

# Was hat zum Einsturz der Tacoma-Narrows-Brücke geführt? oder Mit Newtons Grundgesetz der Mechanik Bewegungsprobleme numerisch lösen



Abb.1: Torsionschwingungen der Fahrbahn der Brücke kurz vor dem Einsturz

## 1. Einleitung

Es ist eine Aufgabe des Physikunterrichts die Bedeutung des zweiten Newtonschen Axioms für die Berechnung von Bewegungsvorgängen zu vermitteln. Dieses auch als Grundgesetz der Mechanik bezeichnete Axiom besagt:

Wirkt auf einen Körper eine Kraft, so wird er in Richtung der Kraft beschleunigt. Die Beschleunigung ist zur Kraft  $F$  direkt und zur Masse  $m$  des Körpers umgekehrt proportional.

Diesen Zusammenhang beschreibt man häufig durch  $F = m \cdot a$ , wobei  $a$  die Beschleunigung ist. Bei dieser Formulierung erkennt man allerdings nicht die Bedeutung dieses Gesetzes. Für Schülerinnen und Schüler ist  $F = m \cdot a$  nur eine von vielen Formeln, die sie im Physikunterricht kennen und anwenden gelernt haben. Erst wenn man die Beschleunigung als zweite Ableitung des Weges nach der Zeit einsetzt, wird deutlich, dass diese Gleichung eine Differenzialgleichung ist,

$$(1) F(x(t)) = m \cdot \ddot{x}(t),$$

die es zulässt, die Bewegung eines mechanischen Systems vorauszusagen, wenn das Kraftgesetz und die Anfangswerte der Bewegung bekannt sind.

Im Unterricht ist es nur in wenigen Sonderfällen möglich die allgemeine Form (1) des Grundgesetzes zu benutzen, weil zur Zeit der Behandlung des Themas Mechanik in der Sek II die erforderlichen Kenntnisse aus der Analysis zur Bearbeitung von Differenzialgleichungen im Allgemeinen nicht vorhanden sind.

Um nun trotzdem die universelle Geltung von Gleichung (1) zu zeigen, können Lösungen mithilfe von Computern numerisch näherungsweise berechnet und graphisch dargestellt werden. Dafür sind nur grundlegende Kenntnisse über Differenzenquotienten, Grenzwerte und Ableitungen erforderlich.

Nachfolgend wird ein Unterrichtsgang zum Thema „Differenzialgleichungen mit Computerunterstützung numerisch lösen“ beschrieben. Die Rechnungen wurden mit dem TI-Nspire Cx CAS durchgeführt, der auch im Mathematikunterricht eingesetzt wurde.

Um bei Lernenden für den zugegeben nicht ganz einfachen Weg Interesse für die numerische Lösung von Differenzialgleichungen zu wecken, wurde als Motivation der bekannte und im Internet frei verfügbare Film über den Einsturz der Tacoma-Narrow-Brücke gewählt.

<https://www.youtube.com/watch?v=j-zczJXSxw>

<https://www.youtube.com/watch?v=mXTSnZgrfxM>

im Anschluss wurde dann die Frage gestellt: „*Was ist die Ursache für dieses Unglück?*“

Im Film ist zu sehen, dass die Brücke große Schwingungen ausführte, die schließlich zum Einsturz führten. Verantwortlich dafür war offensichtlich ein starker Wind.

Zunächst sollten die Schülerinnen und Schüler nun an einem Feder-Masse-System erzwungene Schwingungen untersuchen. An diesem einfachen Modell sammelten die Schülerinnen und Schüler experimentell Erfahrungen, wie und unter welchen Bedingungen mit kleinen anregenden Kräften große Schwingungen entstehen können. Danach konnten sie zu dem System die Bewegungsgleichungen aufstellen und schließlich numerisch lösen.

Abschließend waren dann Schülerinnen und Schüler aufgrund ihrer Ergebnisse in der Lage den Einsturz der Tacoma-Brücke als Resonanzkatastrophe zu interpretieren.

## **2. Verfahren zur numerischen Lösung von Differenzialgleichungen**

In diesem Abschnitt wird beschrieben, wie Differenzialgleichungen der Ordnung zwei numerisch gelöst werden können.

Die meisten dynamischen Vorgänge wie Bewegung, Zerfall und Wachstum, Änderung usw. können als ein mathematisches Modell mithilfe einer Differenzialgleichung beschrieben werden. Es ist nicht immer möglich hierfür eine analytische Lösung zu finden, so dass man auf ein numerisches Näherungsverfahren zurückgreifen muss. Dabei wird die Bewegung nur schrittweise in bestimmten Zeitabschritten berechnet. Das Ergebnis kann dann in Tabellen oder in einer Graphik angegeben werden.

Als Einstiegsbeispiel wird eine ungedämpfte Federschwingung gewählt, die den Lernenden aus dem Unterricht bekannt ist. Sie erwarten als Ergebnis eine sinusförmige Schwingung mit konstanter Amplitude. So können sie auch die Güte der numerischen Approximation beurteilen.

Es soll nun ausgehend von den Anfangswerten  $t_0$  und  $x_0$  die Ortskoordinate  $x_1$  nach der Zeit  $\Delta t$  bestimmt werden. Für die Geschwindigkeit gilt näherungsweise  $v \sim \Delta x / \Delta t$ . Für die ersten Werte würde dann gelten:  $\Delta x = x_1 - x_0$  und  $v = v_0$ . Daraus ergibt sich für  $x_1$ :

$$(2) \quad x_1 = x_0 + v_0 \cdot \Delta t$$

Um die nächste Koordinate  $x_2 = x_1 + v_1 \cdot \Delta t$  iterativ aus der Koordinate davor in gleicher Weise zu berechnen, wird der Wert von  $v_1$  benötigt. Dieser kann aus dem Kraftgesetz für die Schwingung gewonnen werden.

Zwischen der Kraft, die während einer Schwingung auf einen Körper der Masse  $m$  ausgeübt wird, und der Auslenkung  $x$  des Schwingers besteht die lineare Beziehung

$$(3) F(x) = -k \cdot x,$$

wobei  $k$  die Federhärte ist.

Aufgrund des 2. Axioms von Newton kann  $F(x)$  durch  $m \cdot a$  ersetzt werden. Wird dann auch hier die Näherung  $a \sim \frac{\Delta v}{\Delta t}$  eingeführt, so erhält man:  $\Delta v = -\frac{k}{m} \cdot x \cdot \Delta t$ .

Zur Berechnung von  $v_1$  aus den Anfangswerten und (3) setzt man  $\Delta v = v_1 - v_0$  und erhält damit:

$$(4) v_1 = v_0 - \frac{k}{m} \cdot x_0 \cdot \Delta t$$

Um als nächstes  $x_2$  und  $v_2$  zu berechnen, braucht man nur die Zählvariable in den Gleichungen (2) und (3) um 1 heraufzusetzen:

$$(5) x_2 = x_1 + v_1 \cdot \Delta t \quad \text{und} \quad v_2 = v_1 - \frac{k}{m} \cdot x_1 \cdot \Delta t$$

Die weiteren Berechnungen können entsprechend fortgesetzt werden. Diese Iteration nennt man das Euler-Verfahren.

