))^2, i, 3\right), [x, y, \delta]\right)$$

$$\#19: \begin{bmatrix} 1.118416427 & 2.508700690 & 60.20644125 \\ -1.719999999 & 1.179999999 & 23.56999999 \end{bmatrix}$$

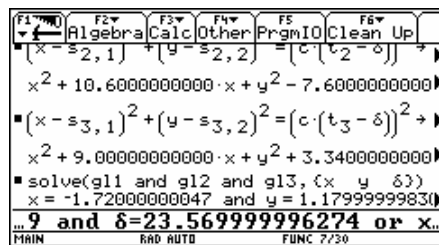
Es gibt wieder zwei Lösungen, von denen die zweite die gesuchte ist. Jetzt kannst du dein Problem – verpackt mit einer netten Geschichte deiner Wahl – veröffentlichen. Gib dazu die Positionen der Sender und die im GPS angezeigten Zeitstempel an.



Bemerkung: Auch die TI-CAS-Rechner können nichtlineare Gleichungssysteme bis zu einer gewissen Komplexität lösen.



Zuerst werden die Daten in einer geeigneten Form eingegeben, anschließend die drei Gleichungen formuliert und als  $g1$ ,  $g2$  bzw.  $g3$  abgespeichert.



Der solve-Befehl bringt sofort beide Lösungen, von denen nur eine zutrifft.

Beachte in diesem Zusammenhang auch die *Erweiterung* #2.

### Das 3-dimensionale GPS

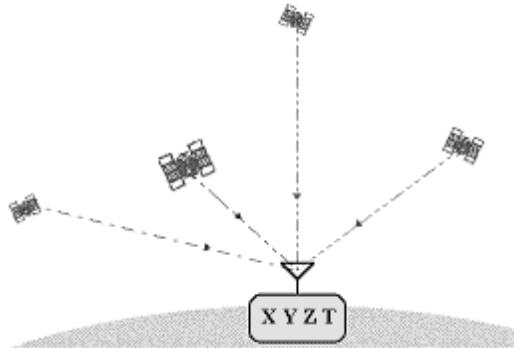
Viel Material für diesen Abschnitt wurde auf der Internetseite von Peter H. Dana (*Department of Geography of the University of Texas at Austin*) gefunden. Die Adresse für diese Information findest du auf der Homepage der Universität von Colorado:

[www.colorado.edu/geography/gcraft/notes/gps/gps\\_f.html](http://www.colorado.edu/geography/gcraft/notes/gps/gps_f.html)

Da wir nun das zweidimensionale Problem sorgfältig durchgearbeitet haben, sollte auch die Arbeitsweise des dreidimensionalen GPS klar sein. Anstelle der Ermittlung der  $x$ - und  $y$ -Koordinaten eines Objekts können wir nun  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Koordinaten bestimmen (das sind geographische Breite und Länge, sowie die Seehöhe). Natürlich wird unser GPS wieder einen unbekanntem Zeitunterschied zu den Atomuhren der Satellitensender aufweisen. Damit werden wir ein System von vier nichtlinearen Gleichungen mit vier Unbekannten zu lösen haben.

Im Gegensatz zur landläufigen Meinung weiß ein GPS-Satellit überhaupt nichts über die Position deines GPS-Empfängers. Er – der Satellit – kennt nur zwei Tatsachen: seine eigene Position und die exakte Zeit, die über eine Atomuhr mit allen anderen GPS-Satelliten synchronisiert wird. Dein GPS-Gerät erhält diese Information von vier Satelliten und berechnet

deine Entfernung von den Satelliten und den Zeitunterschied zwischen seiner eigenen Zeit und der der Satelliten. Aus diesen Daten kann er im Rahmen einer gewissen Genauigkeit deine Position auf der Erde berechnen (siehe die folgende Abbildung).



Das GPS

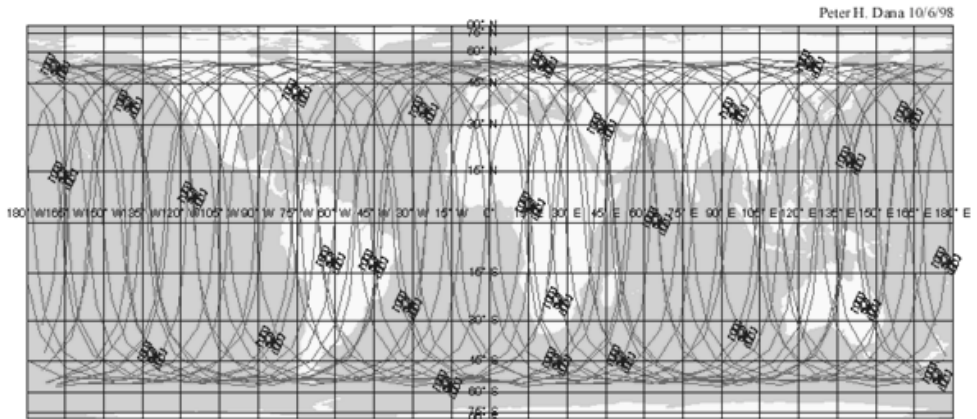
Messungen der Code-Phasen-Ankunftszeiten von mindestens 4 Satelliten werden verwendet, um 4 Größen zu schätzen: die örtliche Lage in drei Dimensionen (X, Y, Z) und die GPS-Zeit T.

