Neue Aufgaben für das Unterrichten mit Derive & TI-89/92/92+/Voyage 200 Band 2

Josef Böhm

bk teachware Schriftenreihe Nr. SR-34, ISBN 3-901769-52-8

Vorwort

Im zweiten Band meiner „Neuen Aufgaben“ finden Sie wieder „Alte Aufgaben“, die den Erfordernissen eines technologie-gestützten Mathematikunterrichts entsprechen. Selbst abgestandene Themen können wieder attraktiv werden. Nehmen Sie als Beipiel den „Tilgungsplan“. Diese finanzmathematische Anwendung ist – zu Recht – aus fast allen unseren Lehrbüchern verschwunden, weil sie nur eine Sammlung von Formeln darstellte. Nun können wir das wichtige Prinzip der Rekursion anhand dieses Tilgungsplans behandeln und unsere Schüler in eine andere Denkweise wie früher einführen.

Aus Zeitgründen blieb früher die geforderte Vernetzung von mathematischen Teilgebieten meist auf der Strecke. Entweder wurde das eine Thema behandelt, oder eben das andere. Eine Aufgabe aus einer „Problemslöse- und Gruppenschularbeit“ soll zeigen, wie sich in einem Beispiel Trigonometrie und analytische Geometrie ergänzen können.

Fast alle dieser Aufgaben sind im Zusammenwirken mit meinen Kolleginnen und Kollegen an der Handelsakademie St. Pölten für Reifeprüfungen (Matura, Abitur) entstanden. Ich möchte Ihnen allen – Tania Koller, Günter Schraik, Beate Sochurek, und Susanne Waach – für die langjährige freundschaftliche und fruchtbare Zusammenarbeit danken. Sie teilten mein Interesse für eine stetige Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts an unserer Schule. Es ist aber auch der Schulaufsicht, der Schulleitung und nicht zuletzt den Schülern zu danken, dass sie immer für unsere Ideen offen waren.

Die Aufgaben sind auf meinen beiden bevorzugten CAS-Plattformen – *DERIVE* und die Famile der *TI*-Symbolrechner (*TI*-89/92/92+/Voyage 200[1]) dargestellt. Sie können aber leicht auf jedes andere gängige CAS übertragen werden.

Wenn Sie den einen oder anderen Trick hier erfahren können, dann ist dies ein angenehmer Nebeneffekt, wenn Sie eine intensivere Einführung ins Arbeiten mit diesen Technologien wünschen, dann möchte ich Sie auf das sehr umfangreiche und kompetente Material von *bk teachware* hinweisen.

Ich möchte meine Aufforderung aus Band 1 an Sie, geschätzte Leserin und geschätzter Leser, gerne wiederholen: Nehmen Sie das eine oder andere Beispiel als Anregung, um Ihre eigenen Schätze ein wenig aufzupolieren und sie werden sehen, dass sich mancher matte Stein als wahrer funkelnder Edelstein entpuppt.

Ich freue mich über jeden Kontakt.

Schreiben Sie mir

nojo.boehm@pgv.at

[1] Im weiteren Text werden alle TI-Modelle gemeinsam als *TI* angesprochen, außer wenn das eine oder andere Modell Besonderheiten aufweist.

Kliometerthal Euer Urpokal

Teilaufgabe b) macht DERIVE für die Bearbeitung besonders attraktiv. Mittels geeigneter Ungleichungen lässt sich der Querschnitt des Pokals sehr schön darstellen. Beim TI ist die shade-Funktion einzusetzen, wobei man entweder mit stückweise definierten Funktionen arbeitet, oder die Flächen teilweise schraffiert. Die Integrationsaufgaben sind Standard, wobei aber die CAS-Ausgabe in d) eine anspruchsvolle Frage aufwirft. Die Frage nach der dünnsten Stelle führt zu einem nichtlinearen Gleichungssystem und erfordert einige Überlegungen, bzw. einiges Experimentieren.

Ein Messingpokal entsteht durch Rotation der Hyperbel h: $x^2 - y^2 = 4$ und der beiden Parabeln: $p_1: \ y = \dfrac{5x^2}{16}$ und $p_2: \ y = -a\,x^2 - 1$ für $-4 \le y \le 6$ um die y-Achse.

a) Wie lautet die vollständige Gleichung von p_2, wenn der als Standfläche des Pokals auftretende Kreisring eine Dicke von 1 aufweist?

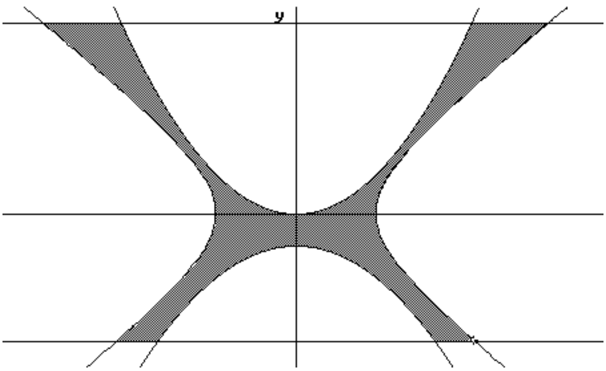
b) Stelle mit Hilfe eines geeigneten Werkzeugs den Querschnitt des Pokals ähnlich wie in der vorliegenden Abbildung dar.

c) Welche Masse hat der Pokal, wenn alle Maße Zentimeter sind und das spezifische Gewicht von Messing den Wert 8,4 hat?

d) Wieviel Flüssigkeit fasst der Pokal, wenn er randvoll gefüllt wird und wie hoch steht die Flüssigkeit, wenn 1/16 Liter hineingeleert wird? Begründe, warum es hier zu zwei Lösungen kommt und finde für die zweite Lösung eine Erklärung.

e) Wie groß ist die Fläche des Querschnitts?

f) Wie dünn ist der Pokal an seiner dünnsten Stelle?



Lösungsvorschlag:

a) Die Parabel p_2 geht durch den Punkt $(2\sqrt{5}-1/-4)$. Daher ergibt sich ihr Funktionsterm wie folgt:

$$\text{SOLVE}(-a\cdot(2\cdot\sqrt{5}-1)^2-1=-4,\ a)=\left[a=\frac{12\cdot\sqrt{5}}{361}+\frac{63}{361}\right]$$

$$y=-\left(\frac{12\cdot\sqrt{5}}{361}+\frac{63}{361}\right)\cdot x^2-1$$

b) Die Ungleichungen beschreiben den angegebenen Bereich:

$$y\ge -4\wedge y\le 6\wedge x^2-y^2\le 4\wedge y\le\frac{5\cdot x^2}{16}\wedge y\ge-\left(\frac{12\cdot\sqrt{5}}{361}+\frac{63}{361}\right)\cdot x^2-1$$

c) Zuerst werden das Volumen des Drehhyperboloids und des oberen Paraboloids berechnet, anschließend die Gleichung der unteren Parabel nach x^2 aufgelöst und das entsprechende Integral bestimmt.

$$\left[\pi\cdot\int_{-4}^{6}(4+y^2)\,dy,\ \pi\cdot\int_{0}^{6}\frac{16\cdot y}{5}\,dy\right]=\left[\frac{400\cdot\pi}{3},\ \frac{288\cdot\pi}{5}\right]$$

$$\text{SOLVE}\left(y=-\left(\frac{12\cdot\sqrt{5}}{361}+\frac{63}{361}\right)\cdot t-1,\ t\right)=\left(t=\frac{(y+1)\cdot(4\cdot\sqrt{5}-21)}{3}\right)$$

$$\pi\cdot\int_{-4}^{-1}\frac{(y+1)\cdot(4\cdot\sqrt{5}-21)}{3}\,dy=\pi\cdot\left(\frac{63}{2}-6\cdot\sqrt{5}\right)$$

Das Gesamtvolumen des Pokals ist 181,11 cm^3, seine Masse ist 1521 Gramm:

$$\frac{400\cdot\pi}{3}-\frac{288\cdot\pi}{5}-\pi\cdot\left(\frac{63}{2}-6\cdot\sqrt{5}\right)$$

$$181.1120034$$

$$181.1120034\cdot 8.4$$

$$1521.340828$$

d) Das Fassungsvermögen ist ein Teilergebnis von c) nämlich 288 $\pi/5\approx 180{,}96$ cm^3.

$$\text{SOLVE}\left(\pi\cdot\int_{0}^{t}\frac{16\cdot y}{5}\,dy=\frac{1000}{16},\ t\right)=\left(t=-\frac{25}{4\cdot\sqrt{\pi}}\vee t=\frac{25}{4\cdot\sqrt{\pi}}\right)$$

$$\text{APPROX}\left(\frac{25}{4\cdot\sqrt{\pi}}\right)=3.526184897$$

Die Flüssigkeit steht etwa 3,5cm hoch.