## 2.1 Verwendung einer Tabellenkalkulation

Das in dem vorangegangenen Abschnitt beschriebene Verfahren soll nun mit der Tabellenkalkulation des TI-Nspire CX CAS durchgeführt werden. Allerdings müssen dazu die Parameter angegeben werden. Es werden  $\Delta t = 0,1$ ;  $x_0 = 1$ ;  $v_0 = 0$  und  $\frac{k}{m} = 1$  gesetzt. Nach Aufruf der Anwendung *List & Spreadsheet* werden drei Spalten mit den Namen zeit, ort und geschw definiert. In die erste Zeile werden die Anfangswerte eingetragen. In der Zelle a2 wird die Zeit aus Zelle a1 um 0,1 erhöht.

	A time	B position	C veloc	D
=				
1	0	1	0	
2	0.1			
3				
4				
5				

A2 =a1+0.1

Abb.2: Eingabe der Anfangswerte, Erhöhung der Zeit um  $\Delta t = 0,1$

	A time	B position	C veloc	D
=				
1	0	1	0	
2	0.1			
3				
4				
5				

A2 =a1+0.1

Abb.3: Iterative Berechnung des Ortes und der Geschwindigkeit

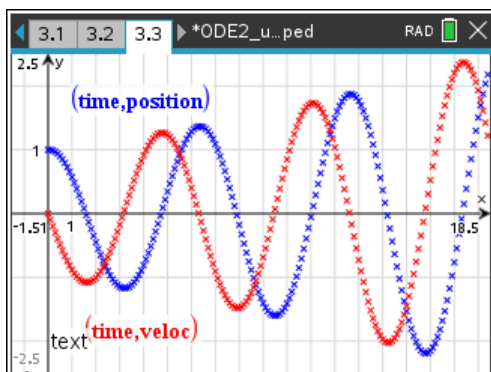


Abb.4: Approximation der Auslenkung und der Geschwindigkeit einer Federschwingung mit dem Euler-Verfahren

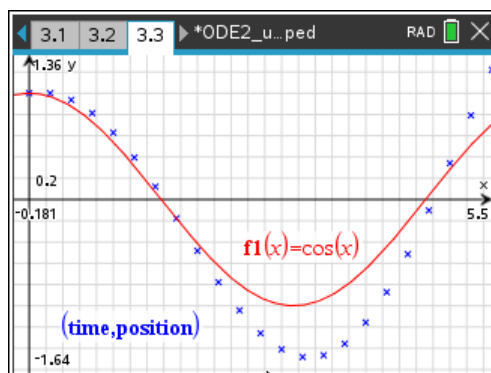


Abb.5: Vergleich der exakten Lösung und der numerischen Berechnung mit dem Verfahren nach Euler

Diese Iteration wird dann bis zur Zeile 200 fortgesetzt. Damit werden so die Ortskoordinaten und die Geschwindigkeiten für 20 Sekunden nach dem Beginn berechnet. Eine obere Grenze ist nur durch die Hardware gegeben.

In Abb.4 ist die numerische Approximation des zeitlichen Verlaufs der Position der schwingenden Masse (blau) und der Geschwindigkeit (rot) dargestellt. Erwartungsgemäß zeigt sich ein sinusförmiger Verlauf. Allerdings nimmt die Amplitude unrealistischerweise im Laufe der Zeit zu. Das ist auf die Approximation durch das verwendete Verfahren zurückzuführen.

Mit der Darstellung in Abb.5 wird das erläutert. Dort ist zunächst die exakte Lösung  $f_1(x) = \cos(x)$  der Differenzialgleichung einer ungedämpften Schwingung rot eingezeichnet worden. Die im numerischen Verfahren nach Euler berechneten Ortskoordinaten werden als blaue Kreuze dargestellt. Im Vergleich zu Abb.4 ist hier das Zeitintervall auf  $\Delta t = 0,25$  vergrößert. Die Berechnung beginnt mit den Anfangswerten  $x_0$  und  $v_0$ , aus denen die Ordinate des nächsten Punktes  $x_1 = x_0 + v_0 \cdot \Delta x$  berechnet wird. Da die Wegänderung im ersten Intervall  $v_0 \cdot \Delta t = 0$  ist, wird  $x_1 = x_0$ . Im Weiteren werden die Werte am rechten Rand ( $x_{i+1}, v_{i+1}$ ) des jeweiligen Intervalls aus denen am linken Rand

( $x_i, v_i$ ) bestimmt. Das führt auf Grund dieser Bedingungen zu Abweichungen von der exakten Lösung. Am Anfang sind die berechneten Ordinaten größer als die der exakten Lösung. Das führt dann auch zu höheren Geschwindigkeiten. Als Folge werden auch die Auslenkungen größer, wie das in Abb.5 gut zu sehen ist. So nehmen die berechneten Auslenkungen im Laufe der Zeit immer weiter zu.

Es ist erkennbar, dass die Approximation bei dem gewählten großen  $\Delta t$  schlechter wird. Eine deutliche Verkleinerung des Intervalls führt zu Verbesserungen; mit dem Nachteil aber, dass die Menge der berechneten Daten stark zunimmt. Es ist auch möglich die Steigung für die Berechnung des nächsten Punktes nicht am Anfang des jeweiligen Intervalls, sondern in dessen Mitte zu wählen. Auch dadurch wird der Abstand zwischen dem Verlauf des Graphen von  $f_1(x)$  und der Approximation geringer. Es gibt eine Anzahl von weiteren Verfahren, bei denen die mittlere Geschwindigkeit in den Intervallen genauer berechnet werden kann und die dann zu besseren Approximationen führen. Eine Beschreibung weiterer Methoden zur numerischen Lösung von Differenzialgleichungen würde in diesem Zusammenhang zu weit führen. In dem Abschnitt 2.1 sollte lediglich in das Lösen einer Differentialgleichung mit dem einfachen Euler-Verfahren ausführlich eingeführt werden, damit die Lernenden die Chance haben, das Verfahren von der „Pike auf“ zu verstehen.

## 2.2 Anwendung der menügesteuerten Software des TI-Nspire

Mit CAS-Rechnern oder CAS-Programmen kann man die in Abschnitt 2.1 gezeigten Rechnungen auch menügesteuert durchführen. Es sind dabei lediglich die Differenzialgleichungen mit ihren Anfangsbedingungen sowie einige Parameter der Iterationen einzugeben. Die Verwendung einer solchen „Black Box“ ist durchaus vertretbar, wenn das zugrunde liegende Verfahren zuvor mit den Lernenden erarbeitet worden ist, wie das z.B. in Abschnitt 2.1 vorgeschlagen wird.

Auch hier sollen wieder als erstes ungedämpfte Schwingungen untersucht werden, damit ein Vergleich mit dem Verfahren aus Abschnitt 2.1 möglich ist.

Für die Berechnung steht erstens die Differenzialgleichung erster Ordnung für den Ort

$$(6) \quad \dot{x} = v$$

zur Verfügung.