27 GPS-Satelliten kreisen in Umlaufbahnen in einer Höhe von 22000 km (13670.1662292 Meilen) über dem durchschnittlichen Meeresniveau (DMN) ständig um die Erde. Die Umlaufbahnen bilden mit dem Äquator einen Winkel von  $55^\circ$ . Wir wollen unter der Annahme des DMN die Erde näherungsweise als eine Kugel mit dem Radius 6410,01 km (3982,998 Meilen) annehmen. Die nächste Abbildung zeigt die Erde mit den Umlaufbahnen (*orbits*).



24 Satelliten in 6 Umlaufbahnen zu je 4 Satelliten in 20 200 km Höhe mit einer Neigung von  $55^\circ$  gegen den Äquator.

Die Satelliten sind so angeordnet, dass zu jedem Zeitpunkt jeder Punkt der Erde zumindest von vier Satelliten aus „sichtbar“ ist. Die nächste Abbildung zeigt die Stellung der Satelliten über der Erde zu einem Zeitpunkt am 29. September 1998.



### Forensische Aufgaben

- Verstehen, wie man ein aus anderen Zusammenhängen bekanntes Werkzeug verwenden kann, um die Lage eines Tatorts oder den Fundort eines Körpers genauer beschreiben zu können, insbesondere dann, wenn dieser Ort nicht so leicht erreichbar ist

### Mathematische Aufgaben

- Die Rolle der Mathematik für den Einsatz eines Werkzeugs verstehen, das für viele Zwecke unseres täglichen Lebens Verwendung findet
- Lernen, wie man mit einem CAS einige Systeme von nichtlinearen Gleichungen lösen kann
- Anregung für eine weitere Beschäftigung mit der Mathematik geben, um auch die Mathematik zu verstehen, die hinter den vom CAS gefundenen Lösungen steht

### Materialien

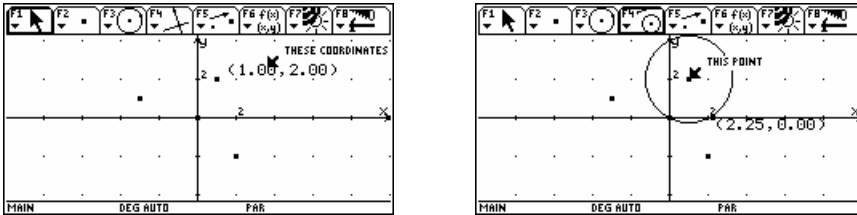
- Ein Computer Algebra System mit der Möglichkeit, Grafiken in den Hintergrund des Koordinatensystems der Zeichenebene zu laden und Schieberegler für unbekannte Parameter einzurichten. Nichtlineare Gleichungssysteme sollen näherungsweise mit großer Genauigkeit gelöst werden können.
- Eine genaue Landkarte einer bestimmten Gegend, die möglichst auch den Schulstandort zeigt. Die Darstellung von anderen öffentlichen Gebäuden, Denkmälern, Straßen usw. ist nützlich wie zB eine örtliche Straßenkarte. Derartige Karten sind sehr gut zur Erstellung von Aufgaben geeignet. Eine andere Möglichkeit ist die Verwendung einer topographischen Karte der näheren Umgebung.
- Ein Maßstab (Lineal) oder ein Maßband

## Erweiterung #1

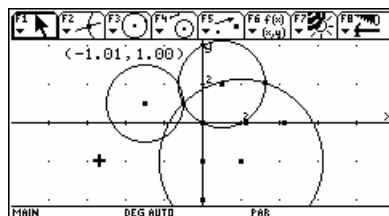
Demonstriere die Suche nach dem vermissten Kind von Seite 98 mit einem dynamischen Geometriesystem (DGS).

Dazu lässt sich jedes der eingeführten DGS verwenden. Wir wollen hier die Cabri-Applikation auf dem TI-92 / Voyage 200 einsetzen.