Die negative Lösung entsteht aus der zugrunde liegenden quadratischen Gleichung. Wenn man die negative Lösung in das Integral einsetzt, dann entsteht zwar vorerst ein positives Volumen für einen Parabelteil, den es unterhalb der x-Achse nicht gibt. Da die Grenzen verkehrt eingesetzt sind, ist aber das Vorzeichen des Integrals umzukehren, und das führt zu einem negativen Volumen. Dies ist Hinweis genug, dass für die zweite Lösung ein nicht reeller Kurvenast verantwortlich ist.

e) Hier ist es einfacher, längs der y-Achse zu integrieren:

$$\mathrm{SOLVE}(h,\ x) = \left(x = -\sqrt{(y^2 + 4)} \vee x = \sqrt{(y^2 + 4)}\right)$$

$$\mathrm{SOLVE}(p1,\ x) = \left[x = -\frac{4\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{y}}{5} \vee x = \frac{4\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{y}}{5}\right]$$

$$\mathrm{SOLVE}(p2,\ x) = \left[x = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{2\cdot\sqrt{15}}{3}\right)\cdot\sqrt{(-y-1)} \vee x = \sqrt{(-y-1)}\cdot\left(\frac{2\cdot\sqrt{15}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]$$

Bei Parabel p_2 muss noch der positive Ast identifiziert werden (die zweite Lösung). Damit ergibt sich der Flächeninhalt für den ganzen Querschnitt mit 19,94 cm^2.

$$\mathrm{APPROX}\left(2\cdot\left(\int_{-4}^{6} k1\ dy - \int_{0}^{6} k2\ dy - \int_{-4}^{-1} k3\ dy\right)\right) = 19.94141583$$

f) Die dünnste Stelle liegt wohl zwischen dem oberen Ast der Hyperbel h und der Parabel p_1. Sie liegt dort, wo der Normalabstand zwischen den beiden Kurven am kleinsten ist. Als Hauptbedingung definiert man das Abstandsquadrat, wobei aber zwei Variable bleiben. Man müsste einen Punkt auf einer Kurve fixieren, um den Punkt mit extremalem Abstand auf der anderen zu finden. Als Nebenbedingung legt man fest, dass die Anstiege in den Punkten auf beiden Kurven gleich sein müssen. Die Strategie ist einfach, die Rechnung recht kompliziert und die entstehende Gleichung nur mehr numerisch lösbar.

$$\mathrm{InputMode} := \mathrm{Word}$$

$$\mathrm{abst\_2} := (x1 - x2)^2 + \left(\frac{5\cdot x1^2}{16} - \sqrt{(x2^2 - 4)}\right)^2$$

$$\mathrm{SOLVE}\left(\frac{10\cdot x1}{16} = \frac{x2}{\sqrt{(x2^2 - 4)}},\ x1\right) = \left[x1 = \frac{8\cdot x2}{5\cdot\sqrt{(x2^2 - 4)}}\right]$$

$$\mathrm{abst\_d} := \mathrm{SUBST}\left(\mathrm{abst\_2},\ x1,\ \frac{8\cdot x2}{5\cdot\sqrt{(x2^2 - 4)}}\right)$$

$$\frac{d}{d\ x2}\ \mathrm{abst\_d} = 0$$

$$\mathrm{NSOLVE}\left(\frac{d}{d\ x2}\ \mathrm{abst\_d} = 0,\ x2,\ 0.5,\ 4\right)$$

$$x2 = 2.646271127$$

Durch Rücksubstitution erhält man die Stelle auf der anderen Kurve, bzw. die Wandstärke. Hier wurde mit `SUBST()` gearbeitet, es lässt sich aber auch mit definierten Funktionen vorgehen.

Die Wandstärke beträgt an ihrer dünnsten Stelle 0,24 cm.

$$\text{APPROX}\left(\text{SUBST}\left(\frac{8\cdot x2}{5\cdot\sqrt{x2^2-4}},\ x2,\ 2.646271127\right)\right) = 2.443400563$$

$$\left[2.443,\ \text{SUBST}\left(\frac{5\cdot x^2}{16},\ x,\ 2.44\right)\right]$$

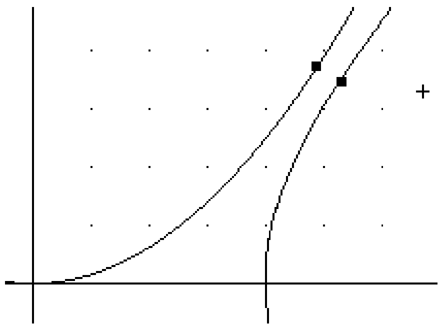
$$[2.443,\ 1.8605]$$

$$\left[2.646,\ \text{SUBST}(\sqrt{x^2-4}),\ x,\ 2.646)\right]$$

$$[2.646,\ 1.732430662]$$

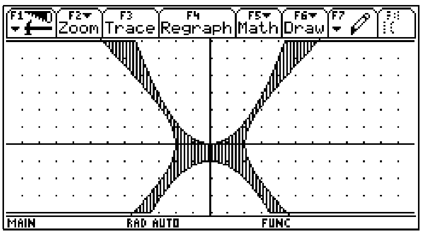
$$\text{APPROX}(\sqrt{(\text{SUBST}(abst\_d,\ x2,\ 2.646271127))}) = 0.2424957514$$

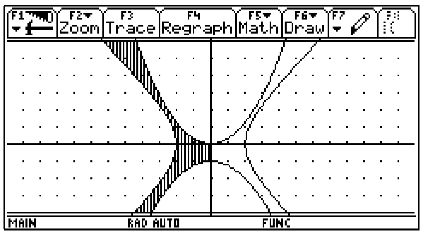
Die Übertragung der berechneten Punkte und eine Vergrößerung der Graphik bestätigen die Ergebnisse.



(Dies ist nicht die einzig denkbare Vorgangsweise: Im Rahmen eines Seminars arbeiteten Kollegen über die Kurvennormale an die Parabel in einem allgemeinen Punkt (x_0, y_0), schnitten diese mit der Hyperbel und erhielten mit dem Abstand der beiden Punkte die Hauptbedingung. Die Gleichungen werden dann noch „gewaltiger“, aber das Ergebnis wird bestätigt.)

So könnte der Querschnitt auf dem *TI* aussehen. Im linken Bild wurden die Begrenzungen des oberen und unteren Teils durch abschnittsweise definierte Funktionen beschrieben. Im rechten Bild wurde nur die linke Hälfte Schritt für Schritt von links nach rechts schattiert.





An einem Silvesterabend zu rechnen!

In dieser Aufgabe wird eine optisch ansprechende Figur erzeugt. Schwerpunkt ist aber der Umgang mit Transformationen von Funktionsgraphen (Spiegelung an den Achsen, Spiegelung an der Mediane und schließlich anspruchsvoller: eine zentrische Streckung oder Stauchung).

Darüber hinaus ist eine ausreichende Kompetenz im Umgang mit verschiedenen Darstellungsformen von Funktionen nachzuweisen.

Die Ausführung in DERIVE ist sehr ähnlich der hier angegebenen TI-Ausarbeitung.

Von einer Funktion 3. Grades kennt man die 2. Ableitung $y'' = -\frac{2x}{3}$ und einen Punkt P (6/-6) des Graphen. Der Funktionsgraph ist symmetrisch zum Ursprung.

a) Wie lautet die Funktionsgleichung?

b) Zeichne den Graphen für $-3\sqrt{2} \le x \le 3\sqrt{2}$. Spiegle diesen an der ersten Mediane und spiegle dann die so entstandene Figur an der y-Achse. Dokumentiere genau, wie die Graphen am Schirm entstehen.

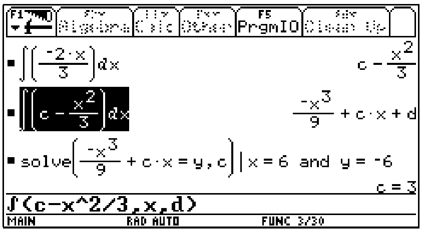
c) Beschreibe die entstandene Figur mit eigenen Worten.

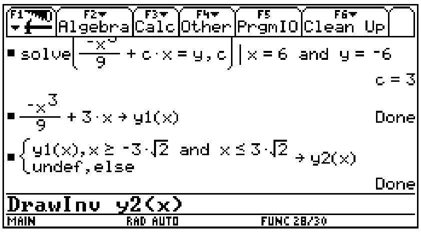
d) Dieser Figur ist ein Quadrat zu umschreiben. Wieviel Prozent der Quadratfläche werden von der Figur eingenommen?

e) Die in a) gefundene Funktionsgleichung ist durch eine Streckung oder Stauchung mit dem Koordinatenursprung als Zentrum so zu verändern, dass die entstehende, zu c) ähnliche Figur genau ein Drittel der Quadratfläche bedeckt.
Wie heißt die neue Funktionsgleichung?

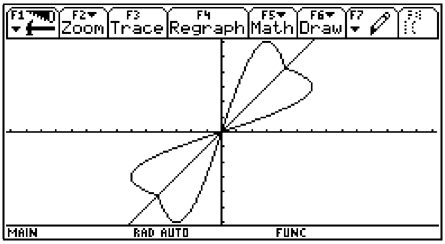
Lösungsvorschlag:

a) Der Funktionsterm lautet $y(x) = -\frac{x^3}{9} + 3x$.



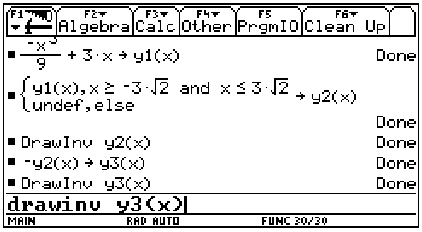


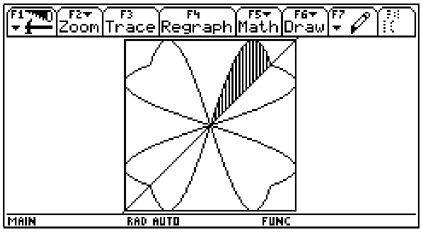
`∫(-2x/3,x,d)` erzeugt die Integrationskonstante d.

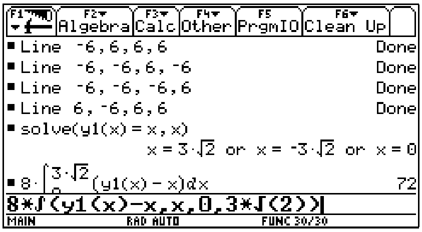


b) Der gespiegelte Graph entsteht als Umkehrfunktion, kann aber auch über eine Parameterdarstellung erhalten werden (siehe Punkt e)).

Ein Achtel des entstandenen *Kleeblatts* wurde über `shade` schraffiert und das umschriebene Quadrat mit dem `line`-Befehl dargestellt.