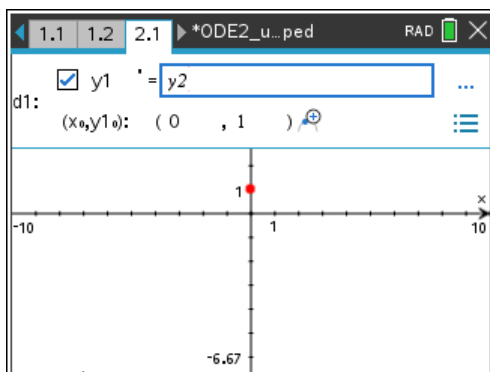
Zweitens kann aus dem Kraftgesetz  $m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x$  eine weitere Differenzialgleichung ersten Ordnung für die Geschwindigkeit  $v$  hergeleitet werden, wenn noch berücksichtigt wird, dass  $\dot{x} = \dot{v}$  ist:

$$(7) \quad \dot{v} = -\frac{k}{m} \cdot x$$

Aus den Differenzialgleichungen (6) und (7) bildet die Software für die Approximation die Differenzenquotienten, mit denen wie in Abschnitt 2.1 iterativ die Tabellen berechnet werden.

Die Differenzialgleichungen können direkt eingegeben werden. Allerdings sind in der verwendeten Software die Variablennamen für Differenzialgleichungen vordefiniert, die sich von der in der Physik üblichen Schreibweise erheblich unterscheiden. Es sind also Umbenennungen erforderlich sind. Die Ortsvariable  $x$  wird durch  $y1$  ersetzt und die Geschwindigkeit  $v$  durch  $y2$ . Außerdem wird die Zeit  $t$  dort  $x$  genannt und die Ableitung nach der Zeit nicht durch einen Punkt über dem Variablennamen, sondern durch einen Strich hinter dem Namen gekennzeichnet. Wie in Abschnitt 2.1 werden die Parameter

$\Delta t = 0,1$ ;  $x_0 = 1$ ;  $v_0 = 0$  und  $\frac{k}{m} = 1$  gewählt.



Zur Eingabe wird in der Applikation *Graphs* des TI-Nspire (Abb.6) das Eingabemenü für *Differenzialgleichungen* aufgerufen. Es werden die Gleichung (5) in der Nomenklatur des Rechners und die Anfangsbedingungen für  $y1$  eingegeben.

Abb.6: Eingabe Der DGL d1

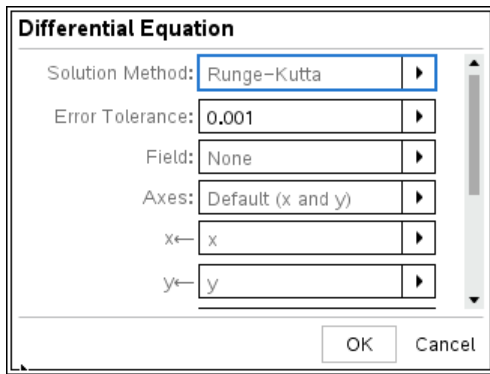


Abb.7: Einstellung der Parameter der Approximation

Anschließend wird die zweite DGL (6) mit ihren Anfangsbedingungen eingetragen. Jetzt sind noch die Parameter für die numerische Berechnung in das Menü wie in Abb.7 festzulegen. Da sich in Abschnitt 2.1 gezeigt hat, dass die Approximation mit dem Euler-Verfahren zu ungenau ist, sollte man das wesentlich präzisere Verfahren nach Runge-Kutta wählen. Für die zeitliche Darstellung der Auslenkung trägt man als Achsen x (Zeit) und y ein. Weiterhin ist das Zeitintervall einzugeben, in der die Näherungsrechnung durchgeführt werden soll.

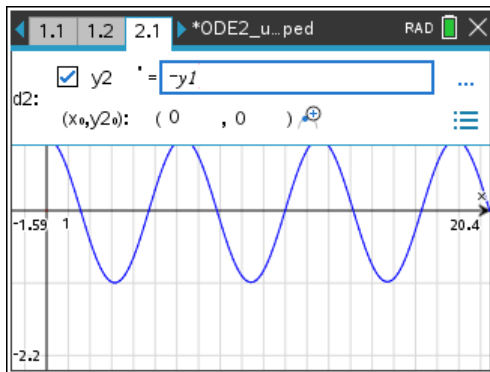


Abb.8: Eingabe der DGL d2 und die Darstellung der Auslenkung

In Abb.8 ist dann das Ergebnis der Näherungsrechnung dargestellt, in dem die Amplitude der sinusförmigen Kurve im Gegensatz zur Näherung mit dem Euler-Verfahren offensichtlich konstant ist.

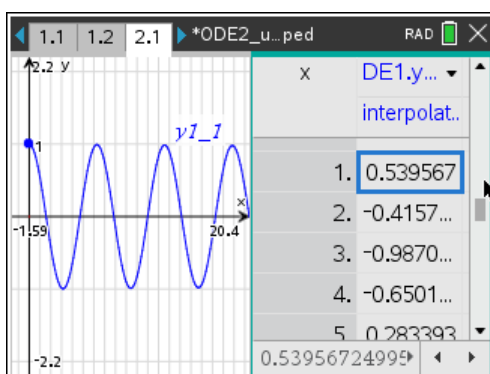


Abb.9: Tabelle für die Auslenkung und deren graphische Darstellung

Den Schülerinnen und Schülern kann man mit Abb.9 zeigen, dass auch bei der menügesteuerten Software die Daten für die graphische Darstellung durch Iterationen gewonnen werden. Dort ist neben der Graphik auch eine der berechneten Tabellen ausschnittsweise dargestellt.

Diese Berechnung zu Abb.8 führt zu dem Funktionsgraphen von  $y_1(x) = \cos x$  bzw. zu der in der Physik üblichen Schreibweise  $x(t) = \cos x$ . Die Übereinstimmung lässt sich zeigen, in dem man in das Koordinatensystem den Graphen zu  $\cos x$  einzeichnen lässt.

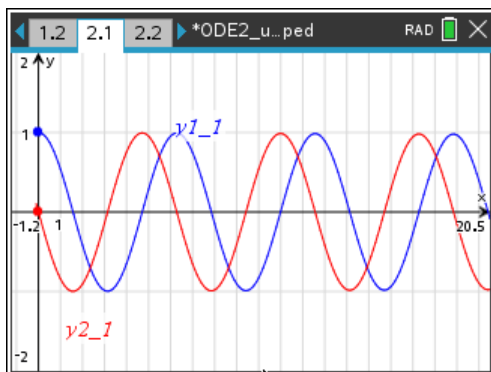


Abb.10: Auslenkung und Geschwindigkeit

$y_2$  als Funktion von  $y_1$  dargestellt wird. Der gezeigte Kreis kann nur entstehen, wenn sich die Amplituden nicht ändern und die Phasenverschiebung  $\frac{\pi}{2}$  beträgt.

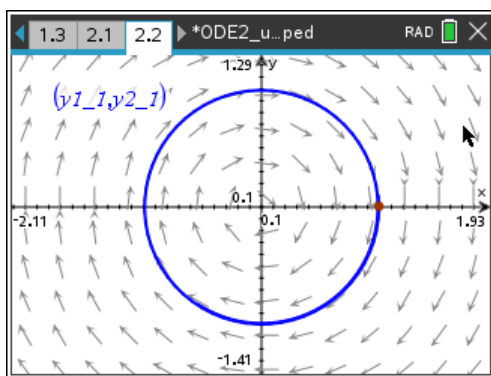


Abb.11: Phasendiagramm  $y_2$  vs  $y_1$

Es wird auch nicht nur die Auslenkung  $y_1$  sondern auch die Geschwindigkeit  $y_2$  berechnet. Abb.10 zeigt beide Graphen. Aufgrund der vorgegebenen Anfangsbedingungen und der Annahme  $\frac{k}{m} = 1$  treten zwei phasenverschobene Sinusschwingungen gleicher Amplitude auf.