Zuerst legen wir die Positionen der Sender durch Punkte im Koordinatensystem fest. Dazu werden 3 Punkte gesetzt und deren Koordinaten über die Option F6 5:Equation & Coordinates bestimmt. Anschließend werden sie möglichst genau an die gewünschte Stelle gezogen. Die erste Abbildung zeigt die Situation nach dem Setzen des ersten Senders.



Die Kreise zeichnet man mit dem F4 8:Compass-Werkzeug. Dazu benötigt man den Radius und den Mittelpunkt des zu zeichnenden Kreises. Für den ersten Kreis ( $r_1 = 2,24$ ) habe ich einen Hilfspunkt (2,25; 0) eingetragen - genauer geht es bei dieser Auflösung nicht. Markiere der Reihe nach den Koordinatenursprung, den Hilfspunkt und dann den Mittelpunkt des ersten Kreises (1; 2) – der Kreis wird gezeichnet.



Nachdem alle drei Ortskreise eingetragen sind, schneide zwei von ihnen und lasse dir die Koordinaten des Schnittpunkts ausgeben. Die dargestellte Lösung ist in Anbetracht des kleinen Schirms sehr gut brauchbar. DGS am PC liefern natürlich genauere Ergebnisse.

## Erweiterung #2

Transformation des nichtlinearen Gleichungssystems bestehend aus drei Gleichungen mit zwei Unbekannten auf ein lineares System mit 3 Unbekannten.

Wir betrachten gleich die Aufgabe von oben (ohne Berücksichtigung des Zeitunterschieds  $\delta$ ).

$$\begin{aligned}(x-1)^2 + (y-2)^2 &= r_1^2 \\(x+3)^2 + (y-1)^2 &= r_2^2 \\(x-2)^2 + (y+2)^2 &= r_3^2\end{aligned}$$

Die Gleichungen werden ausmultipliziert und umgeordnet:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 2, 24^2 - 1 - 4 = 0, 0176$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y = 2^2 - 9 - 1 = -6$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y = 4, 24^2 - 4 - 4 = 9, 9776$$

Für  $x^2 + y^2$  setzen wir eine neue Unbekannte  $x^2 + y^2 = u$  ein und erhalten ein lineares System für  $x, y$  und  $u$ , das leicht aufgelöst werden kann.

Führe diese Rechnung selbständig durch und vergleiche mit den Ergebnissen von oben.

### Erweiterung #3

Lösung des nichtlinearen Systems unter Berücksichtigung der Zeitdiskrepanz  $\delta$  mit dem Solver einer Tabellenkalkulation.

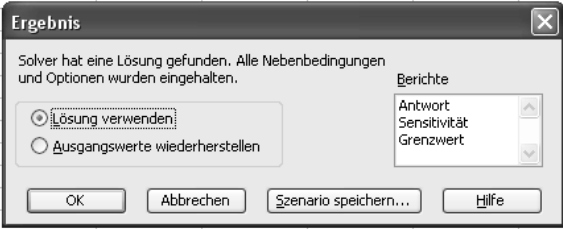
Wenn kein CAS mit einem Lösungsalgorithmus für nichtlineare Systeme verfügbar ist, kann das Problem auch mit einer Tabellenkalkulation sehr einfach gelöst werden. Hier wird die Kontrolle der oben aufgestellten Aufgabe mit dem Solver von MS-Excel durchgeführt.

E10		=A11+B11+C11				
	A	B	C	D	E	F
1		x-Koord.	y-Koord.	Zeitstempel	c=	0,29979246
2	Sender 1	5	3,25	47,0248695		
3	Sender 2	-5,3	3,8	38,3679199		
4	Sender 3	-4,5	-1,67	36,8502503		
5		linke Seite		rechte Seite		
6	Gleichung 1	21,0625		190,382286		
7	Gleichung 2	47,53		125,498707		
8	Gleichung 3	37,3789		115,511651		
9						
10	x	y	delta		3	
11	1	1	1			

In der Tabelle sind alle Daten (Positionen der Sender sowie die empfangenen Zeitstempel) eingetragen. In den Zellen A11, B11 und C11 legt man Anfangswerte für die drei Unbekannten fest. In der Zelle B6 wird dann die rechte Seite der ersten Gleichung mit der Formel  $=(\$A\$11-B2)^2+(\$B\$11-C2)^2$  definiert, während in D6 die linke Seite eingetragen wird:  $=(\$F\$1*(D2-\$C\$11))^2$ . In den Zeilen 7 und 8 werden Gleichungen 2 und 3 eingetragen. Für den Solver muss eine (beliebige) „Zielzelle“ mit einer „Zielformel“ festgelegt werden. Hier wurde in Zelle E10 die Formel  $=A11+B11+C11$  definiert. Dann wird der Solver aufgerufen und die Dialogfelder werden entsprechend gefüllt.