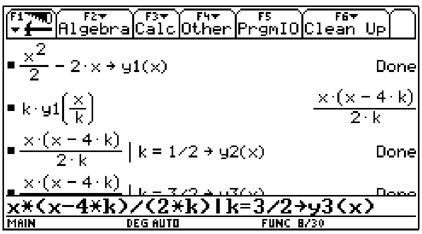
c) Es entsteht ein Kleeblatt.

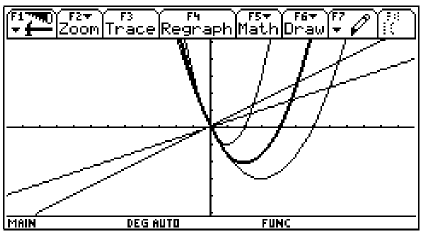
d) Die Fläche des Kleeblatts ist 72 und nimmt daher 50% der Fläche des um schriebenen Quadrats ein.

e) Ein kurze Überlegung zeigt, wie die zentrische Streckung/Stauchung mit dem Faktor k zustande kommen kann. Als Illustration dienen die nächsten beiden Bildschirme.

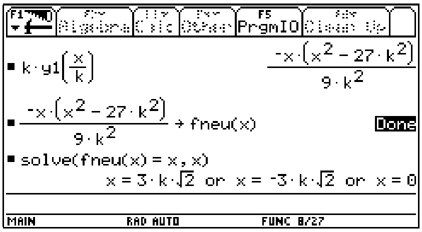
Jeder Punkt $(t, f(t))$ geht über in einen Punkt $(k \cdot t, k \cdot f(t))$.
Aus der Parameterdarstellung $[x = k \cdot t, y = k \cdot f(t)]$ kann leicht der Parameter t eliminiert werden und es ergibt sich die explizite Darstellung:

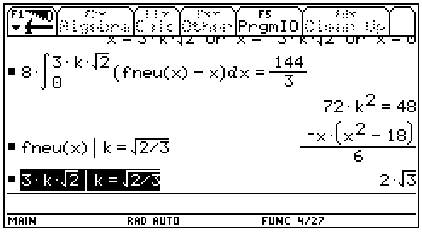
$$y(k, x) = k \cdot f\left(\frac{x}{k}\right)$$

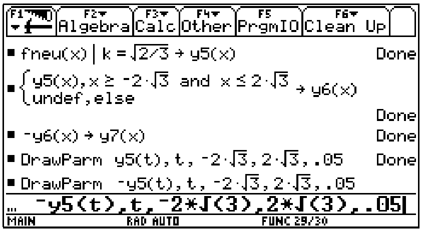


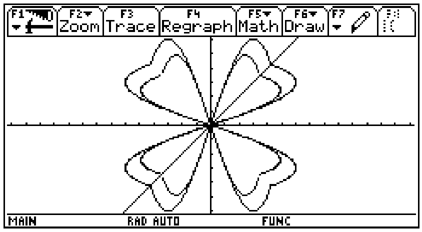


Diese Überlegung wird nun auf die gegebene Funktion angewendet.







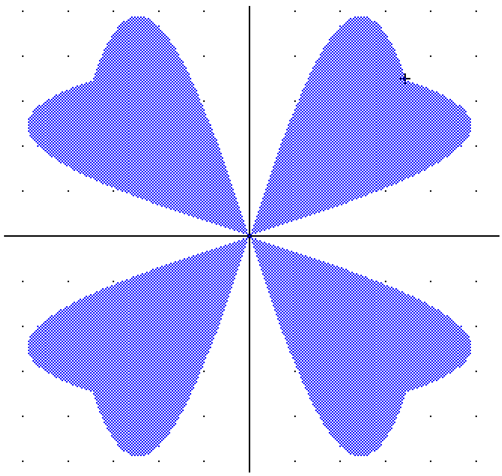


Die neue Funktionsgleichung lautet $y(x) = -\frac{x^3}{6} + 3x$ und sie entsteht durch Stauchung um den Faktor $k = \sqrt{(2/3)}$. Die Umkehrrelationen können sehr elegant über die Parameterdarstellung durch Vertauschen von Argument und Funktionswert gezeichnet werden.

Eine mögliche Durchführung des – interessanten – graphischen Teiles folgt.

$$f(x) := 3 \cdot x - \frac{x^3}{6}$$

```
y1(x) := [x, f(x)]
y2(x) := [f(x), x]
y3(x) := [x, - f(x)]
y4(x) := [- f(x), x]
[y1(x), y2(x), y3(x), y4(x)]
```



Dies führt zur geschlossenen Kleeblattfigur, wenn die Grenzen für den Parameter x mit $\pm 3\sqrt{2}$ angegeben werden.

Für die Einfärbung benötigen wir die Umkehrrelation – sie besteht aus drei Ästen:

$$\mathrm{SOLVE}\left(x = 3\cdot y - \frac{y^3}{6},\ y\right)$$

$$y = 2\cdot\sqrt{6}\cdot\mathrm{COS}\left(\frac{\mathrm{ACOS}\left(-\frac{\sqrt{6}\cdot x}{12}\right)}{3}\right) \vee y = -\ 2\cdot\sqrt{6}\cdot\mathrm{SIN}\left(\frac{\mathrm{ASIN}\left(\frac{\sqrt{6}\cdot x}{12}\right)}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \vee y = 2\cdot\sqrt{6}\cdot\mathrm{SIN}\left(\frac{\mathrm{ASIN}\left(\frac{\sqrt{6}\cdot x}{12}\right)}{3}\right)$$

Die drei Teile der Umkehrrelation werden identifiziert und dann lässt sich die ganze Figur - hier das kleinere Kleeblatt - über Ungleichungen stückweise einfärben.

$$g1(x) := 2\cdot\sqrt{6}\cdot\mathrm{COS}\left(\frac{\mathrm{ACOS}\left(-\frac{\sqrt{6}\cdot x}{12}\right)}{3}\right)$$

$$g2(x) := -\ 2\cdot\sqrt{6}\cdot\mathrm{SIN}\left(\frac{\mathrm{ASIN}\left(\frac{\sqrt{6}\cdot x}{12}\right)}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$g3(x) := 2\cdot\sqrt{6}\cdot\mathrm{SIN}\left(\frac{\mathrm{ASIN}\left(\frac{\sqrt{6}\cdot x}{12}\right)}{3}\right)$$

$$[g3(x) \le y \le f(x) \wedge 0 \le x \le 2\cdot\sqrt{3},\ g3(x) \le y \le g1(x) \wedge 2\cdot\sqrt{3} \le x \le 2\cdot\sqrt{6},\ g3(x) \ge y \ge f(x) \wedge 0 \ge x \ge -\ 2\cdot\sqrt{3},\ g2(x) \le y \le g3(x) \wedge -\ 2\cdot\sqrt{6} \le x \le -\ 2\cdot\sqrt{3},\ -\ g3(x) \ge y \ge -\ f(x) \wedge 0 \le x \le 2\cdot\sqrt{3},\ -\ g3(x) \le y \le -\ f(x) \wedge 0 \ge x \ge -\ 2\cdot\sqrt{3},\ -\ g1(x) \le y \le -\ g3(x) \wedge 2\cdot\sqrt{3} \le x \le 2\cdot\sqrt{6},\ -\ g3(x) \le y \le -\ g2(x) \wedge -\ 2\cdot\sqrt{6} \le x \le -\ 2\cdot\sqrt{3}]$$

Nur eine Schar von Kurven?

Im Vordergrund steht hier eine sehr traditionelle innermathematische Aufgabenstellung, eine Kurvendiskussion. Es werden aber viele Themen angesprochen, die nur mit großem Rechenaufwand durchgeführt werden könnten und wobei der operationale Teil den Blick für das Wesentliche verstellen würde. Die Frage nach dem Unterschied der Scharen mit positiven oder negativen Parameterwerten, sowie Frage f) erfordern ein richtiges Interpretieren der Lösung einer Gleichung. Auch bei Teilaufgabe d) ist die Lösungsstrategie wichtiger als das Lösen der Gleichung – es läuft immer wieder auf das Lösen von biquadratischen Gleichungen hinaus. Man könnte als Zusatz fordern, dass eine derartige biquadratische Gleichung händisch gelöst wird, wenn man unbedingt darauf Wert legt.

Es zeigt sich, dass die Schüler durchaus bereit sind, auch derartige Probleme zu lösen und ihren Ehrgeiz darein legen, auch Antworten zu finden.

Gegeben ist eine Kurvenschar $y_a(x) = -\frac{x^4}{4a} + \frac{x^2}{2} + \frac{3a}{4}$; $a > 0$.

a) Untersuche die Schar allgemein auf Symmetrie, Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte. Suche die Ortslinie der Extremwerte und Wendepunkte.
Wie unterscheiden sich diese Graphen qualitativ von denen mit $a < 0$?

b) Für welchen Wert von a nimmt die Fläche zwischen Graph und x-Achse den Wert $A = 100$ an?

c) Lege eine Verbindungsgerade durch die beiden Wendepunkte. Diese Gerade bildet mit dem Graphen insgesamt drei Flächen. Welches Verhältnis haben die Flächeninhalte?

d) In welchem Abstand zur x-Achse muss man eine Horizontale legen, dass die entstehenden drei Geradenabschnitte zwischen den Schnittpunkten gleich lang sind?

e) Verifiziere die Ergebnisse von c) und d) für $a = 10$.

f) Angenommen, es bestünde eine zweite allgemeine Funktion $y_b(x)$ mit $b > 0$ and $a \neq b$. Begründe, warum die beiden Funktionsgraphen keine reellen Schnittpunkte haben können.