Die Phasenbeziehung beider Graphen kann man in einem Phasendiagramm (Abb.11) erkennen, in dem  $y_2$  als Funktion von  $y_1$  dargestellt wird. Der gezeigte Kreis kann nur entstehen, wenn sich die Amplituden nicht ändern und die Phasenverschiebung  $\frac{\pi}{2}$  beträgt.

Die Schülerinnen und Schüler können das nachvollziehen, wenn sie zwei Sinusschwingungen gegeneinander darstellen, deren Phasenunterschied sie von 0 bis  $2\pi$  variieren.

In dem Diagramm sind die Richtungsvektoren der Bewegung an einigen Punkten eingezeichnet. Dadurch kann man erkennen, dass das Diagramm beginnend im Punkt (0|1) im Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

### 3. Beispiele aus dem Physikunterricht

Abschnitt 2.1 und 2.2 dienen der Einführung in das Thema numerische Lösung von Differenzialgleichungen mithilfe von Computern. Dieses Verfahren ist ein wichtiges Hilfsmittel in der Physik. Auch im Physikunterricht kann es, wie bereits gezeigt, gut eingesetzt werden. Es ist nun möglich mit dem beschriebenen Vorgehen Fragestellungen zu beantworten, die ohne Computerunterstützung nicht bearbeitet werden können. Dazu gehören u.a. solche Vorgänge, für die es keine analytischen Lösungen in geschlossener Form gibt oder die mit den mathematischen Kenntnissen aus der Sek 2 nicht gelöst werden können.

Die Schülerinnen und Schüler gehen dann wie folgt vor:

Sie erarbeiten sich zunächst das Kraftgesetz eines Bewegungsvorganges und leiten sich daraus die zugehörige Differenzialgleichung zweiter Ordnung ab.

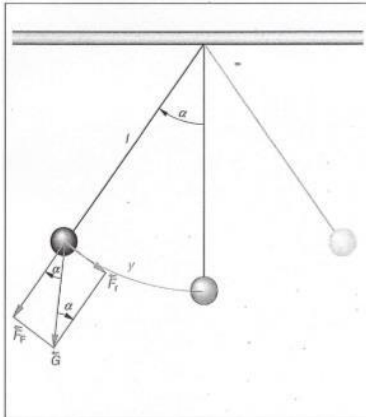
Diese Differenzialgleichung ersetzen sie durch zwei Differenzialgleichungen erster Ordnung für den Ort und die Geschwindigkeit, mit denen dann eine numerische Lösung möglich wird.

Sie geben die Differenzialgleichungen in den CAS-Rechner ein und erhalten als Ergebnis die graphische Darstellung des Ortes und der Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit.

Sie greifen ggf. auch auf die berechneten Werte in einer Tabelle zu.

Im nächsten Abschnitt werden zwei Beispiele exemplarisch behandelt.

### 3.1 Pendelschwingungen



Schwerependel führen im Allgemeinen keine harmonischen Schwingungen aus. Nur bei kleinen Schwingungen kann man die Bewegungen näherungsweise als harmonisch ansehen. Um die auftretenden Kräfte zu bestimmen, wird von einem idealisierten Modell, dem sog. mathematisches Pendel ausgegangen. Es besteht aus einer punktförmigen Masse, die sich an einer masselosen Stange reibungsfrei um den Drehpunkt bewegt (Abb.12).

Abb.12: Kräfte am Stabpendel

Auf die Masse wirken bei Auslenkungen um die Winkel  $\alpha(t)$  rücktreibende Kräfte  $\vec{F}_t$  tangential zum Kreisbogen. Diese Kraft kann man nach Abb.12 und weil  $\vec{G} = m \cdot \vec{g}$  ist, berechnen als:

$$(8) \quad F_t(\alpha(t)) = -m \cdot g \cdot \sin(\alpha(t)),$$

wobei m die Masse des Körpers und g der Betrag der Erdbeschleunigung ist. Im Folgenden ist mit  $\alpha$  immer  $\alpha(t)$  gemeint.

Daraus ist zu ersehen, dass zwischen der rücktreibenden Kraft und der Auslenkung keine proportionale Beziehung besteht. Die Pendelschwingung ist also keine harmonische Schwingung.

Aus dem obigen Kraftgesetz kann die zugehörige Differenzialgleichung hergeleitet werden. Die linke Seite wird aufgrund des zweiten Newtonschen Axiom durch  $m \cdot a_t$  ersetzt. Die Beschleunigung  $a_t$  eines Körpers, der sich auf einem Kreis mit dem Radius l bewegt, beträgt  $l \cdot \ddot{\alpha}$ . Hierbei ist  $\alpha$  der Drehwinkel des Pendels aus der Ruhelage. Nach Division durch  $l \cdot m$  erhält man dann:

$$(9) \quad \ddot{\alpha} = -\frac{g}{l} \cdot \sin(\alpha)$$

Aus dieser DGL 2.Ordnung kann durch Einführung einer zusätzlichen Variablen, der Winkelgeschwindigkeit,  $\omega = \dot{\alpha}$  das System von zwei DGL erster Ordnung hergeleitet werden:

$$(10) \quad \dot{\alpha} = \omega \quad \text{und} \quad \dot{\omega} = -\frac{g}{l} \cdot \sin(\alpha)$$

In der Nomenklatur des Rechners ergibt sich daraus dann:

$$(11) \quad y1' = y2 \quad \text{und} \quad y2' = -\frac{g}{l} \cdot \sin(y1)$$

Der Einfachheit halber wird  $\frac{g}{l} = 1 \frac{(\text{rad})^2}{\text{s}^2}$  gewählt und der Anfangswert der Geschwindigkeit auf  $0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , gesetzt. Die Auslenkung wird im Intervall  $[0;\pi]$  mit einem Schieberegler variiert.



Das System (11) wird nun in den Rechner eingegeben. Es wird sowohl die Auslenkung (schwarz) als auch die Winkelgeschwindigkeit (rot) in Abhängigkeit von der Zeit dargestellt.

Die folgenden Abbildungen 13 und 14 geben einen ersten Eindruck über den Verlauf der Auslenkung und der Geschwindigkeit in Abhängigkeit von dem jeweils gewählten Anfangswert der Auslenkung. Dabei sind die Maßstäbe auf den Achsen unverändert gelassen worden, damit auch die Änderungen der Größe der Auslenkung, der Geschwindigkeit und der Frequenz deutlich werden.