Nun sollten in den „veränderlichen Zellen“ A11, B11 und C11 die gewünschten Lösungen erscheinen.

10	x	y	delta		23,0299998
11	-1,72000001	1,17999999	23,5699998		
12					
13					
14					
15					
16					
17					
18					
19					
20					
21					
22					

## KOMMENTAR des CORONERS

Jeder Coroner wird davon berichten können, dass er schon an Orte gerufen worden ist, an denen seine Anwesenheit notwendig erschienen ist und es sich aber später herausstellte, dass die aufgefundenen Knochen von Tieren stammten. Am häufigsten findet man so begrabene Haustiere. Ich wurde einmal von der örtlichen Polizei zu einem „Tatort“ gerufen und fand die Knochen einer Kuh, die geschlachtet worden war. Ihre Knochen hatte man in einem mit dichtem Gebüsch bewachsenen Waldstück „entsorgt“. Da nicht alles Fleisch von den Knochen entfernt worden war, war der auftretende Geruch die unangenehmste Begleiterscheinung. Ein anderes Mal wurde ich zu einer Hausrenovierung gerufen. Die Hauseigentümer befürchteten auf die Spur eines Massenmörders gestoßen zu sein. Es stellte ich heraus, dass der Vorbesitzer in seinem Wohnhaus eine kleine Fleischerei betrieben hatte und die fragwürdigen Fundstücke waren Schweineknochen. Es ist also durchaus üblich, nichtmenschliche Knochen identifizieren zu müssen.

Für einen Coroner ist es immer wichtig, eine genaue Beschreibung des Ortes, an dem etwas passiert ist, zu geben. Mit dem GPS steht ein Werkzeug zur Verfügung, das bei dieser Beschreibung eine große Hilfe sein kann. Das trifft besonders dann zu, wenn es sich um eine abgelegene Gegend handelt oder um einen Ort, der nicht nahe bei bekannten Orientierungspunkt liegt. Zurzeit wird das GPS eher in der Verbrechenverhütung eingesetzt, wie zB durch eine elektronische Fußfessel oder zur Suche nach vermissten Personen, die mit GPS ausgerüstet sind. Sehr aktuell ist die Anwendung von GPS für Personen, die an Alzheimer leiden. Sie verlieren sehr leicht die Orientierung und können mit einem angelegten GPS-Armband wieder aufgefunden werden.

## Die Aufgaben eines Coroners (im Bundesstaat Pennsylvania<sup>(1)</sup>)

Pennsylvania hat ein gemischtes Coroner / medizinisches Ermittlungssystem. Das Amt kann je nach den Bestimmungen des Bezirks (County) durch Wahl oder Ernennung bekleidet werden. Coroners müssen keine Ärzte sein und brauchen auch keinerlei medizinischen Vergangenheit zu besitzen. Aber sie müssen einen einwöchigen Kurs belegen und dann die zugehörige Abschlussprüfung bestehen, bevor sie für ihr Amt vereidigt werden.

Die Stadt Philadelphia und das Allegheny County haben medizinische Ermittler und das Amt kann nur von einem ausgebildeten Gerichtsmediziner bekleidet werden.

Die typischen Aufgaben des Coroners sind:

1. Identifizierung des Opfers
2. Feststellung von Todesart und -ursache
3. Ermittlung des Zeitpunkts des Todes
4. Benachrichtigung der nächsten Angehörigen

In den meisten Fällen arbeiten die Coroner mit Polizeibeamten zusammen, um die Fragen zu klären. Leichenöffnungen (Autopsien) werden vom Coroner nicht vorgenommen, aber da gibt es immer Absprachen mit Gerichtsmedizinern, um diese durchzuführen. Die Counties sind gesetzlich dazu verpflichtet, alle Ausgaben, die im Zusammenhang mit Ermittlungen auftreten zu ersetzen. So können die Coroner jeden Fachmann beiziehen, der zur Klärung einer der oben angegebenen Fragen beitragen kann, wie zB Zahn- und Kieferspezialisten, Gerichtsanthropologen, Insektenkundler usw.

<sup>(1)</sup> Im Internet gibt es eine reiche Dokumentation über die Geschichte des Coronerwesens. Gehe auf Internetrecherche und fasse die Ergebnisse in einem kurzen Bericht zusammen.

## Referenzen

- [1] Konferenz-CD der Internationalen Derive & TI-92 Konferenz 2000, Liverpool
- [2] Tagungsband DES-TIME-2006, Dresden, ISBN 3-901769-74-9, bk-teachware sowie die im Text genannten Internetquellen

---

Die zum Buch gehörigen Dateien können über <http://shop.bk-teachware.com/sr-57daten> herunter geladen werden (ca 100 KB).