Lösungsvorschlag:

a) Alle Graphen sind symmetrisch zur y-Achse (gerade Funktionen). Die Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte findet man leicht:

$$N_{1,2} = (\pm\sqrt{3a}\ /\ 0);\ \ E_1 = (0\ /\ \tfrac{3a}{4}) = Min.;\ \ E_{2,3} = (\pm\sqrt{a}\ /\ a) = Max.$$

$$W_{1,2} = \left(\pm\sqrt{\tfrac{a}{3}}\ /\ \tfrac{8a}{9}\right)$$

$$f(x, a) := -\frac{x^4}{4\cdot a} + \frac{x^2}{2} + \frac{3\cdot a}{4}$$

$$\text{SOLVE}(f(x, a) = 0, x) = (x = -\sqrt{(-a)} \vee x = \sqrt{(-a)} \vee x = -\sqrt{3}\cdot\sqrt{a} \vee x = \sqrt{3}\cdot\sqrt{a})$$

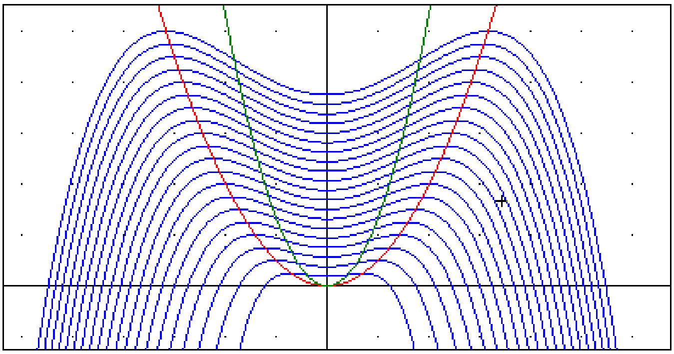
$$\text{SOLVE}\left(\frac{d}{dx} f(x, a) = 0, x\right) = (x = -\sqrt{a} \vee x = \sqrt{a} \vee x = 0)$$

$$\text{SOLVE}\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x, a) = 0, x\right) = \left(x = -\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{a}}{3} \vee x = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{a}}{3}\right)$$

Man erkennt, dass die Kurven der „negativen“ Schar zwei Nullstellen, aber nur einen Extremwert und keine Wendepunkte aufweisen können.

Die Suche nach den Ortslinien erfolgt durch Nullsetzen von erster, bzw. zweiter Ableitung und Elimination des Parameters *a* aus diesen Ableitungen gemeinsam mit dem Funktionsterm. Beide Ortslinien stellen sich als Parabeln mit ihren Scheiteln im Koordinatenursprung heraus.

$$\left[\text{ewkve} := f(x, x^2),\ \text{wpkve} := f(x, 3\cdot x^2)\right] = \left[x^2,\ \frac{8\cdot x^2}{3}\right]$$



b) *a* ≈10,92

$$\int_{-\sqrt{3}\cdot\sqrt{a}}^{\sqrt{3}\cdot\sqrt{a}} f(x, a)\, dx = 100$$

$$\frac{8\cdot\sqrt{3}\cdot a^{3/2}}{5} = 100$$

$$\text{NSOLVE}\left(\frac{8\cdot\sqrt{3}\cdot a^{3/2}}{5} = 100,\ a,\ \text{Real}\right)$$

$$a = 10.91975584$$

c) Zuerst bestimmt man die Schnittpunkte, um die Integrationsgrenzen zu erhalten. Linker und rechter Flächenteil müssen aus Symmetriegründen gleich sein. Der mittlere Teil ergibt sich als doppelt so groß wie die beiden benachbarten.
Das Flächenverhältnis ist daher von links nach rechts 1 : 2 : 1.

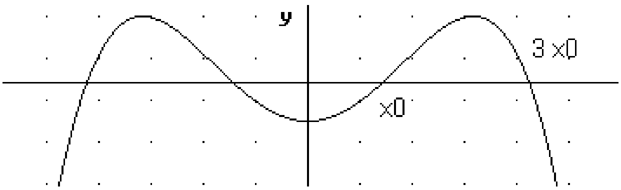
$$\text{SOLVE}\left(f(x, a) = \frac{8 \cdot a}{9}, x\right)$$

$$x = -\frac{\sqrt{15} \cdot \sqrt{a}}{3} \vee x = \frac{\sqrt{15} \cdot \sqrt{a}}{3} \vee x = -\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{a}}{3} \vee x = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{a}}{3}$$

$$\left|\int_{-\sqrt{15} \cdot \sqrt{a}/3}^{-\sqrt{3} \cdot \sqrt{a}/3} \left(f(x, a) - \frac{8 \cdot a}{9}\right) dx\right| = \frac{4 \cdot \sqrt{3} \cdot |a|^{3/2}}{135}$$

$$\int_{-\sqrt{3} \cdot \sqrt{a}/3}^{\sqrt{3} \cdot \sqrt{a}/3} \left(f(x, a) - \frac{8 \cdot a}{9}\right) dx = -\frac{8 \cdot \sqrt{3} \cdot a^{3/2}}{135}$$

d) Aus der Skizze entnimmt man, dass die Abschnitte genau dann gleich sind, wenn die Punkte mit den x-Koordinaten x_0 und $3x_0$ in einer Höhe liegen.



$$\text{SOLVE}\left(-\frac{(3 \cdot x)^4}{4 \cdot a} + \frac{(3 \cdot x)^2}{2} + \frac{3 \cdot a}{4} = -\frac{x^4}{4 \cdot a} + \frac{x^2}{2} + \frac{3 \cdot a}{4}, x\right)$$

$$x = -\frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{a}}{5} \vee x = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{a}}{5} \vee x = 0$$

$$f\left(\frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{a}}{5}, a\right) = \frac{21 \cdot a}{25}$$

e) Die Gerade ist im Abstand $\dfrac{21a}{25}$ zu legen. Für $a = 10$ verifiziert sich das leicht.

$$\#24: \quad f(x, 10) = \frac{210}{25}$$

$$\#25: \quad \text{SOLVE}\left(f(x, 10) = \frac{210}{25}, x, \text{Real}\right)$$

$$\#26: \quad x = -3 \cdot \sqrt{2} \vee x = 3 \cdot \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$$

x1= - $3\sqrt{2}$, x2 = -$\sqrt{2}$, x3=$\sqrt{2}$ und x4 = $3\sqrt{2}$. Die Abstände sind überall gleich mit 2 $\sqrt{2}$.

f) Wenn man die beiden Funktionen schneidet, erkennt man, dass es wegen (-*b*)^(1/4) keine reellen Lösungen geben kann.

$$\text{SOLVE}(f(x, a) = f(x, b), x, \text{Real})$$

$$x = -3^{1/4} \cdot a^{1/4} \cdot (-b)^{1/4} \vee x = 3^{1/4} \cdot a^{1/4} \cdot (-b)^{1/4}$$

Noch einfacher geht es über das Faktorisieren:

$$f(x, a) - f(x, b) = 0$$

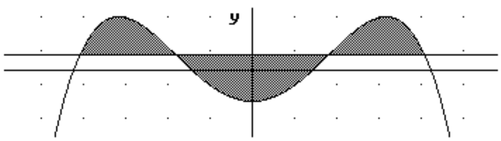
$$\frac{x^4 \cdot (a - b) + 3 \cdot a^2 \cdot b - 3 \cdot a \cdot b^2}{4 \cdot a \cdot b} = 0$$

$$\frac{(a - b) \cdot (x^4 + 3 \cdot a \cdot b)}{4 \cdot a \cdot b} = 0$$

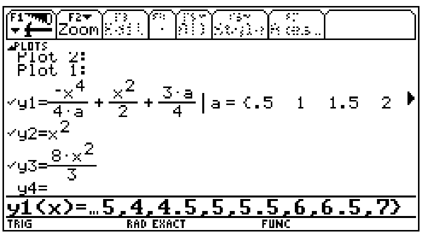
$a - b = 0$ ist wegen $a \neq b$ verboten und $x^4 + 3\,a\,b = 0$ kann, wenn a, $b > 0$, zu keiner reellen Lösung führen.

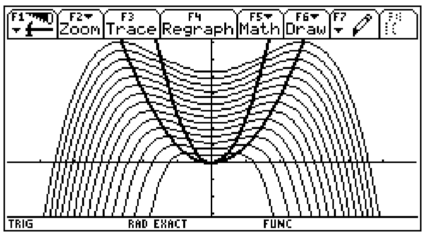
Abschließend erzeugt man eine schöne Grafik mit den schattierten Flächen und der Horizontalen aus Teilaufgabe d). Alles wird für $a = 10$ durchgeführt.

$$\left(f(x, 10) \ge y \ge \frac{80}{9} \wedge -\frac{\sqrt{150}}{3} \le x \le -\frac{\sqrt{30}}{3}\right) \vee \left(f(x, 10) \ge y \ge \frac{80}{9} \wedge \frac{\sqrt{30}}{3} \le x \le \frac{\sqrt{150}}{3}\right) \vee \left(f(x, 10) \le y \le \frac{80}{9} \wedge -\frac{\sqrt{30}}{3} \le x \le \frac{\sqrt{30}}{3}\right)$$



Am *TI* gibt es keine wesentlichen Änderungen, außer dass man die Kurvenschar nicht mit dem mächtigen VECTOR-Befehl erzeugen kann.





Nur gegen Mathe bin ich nicht allergisch

Diese Aufgabe wurde im Rahmen meiner ersten TI-92-gestützten Matura gegeben. Das Beispiel stammt in seinen Grundzügen aus einem – sehr empfehlenswerten - amerikanischen Calculus-Lehrbuch [1].

Hier wird die Begründung der Integration zur Modellbildung abgefragt. Numerische und analytische Integrationsmethoden ergänzen einander. Die händische Durchführung der Trapezregel mit einer geeigneten Skizze spricht Grundfertigkeiten an.

Die Abschätzung in e) könnte auch ohne Hilfsmittel durchgeführt werden. Der Einsatz des symbolischen Rechners ist aber gerechtfertigt, da sonst der operative Anteil das Problem verdecken könnte.

Nicht zuletzt wird auch das Rechnen mit Prozenten verlangt.