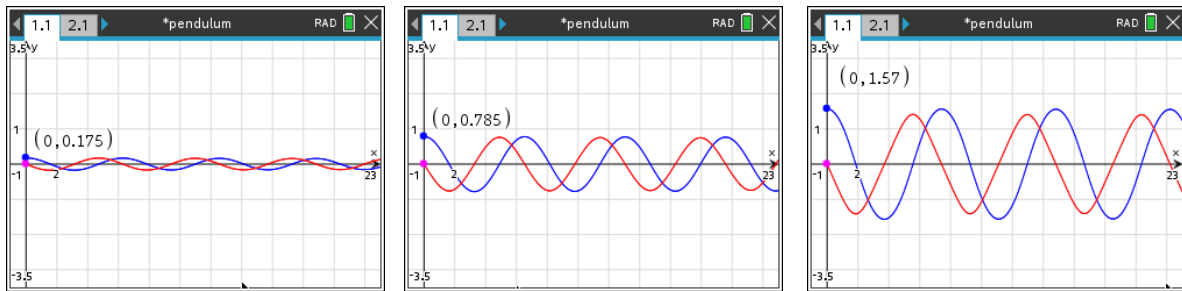


Abb. 13:  $10^\circ \sim 0.175 \text{ rad}$

$45^\circ \sim 0.785 \text{ rad}$

$90^\circ \sim 1.57 \text{ rad}$

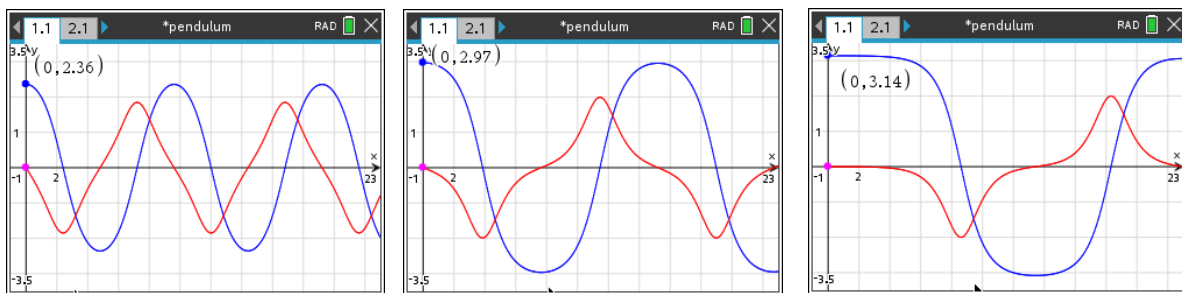


Abb. 14:  $135^\circ \sim 2.36 \text{ rad}$

$170 \sim 2.79 \text{ rad}$

$179.9^\circ \sim 3.14 \text{ rad}$

Solange die Auslenkungen zu Beginn (s. Abb.13, Bild 1) klein sind, sind die Graphen von  $y_1$  und  $y_2$  offensichtlich sinusförmig. In dem Bereich zeigt die Bewegung alle Anzeichen einer harmonischen Schwingung. Erst bei Vergrößerung der Auslenkung werden die Abweichungen gegenüber harmonischen Schwingungen deutlich. Außerdem verändert sich nun auch die Frequenz der Schwingungen mit der Größe der Anfangsauslenkung des Pendels.

Die auftretenden Kräfte, die die Pendelbewegung verursachen, werden durch die Gleichung (8) beschrieben. Im Gegensatz zu dem linearen Kraftgesetz nach Gleichung (3) sind die

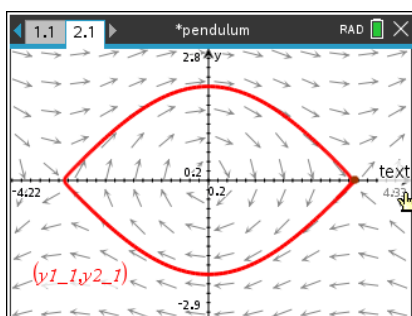


Abb.15: Phasendiagramm, Anfangswert  $179,9^\circ \sim 3,14$

Kräfte durch den Faktor  $\sin\alpha$  beschränkt. Das erzwingt eine Verlangsamung der Bewegung und eine Vergrößerung der Schwingungsdauer. Da insbesondere die rücktreibenden Kräfte bei Winkel über  $90^\circ$  ab- statt zunehmen wie bei harmonischen Schwingungen, gibt es auch deutliche Abweichungen von sinusförmigen Graphen. Statt die gezeigten zeitlichen Verläufe von  $y_1$  und  $y_2$  zu untersuchen, ist es auch ebenso möglich die Phasendiagramme zu betrachten. In Abb.15 ist  $y_2$  in Abhängigkeit von  $y_1$  (Abb.14, letztes Bild) für eine Auslenkung von  $179,9^\circ$

gezeichnet. In der Darstellung beginnt die Bewegung am roten Punkt (maximale Auslenkung). Die Richtungspfeile zeigen an, dass die Kurve im Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Der Vergleich mit Abb.11 zeigt deutlich den Unterschied zu einer harmonischen Schwingung.

### 3.2 Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

Die nachfolgende Untersuchung soll helfen, den Ablauf des Einsturzes der Tacoma-Brücke zu verstehen. Die Brücke führt offensichtlich Schwingungen unter Einwirken des Windes aus. Es wird nun vorgeschlagen, zunächst an einem einfachen Modell erzwungene Schwingungen zu untersuchen. Es ist es sinnvoll,

vor der mathematischen Modellierung der Vorgänge, die Bewegungen in der Realität zu sehen und zu untersuchen.

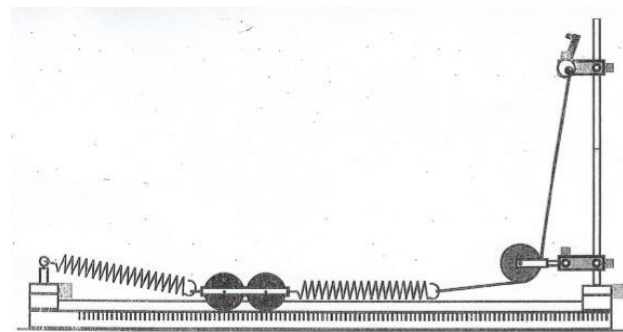


Abb.16: Experiment zur Untersuchung gedämpfter und erzwungener Schwingungen

Als Experiment kann dazu ein Wagen auf einer Fahrbahn<sup>1</sup> gewählt werden, der zwischen zwei Federn eingespannt ist. Wenn nun durch Drehung des Exzenters im oberen Teil der Skizze von Abb.16, periodische Kräfte auf den Wagen ausgeübt werden, so führt dieser erzwungene Schwingungen aus. Nach eigenen Experimenten stellen die Schülerinnen und Schüler dann fest:

1. Der Wagen bewegt sich nach einer Einschwingzeit nur noch im Rhythmus der anregenden Kraft.
2. Die Auslenkung des Wagens wird für einen relativen kleinen Frequenzbereich der Anregung deutlich größer als die Auslenkung der Anregung.

#### Gedämpfte Schwingungen

Zur Simulation des Experimentes ist die Kenntnis der auf den Wagen wirkenden Kräfte erforderlich. Zunächst wirkt die rücktreibende Kraft der Federn, wie sie in Abschnitt 2 Gleichung 2 als  $F(x) = -k \cdot x$  angegeben ist, auf den Wagen.

Die Amplitude realer Schwingungen nimmt aber bekanntlich mit der Zeit ab. Es tritt also neben einer rücktreibenden Kraft auch noch eine in gleicher Richtung wirkende Reibungskraft auf. Diese ist im Allgemeinen proportional zur Geschwindigkeit  $v$  des schwingenden Körpers.:

$$F_r = -r \cdot v = -r \cdot \dot{x}.$$

Darin ist  $r$  ein Maß für die Stärke der Dämpfung.