Die Konzentration M [Gramm/Liter] eines 6-Stunden-Allergiemittels im Blutkreislauf eines Patienten lässt sich beschreiben durch die Formel

$$M(t) = 12 - 4\ln(t^2 - 4t + 6), \quad \text{für} \quad 0 \le t \le 6$$

Dabei ist t die Zeit ab Einnahme des Medikaments in Stunden.

Berechne die durchschnittliche Konzentration des Medikaments im Körper für den Zeitraum der 6 Stunden, in denen es wirksam ist (= Gesamtmenge aufgeteilt auf alle 6 Stunden).

a) Begründe die Anwendung der Integralrechnung bei diesem Problem. Führe eine erste Abschätzung mit der Mittelsumme und 6 Streifen durch.

b) Wende die Trapezregel mit 6 Streifen händisch an. (Skizze!)

c) Berechne das Integral mittels der Trapezregel (12 Streifen) unter Verwendung eines geeigneten Werkzeugs.

d) Wie groß ist für b) und c) der Fehler prozentuell zum Vergleich mit dem exakten Ergebnis? Wie wirkt sich die Verdoppelung der Streifenzahl auf die Qualität des Ergebnisses aus?

e) In der Fachliteratur findet man eine Formel für die Abschätzung des Fehlers E, den man bei Anwendung der Trapezregel für die numerische Integration macht, wie folgt:

$$E \le \frac{(b - a)^3}{12n^2} \max\left| f''(x) \right|$$

Welche Abschätzung lässt sich in diesem Fall für $n = 12$ machen (a und b sind Unter- bzw. Obergrenze des Integrals).

f) Bestimme den Extremwert von $M(t)$. Welche Bedeutung hat dieser Kurvenpunkt bezogen auf das Modell?

[1] *Larson & Edwards, Calculus – An Applied Approach, Houghton Mifflin 1999*

Lösungsvorschlag:

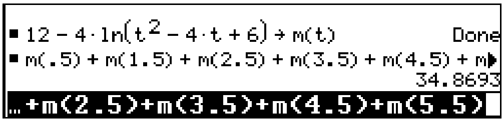
a) Es wird für jede Stunde der Konzentrationswert in der Mitte der Stunde genommen, der dann für die ganze Stunde gelten soll. Die Summe der Produkte

$$M(0,5)\times 1 + M(1,5)\times 1 + ... + M(5,5)\times 1 \approx 34,9\,,$$

die die Gesamtmenge ergibt, lässt sich als Summe von Rechtecksflächen deuten. Die Abschätzung wird genauer, wenn man die betrachteten Zeitabschnitte kürzer macht, etwa 1/6 Stunden, dh. alle 10 Minuten und wieder die Werte in der Mitte dieser 10-Minuten-Intervalle misst. Dann ergibt sich wieder eine Summe von Rechtecken

$$M(1/12)\times 1/6 + M(3/12)\times 1/6 + ... + M(71/12)\times 1/6\,.$$

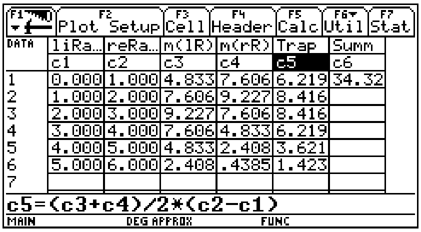
Wenn die Zeitintervalle immer kleiner werden und schließlich gegen Null gehen, dann wird aus der Summe der approximierenden Rechtecke die Fläche unter der Kurve, die man mit der Integralrechung finden kann.



Der Näherungswert beträgt 34,87.

b) Die „händische“ Berechnung der Trapezflächen und deren Summierung kann auch im Datenblatt erfolgen.

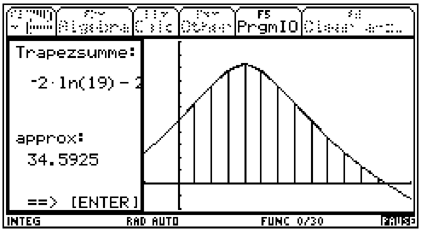
Das Ergebnis ist $A \approx 34{,}32$.



DATA	liRa…	reRa…	m(lR)	m(rR)	Trap	Summ
	c1	c2	c3	c4	c5	c6
1	0.000	1.000	4.833	7.606	6.219	34.32
2	1.000	2.000	7.606	9.227	8.416	
3	2.000	3.000	9.227	7.606	8.416	
4	3.000	4.000	7.606	4.833	6.219	
5	4.000	5.000	4.833	2.408	3.621	
6	5.000	6.000	2.408	.4385	1.423	
7						

c5=(c3+c4)/2*(c2−c1)

c) Die unterschiedlichen numerischen Integrationsverfahren können mit bereitgestellten, bzw. teilweise selbst produzierten Programmen und/oder Funktionen durchgeführt werden [1].

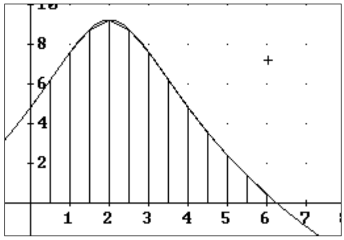


Auf der nächsten Seite findet man eine mögliche *DERIVE*-Behandlung der Trapezsumme.

[1] Die Schüler arbeiteten mit dem Programm `integ()`, siehe *„Einführung des Integralbegriffs mit dem TI-92“, bk teachware SR-13.*

```
[F(x) := 12 - 4·LN(x^2 - 4·x + 6), a := 0, b := 6]
TSUM_VAL(6) = 34.31563154
TSUM(12)
TSUM_VAL(12) = 34.59247876
```

$$\int_0^6 F(x)\,dx = 34.68508635$$

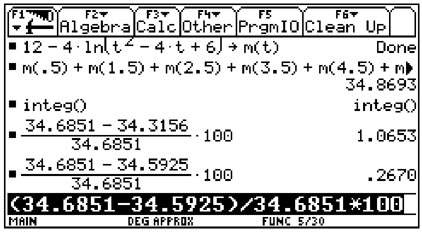


(Die entsprechende Hilfsdatei RIEMANN.MTH[1] finden Sie auf der Diskette.)

Damit beträgt die gesuchte durchschnittliche Knzentration ca. 5,78 Gramm/Liter.

d)

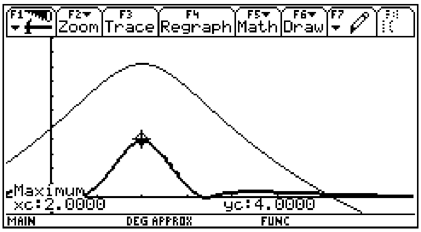
6 Trapeze:	34,3156
12 Trapeze:	34,5925
exakt:	34,6851



Der Fehler geht von 1,07% auf 0,27% zurück.

(Die Verdopplung der Trapeze führt zu einer Vervierfachung der Genauigkeit!)

e) Für die Abschätzungsformel benötigt man das Maximum der 2. Ableitung von $M(t)$.



Anstelle der Berechnung von 3. und 4. Ableitung wird das Grafik-Werkzeug benutzt und $|M''(t)|$ auf das Maximum untersucht.

$$E \le \frac{(6-0)^3}{12 \cdot 12^2} \cdot 4 = \frac{1}{2}$$

Damit beträgt der Fehler höchstens 0,5.

f) Der Extremwert von M liegt bei $t = 2$ und nimmt den Wert 9,22 g/l an.
Die Konzentration nimmt nach 2 Stunden mit 9,22 g/l ihren höchsten Wert an.

[1] Diese Datei ist anlässlich eines Vortrags bei der ersten DERIVE-Konferenz 1992 in Krems entstanden.

Kosten, Kosten, immer nur Kosten!

Hier wird besonders die Anwendung der Regression gepflegt. Das Aufsuchen einer speziellen Integralfunktion führt im weiteren Verlauf zu den zugehörigen Gesamtkostenfunktionen. Der richtige Umgang mit dem Logarithmus ist für Teilaufgabe b) erforderlich.

Interessant ist die letzte Teilaufgabe, die erstens eine geeignete Strategie erfordert, und die zweitens auch unbedingt kritisch in ihrem Ergebnis hinterfragt werden muss.

Zusätzliche Fragestellungen (Fixkosten, ...) wären möglich.

Die Grenzkosten für die Herstellung eines Produkts lassen sich für einige Produktionsmengen ermitteln:

x	100	120	150	190	200	250
Grenzkosten	18,70	22,00	24,10	31,20	31,30	33,50

a) Bestimme die Grenzkosten näherungsweise als lineare Funktion.

b) Bestimme die Grenzkosten näherungsweise als Exponentialfunktion.
Stelle die Funktion in der Form $GK(x) = a \cdot e^{bx}$ dar.
Zeige, dass sich die exponentielle Regression auf eine lineare Regression zurückführen lässt.

c) Welche Anpassung ist besser und warum?

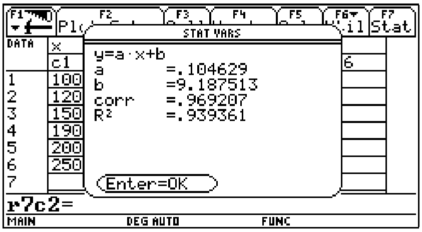
d) Wie lauten in beiden Fällen die zugehörigen Gesamtkostenfunktionen, wenn man die Gesamtkosten für die Menge $x = 160$ mit $K = 5600$ kennt?

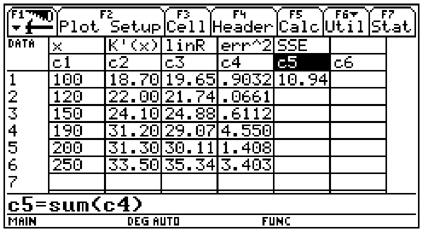
e) Suche für beide Kostenfunktionen das Betriebsoptimum und vergleiche die zugehörigen Durchschnittskosten.