<sup>1</sup>: 2013, MEKRUPHY, Mechanik 6, Erzwungene Schwingungen, S. 24

Somit lautet das Kraftgesetz für die gedämpften Schwingungen des Wagens:

$$(12) \quad F(x(t)) = -k \cdot x(t) - r \cdot \dot{x}(t)$$

Analog zu dem Vorgehen in Abschnitt 2.2 erhält man das folgende System von Differenzialgleichungen erster Ordnung:

$$\dot{x}(t) = v(t) \text{ und } \dot{v}(t) = -\frac{k}{m} \cdot x(t) - \frac{r}{m} \cdot \dot{x}(t),$$

bzw. in der Nomenklatur des Rechners

$$(13) \quad y1' = y2 \text{ und } y2' = -\frac{k}{m} \cdot y1 - \frac{r}{m} \cdot y2$$

Zur Berechnung einer speziellen Lösung werden die Werte der Konstanten  $\frac{k}{m}$  und  $\frac{r}{m}$  benötigt. Den Schülerinnen und Schülern ist aus dem Unterricht bekannt, dass  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$  die Eigenfrequenz des Systems ist.

Es kann die Schwingungsdauer der Eigenschwingung (Abb.16) gemessen und daraus die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_0$  bestimmt werden. Alternativ kann  $\omega_0$  auch aus der Federkonstanten k und der Masse m des Wagens bestimmt werden.

$$\frac{k}{m} = 6,7 \text{ (rad/s)}^2$$

Der Parameter  $\frac{r}{m}$ , der die Dämpfung beschreibt, ist nicht so einfach der Versuchsanordnung zu entnehmen. Deshalb ist ein Schieberegler b für  $\frac{r}{m}$  eingeführt worden. Dieser wurde nun so eingestellt, dass der zeitliche Verlauf der numerisch berechneten Schwingung dem zeitlichen Verlaufs der Auslenkung des Wagens (s. Abb.15) möglichst ähnlich ist. Der Vergleich führte zu  $b = 0,25$ .

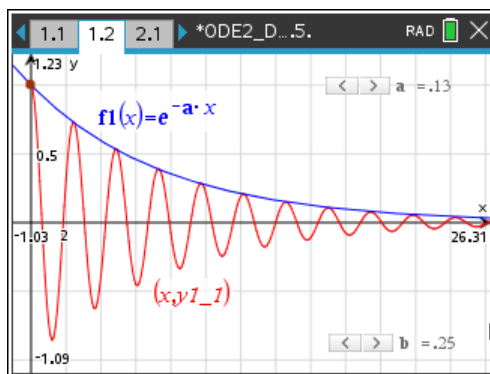


Abb.17: Phasendiagramm der gedämpften Schwingung

Mit den angegebenen Parametern werden die beiden Differenzialgleichungen von Gleichung (10) in das Menü der Applikation *Differenzialgleichungen* eingegeben. Das Ergebnis ist in Abb.16 zu sehen. Die berechnete gedämpfte Schwingung wird durch eine Kosinusfunktion beschrieben, deren Amplitude offensichtlich exponentiell abnimmt. Um das zu bestätigen, wurde zusätzlich der Funktionsgraph von f1 (s. Abb.17) eingezeichnet. Dabei wurde der Schieberegler für a so eingestellt, dass der Graph durch die Maxima des Graphen der numerischen Berechnung verläuft. Dies ist für  $a = 0,13 \frac{1}{s}$  der Fall. Aus diesen

Beobachtungen kann geschlossen werden, dass der zeitliche Verlauf der Schwingung gegeben ist durch:

$$(14) \quad e^{-a \cdot x} \cdot \cos(\sqrt{6,7} s^{-1} \cdot x).$$

(Die Variable x entspricht der Zeit t)

In Abb.18 ist die numerische Lösung durch den Graphen zum Term (14) modelliert. Das algebraische Modell und die numerische Berechnung stimmen für  $a = 0,13 \frac{1}{s}$  sehr gut überein.

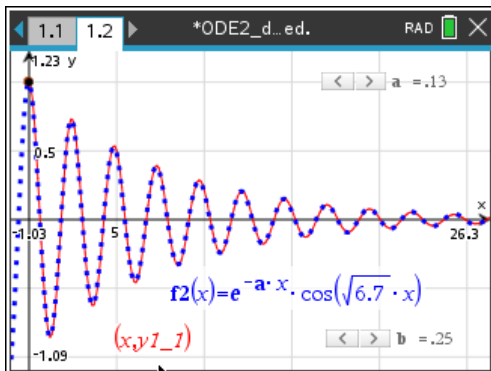


Abb.18: Modellierung des Graphen durch f1

Die numerische Lösung kann - in der in der Physik üblichen Schreibweise - durch die Funktionsgleichung

$$(15) \quad x(t) = e^{-a \cdot t} \cdot \cos(\sqrt{6,7} s^{-1} \cdot t)$$

algebraisch beschrieben werden.

Es ist noch zu klären, welcher Zusammenhang zwischen den beiden Parametern a und b besteht, die beide ein Maß für die Dämpfung darstellen. Bei dem durchgerechneten Beispiel zeigt sich, dass b etwa doppelt so groß ist wie a. Wenn dies für andere Werte von b durchgeführt wird, so erhält man das gleiche Ergebnis. Zieht man eine exakte Lösung der Differentialgleichung heran, so sieht man, dass das Abklingen der Schwingungen durch den Faktor  $e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{r}{m} \cdot t}$  bestimmt wird. Mit Schülerinnen und Schülern kann allerdings nur von der Vermutung  $a = \frac{1}{2} \cdot b = \frac{1}{2} \cdot \frac{r}{m}$  ausgegangen werden. Damit wird durch die vorangegangenen Überlegungen aus den numerischen Berechnungen auf eine algebraische (exakte) Lösung geschlossen:

$$(16) \quad x(t) = e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{r}{m} \cdot t} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)$$

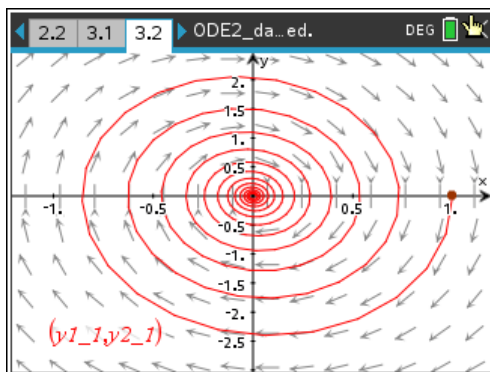


Abb.19: Phasendiagramm einer gedämpften Schwingung

Abschließend wird noch das Phasendiagramm (Abb.18) der gedämpften Schwingung dargestellt, in dem die Geschwindigkeit des Schwingers als Funktion der Auslenkung dargestellt wird. Es zeigt sehr deutlich das exponentielle Abklingen der Schwingungen.

## Erzwungene Schwingungen

Nach den ausführlichen Untersuchungen der gedämpften Schwingungen des Wagens kann nun auch die Differenzialgleichung für die Bewegungen des Wagens (Abb.16) unter dem Einfluss einer periodischen äußeren Kraft aufgestellt werden.

Die äußere Kraft beträgt bei gleichmäßiger Drehung der Kurbel:  $F_0 \cdot \sin(\omega t)$ , wobei  $\omega$  die Frequenz der anregenden Kraft und  $F_0$  die Amplitude der Kraft sind. Für die auftretenden Kräfte gilt dann

$$(17) \quad m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x(t) - r \cdot \dot{x}(t) + F_0 \cdot \sin(\omega t).$$

Dann lautet zugehörige inhomogene Differenzialgleichung zweiter Ordnung:

$$(18) \quad \ddot{x} = -\frac{k}{m} \cdot x(t) - \frac{r}{m} \cdot \dot{x}(t) + \frac{F_0}{m} \cdot \sin(\omega t).$$

Für die numerische Lösung von Gleichung (15) wird wieder ein System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung erforderlich - für die Ortskoordinate und die Geschwindigkeit. In der Nomenklatur des Rechners erhält man dann:

$$(19) \quad y1' = y2 \text{ und } y2' = -\frac{k}{m} \cdot y1(t) - \frac{r}{m} \cdot y2(t) + \frac{F_0}{m} \cdot \sin(\omega x),$$

Folgende Parameter werden aus der Bearbeitung der gedämpften Schwingung übernommen:

$\frac{r}{m} = 0,25 \cdot \frac{1}{s}$ , Kreisfrequenz  $0,1 \frac{rad}{s} < a < 4 \frac{rad}{s}$  ( $\omega$  wird durch  $a$  ersetzt) und das Messintervall auf 40 s gesetzt. Als Beschleunigung durch die anregende Kraft wurde  $\frac{F_0}{m} = 0,25 \frac{1}{s^2}$  gewählt.

Diese Daten werden dann als Parameter in die App für numerischen Differenzialgleichungen des TI-Nspire eingegeben.

In den folgenden Darstellungen ist die Kreisfrequenz mit einen Schieberegler (Variable w) variiert worden. Die Skalierungen der Achsen sind konstant gehalten, damit die Größenunterschiede der Amplituden erkennbar sind.

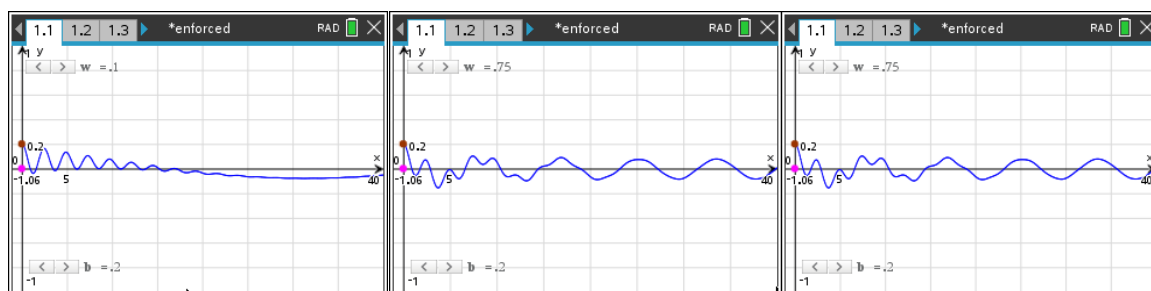


Abb.20: Periode  $T \cong 63s$

$T \cong 8,4s$

$T \cong 4,2s$

Zu Beginn der Anregung wird der Wagen durch die Auslenkung mit der Kurbel zunächst ausgelenkt. Dies führt dazu, dass der Wagen dadurch zu einer gedämpften Schwingung mit der Eigenfrequenz des Systems angeregt wird, die sich der periodischen Anregung überlagert, wie das in Abb.20 zu sehen ist. Nach einer Einschwingphase von ca. 20s ist die gedämpfte Schwingung abgeklungen und es stellt sich danach eine stationäre Schwingung des Wagens

mit der Frequenz der Anregung ein. Für sehr kleine Frequenzen ist dann die Amplitude des Wagens nur ebenso groß wie die Auslenkung durch den Exzenter.

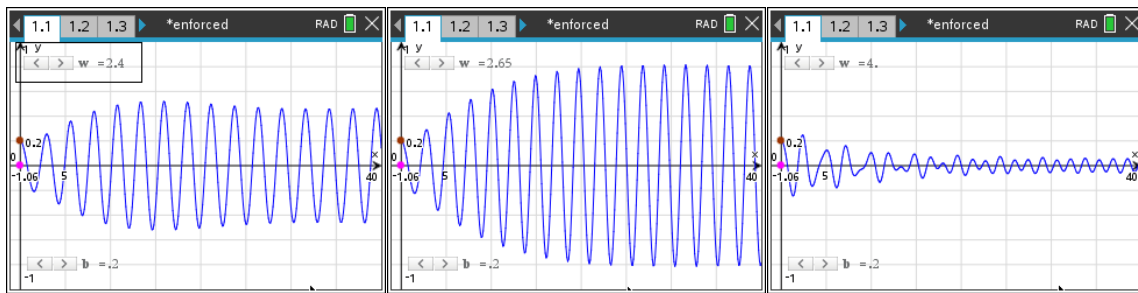


Abb.21: Periode  $T \cong 2,62s$

$T \cong 2,46s$

$T \cong 1,57s$

Sowie sich die Anregungsfrequenz der Resonanzfrequenz des eingespannten Wagens annähert (Abb.21 Bild 1 und 2), wächst die Amplitude der Bewegungen des Wagens bis auf etwa das Zwanzigfache der Auslenkung der Anregung an. Danach fällt sie wieder ab und geht für hohe Frequenzen gegen Null.

Diese qualitative Auswertung der numerischen Lösung ermöglicht den Schülerinnen und Schülern bereits eine physikalische Erklärung der Schwingungen der Brücke und des Einsturzes. Vom Standpunkt der Physik ist es aber zufriedenstellender, wenn auch eine quantitative Aussage für erzwungene Schwingungen möglich ist. Aus den graphischen Darstellungen der Lösungen für verschiedene Anregungsfrequenzen können die stationären Auslenkungen des Wagens nach den Einschwingvorgängen bestimmt werden.

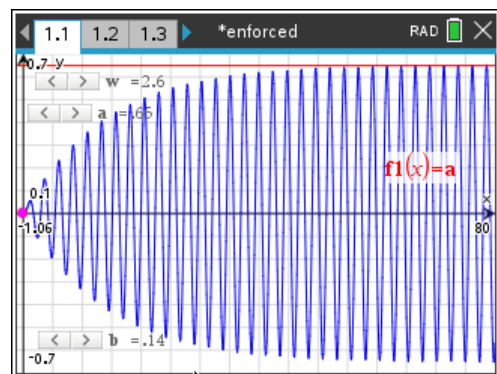
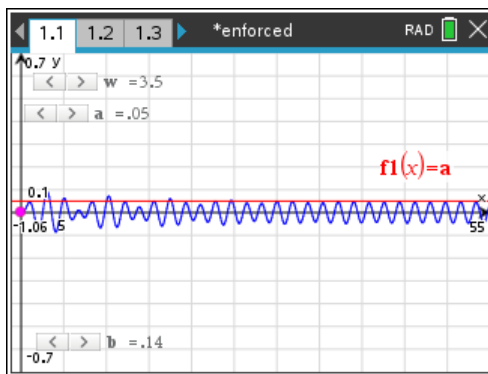


Abb.22 : Zeichnen von  $f1(x)$  durch die Maxima der Auslenkungen.