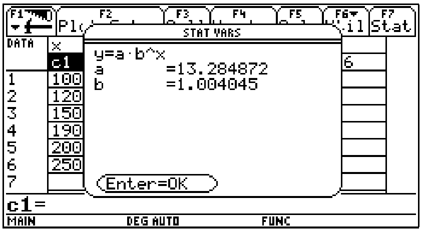
f) Die „klassische“ Kostentheorie geht von einem s-förmigen Verlauf der Kostenfunktion aus. Wie könnte man diesen s-förmigen Verlauf hier „erzwingen“?
Kommentiere das Ergebnis!

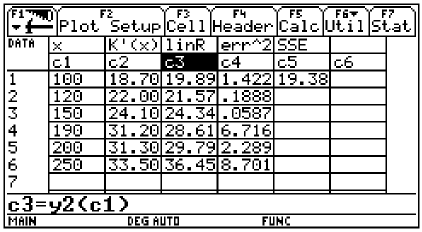
Lösungsvorschlag:

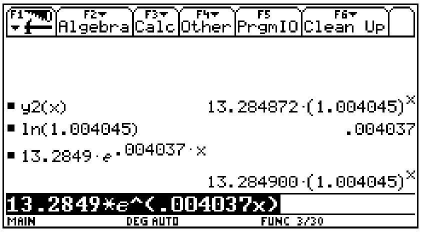
a) – c) Das Regressionswerkzeug liefert die lineare und exponentielle Regressionskurve. Im Vergleich der Fehlerquadratsummen (SSE = Sum of Squared Errors) zeigt sich, dass die lineare Anpassung die bessere ist.











$$GK(x) = 13{,}2849 \cdot e^{0{,}004037\,x}$$

Die Grenzkosten werden durch die erste Ableitung der Gesamtkostenfunktion beschrieben, daher $GK(x) = K'(x)$.

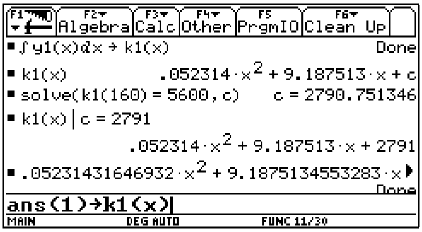
$GK = a \cdot e^{bx}$ | logarithmieren

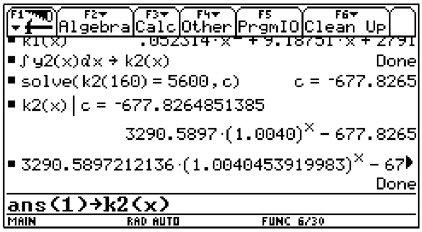
$\ln GK = \ln a + b \cdot x = b \cdot x + \ln a$

Zwischen der Menge und dem Logarithmus der Grenzkosten herrscht ein linearer Zusammenhang. Die lineare Regression kann nun durchgeführt werden. Durch „entlogarithmieren" erhält man die gewünschte Exponentialfunktion.

d) Die beiden Kostenfunktionen $K_1(x)$ und $K_2(x)$ ergeben sich aus der Integration der Grenzkostenfunktion mit anschließender Bestimmung der Integrationskonstanten aus der Bedingung $K(160) = 5600$.

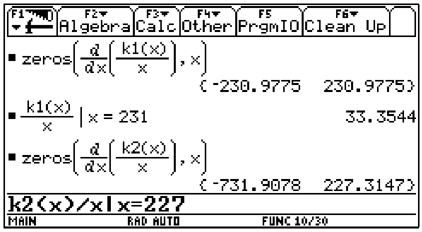
$$K_1(x) = 0{,}0523x^2 + 9{,}1875x + 2791; \quad K_2(x) = 3290{,}5897 \cdot e^{0{,}004037x} - 678$$





(Hinweis: für das unbestimmte Integral ist `∫(y1(x),x,c)` einzugeben, dann erhält man auch die Integrationskonstante *c*.)

e) Das Betriebsoptimum (Minimum der Durchschnittskosten) liegt bei ca. 231*ME* bzw. 227*ME*.



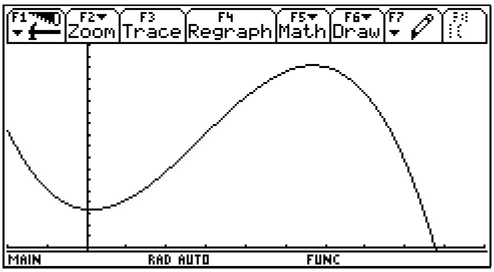
Die zugehörigen Durchschnittskosten sind dann 33,35*GE* bzw. 33,26*GE*.

f) Eine kubische Kostenfunktion lässt sich erzwingen, wenn die Grenzkostenfunktion quadratisch angenommen wird. Man könnte daher die quadratische Regression durchführen und die zugehörige Kostenfunktion wie oben ermitteln. Dann ergibt sich eine Kostenfunktion

$$K_3(x) = -0{,}001x^3 + 0{,}1299x^2 - 3{,}0815x + 3379.$$

Testweise wird die Kostenkehre berechnet, die bei $x = 290$ *ME* liegt.

Vorerst scheint alles in Ordnung zu sein. Der negative führende Koeffizient weist aber auf die „falsche“ Form des „s“ hin und die graphische Darstellung zeigt, dass in diesem Fall der klassischen Theorie widersprochen werden muss – zumindest bei dieser Annäherung an das Problem.



Grenzkosten, Gesamtkosten und Break-Even

Hier liegt das Hauptgewicht auf dem Hilfsmittel Regression. Erklärungen zum Lösungsweg und Beurteilungen der verschiedenen Anpassungskurven werden verlangt. Für die exponentielle Regression ist die Herleitung des Zusammenhangs mit der linearen Regression zu geben.

Die Einbeziehung einer Break-Even-Analyse zeigt schöne Zusammenhänge zum Betriebsoptimum auf. Damit ist eine Querverbindung zur Differentialrechnung hergestellt.

Über einen längeren Zeitraum hindurch wurden bei einer Produktion die Kostensteigerungen pro Produktionseinheit bei der Herstellung von x Mengeneinheiten (*ME*) beobachtet und festgehalten. Dabei ergaben sich insgesamt folgende 20 Datenpaare:

Menge	4	3	5	6	12	6	18	20	10	2
K/Stk	3,1	3,1	3,3	3,35	4,0	3,45	5,0	5,7	3,8	2,7

Menge	10	18	8	4	18	25	15	1	10	15
K/Stk	3,95	5,20	3,6	3,2	5,0	6,3	4,65	2,6	3,6	4,4

a) Um die Gesamtkostenfunktion durch ein mathematisches Modell zu beschreiben, versucht man zuerst die „Grenzkosten“ zu modellieren. Erstelle eine graphische Präsentation der Daten und wähle drei mögliche und sinnvolle Regressionskurven. Begründe Deine Wahl.

Suche die drei Regressionskurven auf und wähle die am besten geeignete. Begründe auch hier die Auswahl.

b) Erkläre den Zusammenhang zwischen einer linearen Regression und einer Exponentialfunktion als Regressionslinie. Erzeuge die exponentielle Regressionslinie nur unter Verwendung der automatisierten linearen Regression.
Bringe sie außerdem in die Form $y = a\, e^{bx}$.

c) Die Durchschnittskosten bei der Herstellung von 30 Mengeneinheiten betragen 10 Geldeinheiten. Ermittle für alle drei gefundenen „Grenzkosten“ die entsprechende Kostenfunktion. Erkläre Deine Vorgangsweise möglichst genau (nicht nur, was Du machst, sondern auch warum!).

d) Vergleiche die Gesamtkosten für 40, 50, 80 und 100 Mengeneinheiten für die drei Kostenfunktionsmodelle. Beschreibe die Kostenentwicklung! Für welches Kostenfunktionsmodell würdest Du Dich entscheiden und warum?

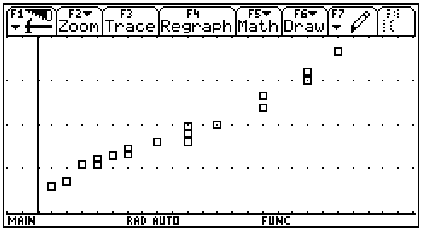
e) Arbeite weiter mit der Kostenfunktion Deiner Wahl.

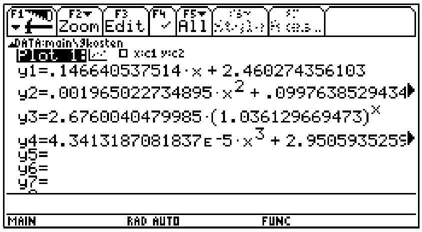
Erzeuge eine „Break-Even-Funktion“ $B(x)$, mit der zu jeder gewünschten Gewinnschwelle, der dazu erforderliche Marktpreis ausgegeben wird. Welche Marktpreise müssen erzielt werden, dass die Break-Evens $x = 8$, $x = 5$ und $x = 3$ erreicht werden? Kommentiere das Ergebnis!

Welche besondere Situation tritt ein, wenn der Break-Even mit dem Betriebsoptimum zusammenfällt?

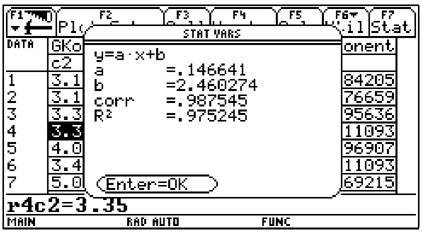
Lösungsvorschlag:

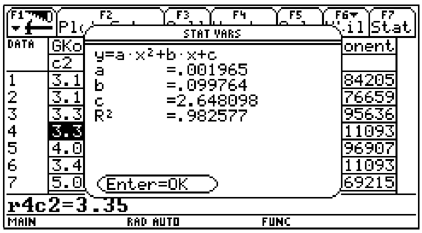
a) Die Daten werden in ein Streudiagramm übertragen und es bieten sich lineare und quadratische Regression als erste Versuche an. Möglicherweise ist eine Exponentialfunktion ebenfalls geeignet. Die leichte s-Form lässt auch an eine kubische Regression denken.

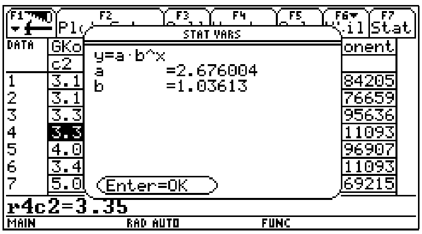


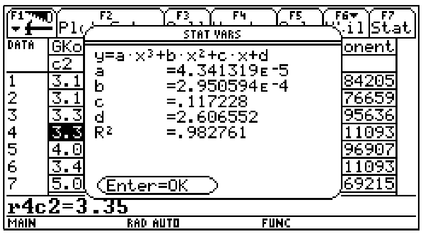


Mit dem entsprechenden Werkzeug ergeben sich für die oben genannten 4 Fälle die folgenden Regressionskurven:









lineare Regression: $y = 0{,}146641x + 2{,}460274$ → y1(x)

quadratische Regression: $y = 0{,}001965x^2 + 0{,}099764x + 2{,}648098$ → y2(x)

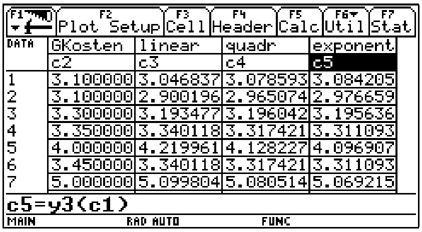
exponentielle Regression: $y = 2{,}676004 \cdot 1{,}036130^{\,x}$ → y3(x)

kubische Regression: $y = 0{,}000043x^3 + 0{,}000295x^2 + 0{,}117228x + 2{,}606552$ →y4(x)

Um die Qualität der Anpassung zu beurteilen, betrachtet man das Bestimmtheitsmaß R^2. Bei der kubischen Regressionslinie liegt diese Zahl am nächsten bei 1, daher sollte dies die beste Regression darstellen. Bei der exponentiellen Regression fehlt diese Maßzahl, daher muss ein anderes Beurteilungskriterium herangezogen werden.

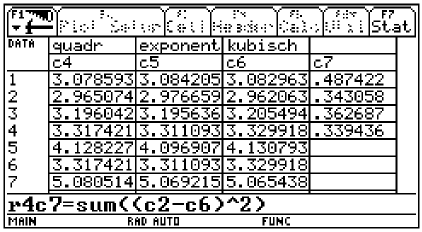
Man bestimmt für alle gewählten Modelle die Summe der Fehlerquadrate

$$\sum_{i=1}^{20} (y_i - y(x_i))^2 \ .$$



DATA	GKosten	linear	quadr	exponent
	c2	c3	c4	c5
1	3.100000	3.046837	3.078593	3.084205
2	3.100000	2.900196	2.965074	2.976659
3	3.300000	3.193477	3.196042	3.195636
4	3.350000	3.340118	3.317421	3.311093
5	4.000000	4.219961	4.128227	4.096907
6	3.450000	3.340118	3.317421	3.311093
7	5.000000	5.099804	5.080514	5.069215

c5=y3(c1)



DATA	quadr	exponent	kubisch	
	c4	c5	c6	c7
1	3.078593	3.084205	3.082963	.487422
2	2.965074	2.976659	2.962063	.343058
3	3.196042	3.195636	3.205494	.362687
4	3.317421	3.311093	3.329918	.339436
5	4.128227	4.096907	4.130793	
6	3.317421	3.311093	3.329918	
7	5.080514	5.069215	5.065438	

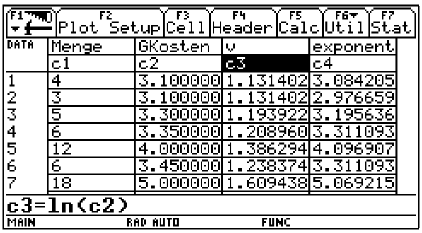
r4c7=sum((c2-c6)^2)

In den Spalten `c3`, `c4`, `c5` und `c6` finden sich die theoretischen Funktionswerte nach den Regressionsfunktionen `y1`, `y2`, `y3` und `y4`. In Spalte `c7` werden dann der Reihe nach die Fehlerquadratsummen ausgegeben. Dabei zeigt sich, dass die kubische Regression tatsächlich die beste wäre.

Da man aber üblicherweise mit einer höchstens kubischen Kostenfunktion rechnet, wird die quadratische Regressionslinie als Modellfunktion sicherlich ausreichen.

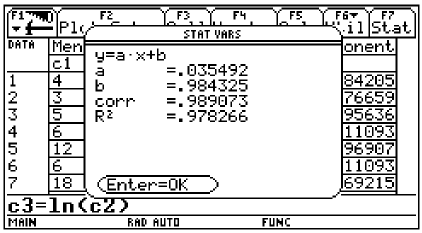
b) Exponentielle Regression: $y = a\, e^{b\,x}$. Wenn man diese Gleichung logarithmiert, ergibt sich

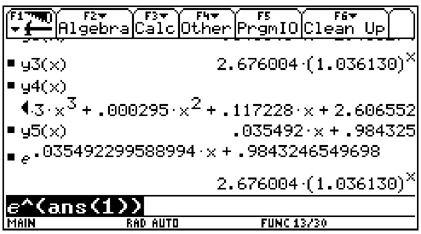
$\ln y = \ln a + b\,\mathrm{x}$ oder nach einer Substitution $v = b\,\mathrm{x} + a$. Dieser Ausdruck ist wiederum linear in x und v.



DATA	Menge	GKosten	v	exponent
	c1	c2	c3	c4
1	4	3.100000	1.131402	3.084205
2	3	3.100000	1.131402	2.976659
3	5	3.300000	1.193922	3.195636
4	6	3.350000	1.208960	3.311093
5	12	4.000000	1.386294	4.096907
6	6	3.450000	1.238374	3.311093
7	18	5.000000	1.609438	5.069215

c3=ln(c2)





Die lineare Regression wird durchgeführt und anschließend rücksubstituiert:

$$\ln y = v \;\rightarrow\; y = e^v.$$

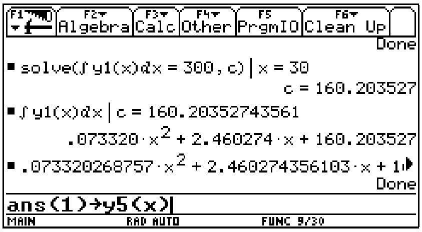
$$y = 2{,}6760 \cdot e^{0{,}03549\,x}$$

c) Die Gesamtkosten für 30*ME* sind mit 300*GE* gegeben, daher $K(30) = 300$. Die Kostenfunktion geht aus der Grenzkostenfunktion durch Integration hervor.

Lineare Grenzkosten:

Die entstehende quadratische Kostenfunktion:

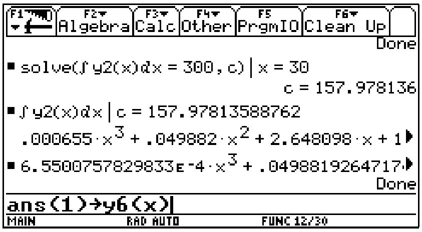
$K(\mathrm{x}) = 0{,}0733x^2 + 2{,}4603x + 160{,}2035$



Quadratische Grenzkosten:

Die entstehende kubische Kostenfunktion:

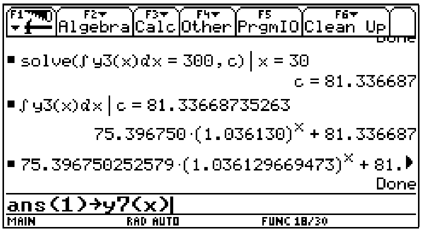
$K(\mathrm{x}) = 0{,}0007x^3 + 0{,}0499x^2 + 2{,}6481x + 157{,}89$



Exponentielle Grenzkosten:

Die entstehende exponentielle Kostenfunktion:

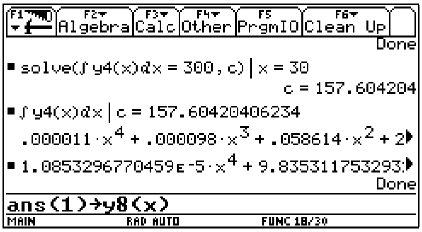
$K(\mathrm{x}) = 75{,}3968 \cdot 1{,}0361^{\mathrm{x}} + 81{,}3367$

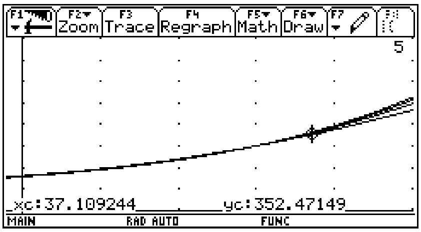


Kubische Grenzkosten:

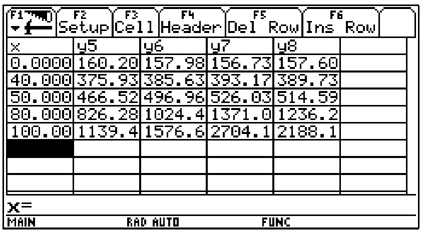
Die entstehende Kostenfunktion 4. Grades:

$K(x) = 0{,}000011x^4 + 0{,}000098x^3 + 0{,}05861x^2 +$
$+\ 2{,}6066x + 157{,}6042$





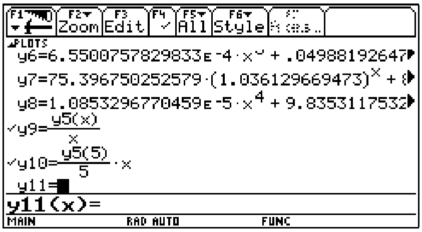
d) Die Tabelle lässt die Gesamtkosten vergleichen. Graphik und Tabelle zeigen, dass bis ca. 35*ME* kein wesentlicher Unterschied in den Funktionswerten besteht.
Daher besteht kein Grund, nicht das einfachste Modell – die quadratische Kostenfunktion – anzunehmen.