Da bei der Graphik für die App *Differenzialgleichungen* die Koordinaten für Punkte nicht angezeigt werden, werden in die Graphik Funktionen zu  $f1(x) = a$  eingezeichnet. Der Parameter  $a$  wird dabei durch einen Schieberegler so gewählt, dass die Parallele zur x-Achse nach dem der Einschwingvorgang durch die Maxima der Auslenkung verläuft wie in Abb.22 gezeigt ist.

A	frequenz	B	amplit...	C	relamp
=				=	amplitude/(0.035)
13	2.55	0.59			16.8571
14	2.6	0.64			18.2857
15	2.65	0.52			14.8571
16	2.7	0.35			10.
17	2.75	0.25			7.14286

Die Amplituden und die zugehörigen Frequenzen werden gemessen und die Werte zunächst in die Tabellenkalkulation des TI-Nspire eingegeben. Diese Messwerte werden anschließend durch den Wert der Amplitude der periodischen Anregung des Exzentrers geteilt und in der dritten Spalte berechnet. (Diese Normierung macht den Vergleich unterschiedlicher Systeme möglich.)

Abb.23: Frequenz und Amplitude

Nun können die relativen Amplituden gegen die Frequenz dargestellt werden (Abb.24). Diese Graphik zeigt sehr deutlich die Resonanzüberhöhung, wenn die Anregung mit der Resonanzfrequenz erfolgt. In dem Fall ist die Schwingung des Wagens fast zwanzigmal größer als die Anregung.

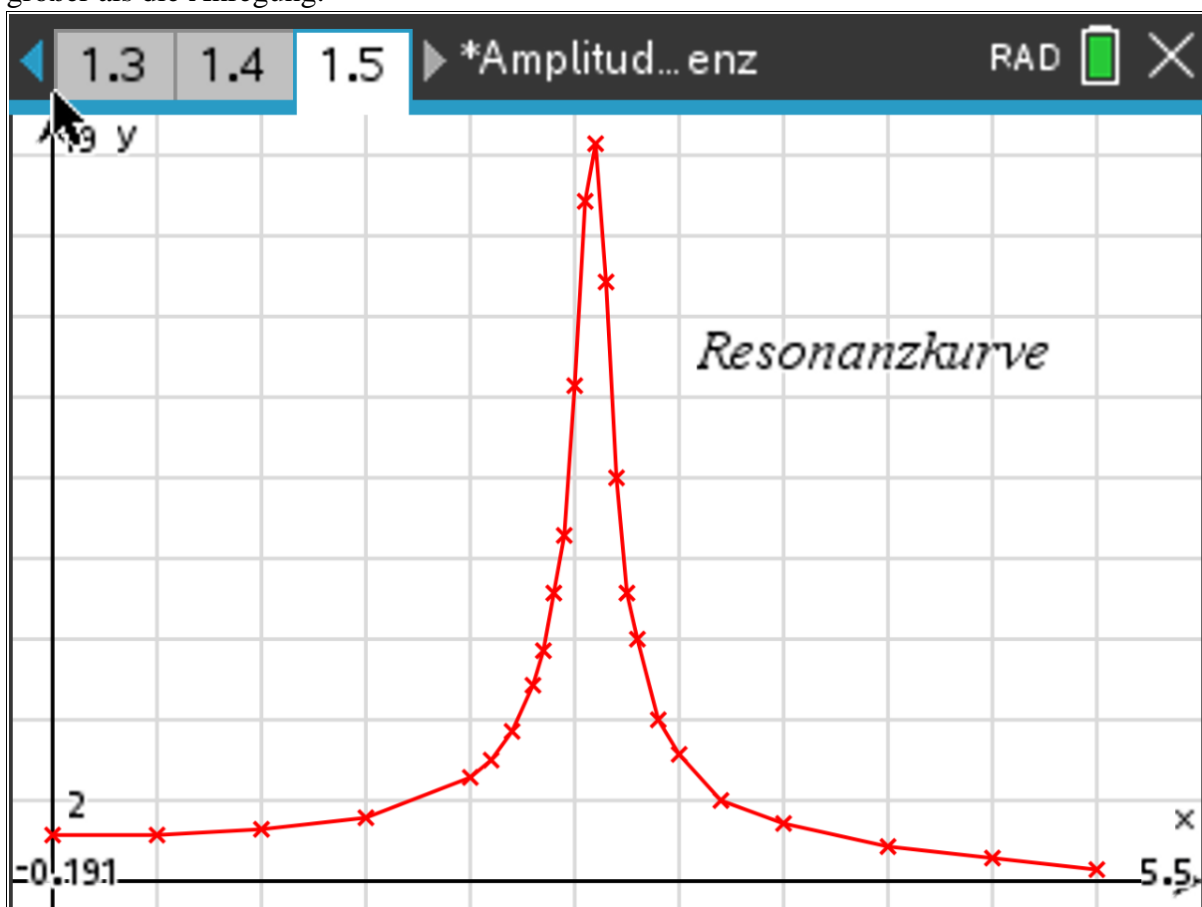


Abb.24: Resonanzkurve des Modells für erzwungene Schwingungen

Die Rechnungen können für andere Dämpfungen fortgesetzt werden, um das Phänomen der erzwungenen Schwingungen auch unter anderen Bedingungen kennenzulernen.

Bei dem untersuchten Modell für erzwungene Schwingungen war es nicht möglich, die Energiezufuhr soweit zu erhöhen, dass eine Resonanzkatastrophe eintritt. Als kleines Bonbon für so langes Durchhalten sollte man deshalb als Lehrkraft zum Abschluss ein Weinglas mit

einem Lautsprecher mit der richtigen Frequenz und ausreichender Lautstärke zerspringen lassen.

Zum Abschluss wird dann noch die **Definition des Begriffs „Resonanzkatastrophe“ durch Wikipedia** den Schülerinnen und Schülern vorgestellt und mit ihnen diskutiert.

*Die **Resonanzkatastrophe** bezeichnet in der Mechanik und Konstruktion die Zerstörung eines Bauwerks oder einer technischen Einrichtung durch übermäßige Schwingungsamplituden im Resonanzfall.<sup>[1]</sup> Bei einer periodisch wiederkehrenden Anregung, deren Frequenz mit einer Resonanzfrequenz übereinstimmt, wird immer mehr Energie auf das System übertragen und dort gespeichert (konstruktive Interferenz). Die Schwingungsenergie wird durch stets vorhandene Dämpfungseffekte teilweise aus dem System abgeführt. Falls der Energieeintrag die Verlustleistung überschreitet, wird die Schwingungsamplitude immer größer, bis die Belastungsgrenze überschritten ist.*

#### **4. Zusammenfassung**

Die funktionale Beschreibung der Resonanzkurve kann nur aus der exakten Lösung der zugehörigen Differenzialgleichung hergeleitet werden. Dafür fehlen aber den Schülerinnen und Schülern im Allgemeinen die notwendigen mathematischen Kenntnisse.

Mit dieser Ausarbeitung über die numerische Lösung der entsprechenden Differenzialgleichung ist gezeigt worden, dass es gelingt den Verlauf der Resonanzkurve zu bestimmen und zu zeichnen (Abb.24)

Email: kh.keunecke@keukiel.de