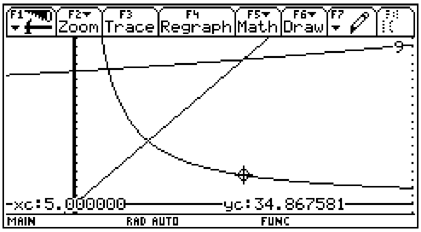


x	y5	y6	y7	y8
0.0000	160.20	157.98	156.73	157.60
40.000	375.93	385.63	393.17	389.73
50.000	466.52	496.96	526.03	514.59
80.000	826.28	1024.4	1371.0	1236.2
100.00	1139.4	1576.6	2704.1	2188.1

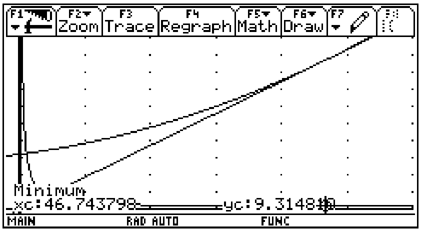
Sollten einmal wesentlich mehr Mengeneinheiten produziert werden müssen, dann müssen auch die Grenzkosten für die höheren Stückzahlen ins Modell einfließen. Dann wird aber auch die Grenzkostenfunktion angepasst werden müssen.

e) Der Break-Even ergibt sich aus der Gleichung $K(x) = Erl(x) = p \cdot x$. Daraus sieht man aber sofort, dass die gesuchte Funktion $B(x)$, die den notwendigen Marktpreis berechnet, mit der Durchschnittskostenfunktion identisch ist. Die Bilder unten illustrieren den Fall für $x = 5$. Ein Marktpreis von $p = 34{,}87$ ermöglicht einen Break-Even bei $x = 5ME$.





f) Das Betriebsoptimum liegt bei 46,74*ME* mit den Durchschnittskosten 9,3148*GE*. Wenn der Verkaufspreis auf 9,3148*GE* sinkt, dann schrumpft die Gewinnzone auf einen Punkt und Gewinnschwelle (= Break Even) und Gewinngrenze fallen zusammen.



Das lässt sich auch leicht beweisen:

$$\left(\frac{K(x)}{x}\right)' = \frac{x\,K'(x) - K(x)}{x^2} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow K'(x) = \frac{K(x)}{x} = p$$

Und das heißt, dass der Anstieg der Kostenfunktion mit dem Preis übereinstimmt. Damit ist die Erlösgerade $p \cdot x$ eine Tangente an die Kostenkurve.

(Das steht im Zusammenhang mit der Tatsache, dass das Betriebsoptimum über die Tangente aus dem Ursprung an die Kostenkurve gefunden werden kann. Siehe auch eine entsprechende Aufgabe im Band 1.)

Wieviel ist Dir die Umwelt wert?

In seiner Urfassung aus einer traditionellen HAK-Matura beschränkt sich die Aufgabenstellung auf die Berechnung der Rückzahlungsraten und der effektiven Verzinsung für Variante 1 (über eine Intervallschachtelung). Nun lässt sich in einer vertretbaren Zeit der Tilgungsplan aufstellen (über ein Datenblatt oder sogar über eine Tabellenkalkulation). Diese Tätigkeit erfordert doch eine genauere Analyse des Problems. Das Aufstellen der Formeln und deren Überprüfung sollen das Abstraktionsvermögen nachweisen.

Die Berechnung der effektiven Verzinsung einer veränderlichen Rente wäre ohne Hilfsmittel wohl nicht durchzuführen. Hier stehen gleich drei Mittel zur Verfügung. Im letzten Punkt ist – zumindest auf dem TI – eine Kombination von maschinellem und händischem Operieren gefragt.

(Die Hilfsfunktionen zur Finanzmathematik finden Sie auf der Diskette. Siehe auch die Beispiele zur Finanzmathematik in Band 1.)

Ein Betrieb errichtet eine Luftfilteranlage. Die Gesamtkosten betragen 170 000 EURO. Als Rücklage für diese Investition wurden vorher 3 Jahre lang am Ende eines jeden Monats 1300 EURO auf ein Konto eingezahlt, das mit 6,4% verzinst wurde.

a) Welches Kapital steht aufgrund dieser Rücklagen am Ende der drei Jahre zur Verfügung? Welches Fremdkapital ist – auf 100 EURO gerundet – noch erforderlich?

Dem Unternehmen stehen zwei Finanzierungsmöglichkeiten offen:

<u>1.Variante:</u> Der Betrieb erhält eine einmalige Subventionszahlung des Landes in Höhe von 15% der Gesamtkosten und der Rest muss durch einen Bankkredit mit einer Laufzeit von 15 Jahren und einem Zinssatz von 7,5% finanziert werden.

b) Wie hoch ist der Bankkredit und wie hoch sind die monatlich nachschüssig zu zahlenden Raten für diesen Kredit?

c) Welche effektive Verzinsung hat diese Finanzierungsvariante unter Berücksichtigung einer Kreditsteuer von 0,8%, einer Bearbeitungsgebühr von 3% und der Subvention? (Rechne auf 0,1% genau.)
(Steuer und Bearbeitungsgebühr werden gleich von der Kreditsumme abgezogen).

<u>2.Variante:</u> Dem Unternehmen wird vom Land ein geförderter Kredit gewährt, der mit einer Jahresverzinsung von 6% bei vierteljährlicher Kapitalisierung innerhalb von 10 Jahren zurückgezahlt werden muss. Die Rückzahlungen erfolgen vierteljährlich nachschüssig und bestehen aus einem konstanten Tilgungsanteil und den Zinsen vom fallenden Kapital.

d) Erstelle die ersten vier und die letzten drei Zeilen des Tilgungsplans, der die Nummer der Zahlungsperiode, die jeweilige Restschuld, den Tilgungsanteil, den Zinsenanteil und die Zahlung ausweist.

e) Erzeuge eine Formel für die Zahlung in einer beliebigen Periode *k* und vergleiche mit den entsprechenden Werten im Tilgungsplan.

f) Die Förderung des Landes besteht darin, dass 15% des Tilgungsanteils vom Land übernommen werden. Ergänze den Tilgungsplan mit den Werten der reduzierten Zahlungen. Wie lautet die Formel für die Zahlungen nun?

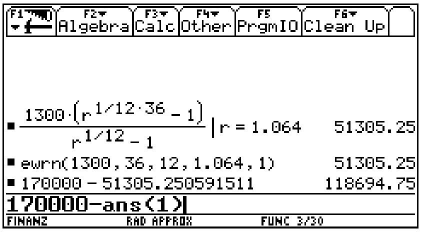
g) Wie hoch ist die effektive Verzinsung dieses Kredits, wenn man die Landesförderung, die Kreditsteuer von 0,8% und die Bearbeitungsgebühr, die hier nur 1% ausmacht, berücksichtigt? (Rechne auf 0,1% genau.)

h) Lässt sich unter Verwendung des CAS eine geschlossene Formel für den Barwert dieser *veränderlichen* Annuitäten für einen allgemeinen Abzinsungsfaktor *v* angeben?

Lösungsvorschlag

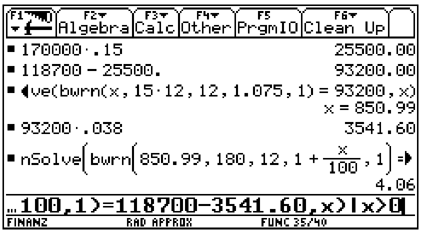
a) Der Wert der Rücklage ist der Endwert einer nachschüssigen Monatsrente, die 36 mal zahlbar ist.

Zur Verfügung stehen 51 305,25 € und damit ist eine Kapitalaufnahme in der Höhe von 118 700 € nötig.



Die Syntax der `ewrn()`-Funktion lautet im Detail:

`ewrn(Zahlung, Anzahl der Zahlungen, Zahlungsperioden/Jahr, Aufzinsungsfaktor, Anzahl der Zinsperioden/Jahr)`



b) Die Subvention beträgt 25 500€. Damit muss ein Kredit in der Höhe von 93 200€ aufgenommen werden. Die monatlichen Rückzahlungen sind 850,99€.

Tatsächlich ist die Kreditsumme aber um 3 541,60€ zu vermindern (Steuer + Bearbeitungsgebühr).

c) Für die Berechnung der tatsächlichen Zinsbelastung ist zu berücksichtigen, dass 180 mal der Betrag von 850,99€ zu zahlen sind. Dem Unternehmen zur Verfügung gestellt werden insgesamt 118 700€ – 3 541,60€. Es ergibt sich damit eine Verzinsung von 4,06%.

d) Für die Erstellung des Tilgungsplan bietet sich der `Data/Matrix Editor` an. Falls `CellSheet` zur Verfügung steht, kann analog zu einer Tabellenkalkulation gearbeitet werden.

DATA	Periode	Restsch	Zinsen	Tilgung
	c1	c2	c3	c4
1	1.00	115732.5	1780.50	2967.50
2	2.00	112765.0	1735.99	2967.50
3	3.00	109797.5	1691.48	2967.50
4	4.00	106830.0	1646.96	2967.50
5	5.00	103862.5	1602.45	2967.50
6	6.00	100895.0	1557.94	2967.50
7	7.00	97927.50	1513.43	2967.50

c1=seq(i,i,1,40)

DATA	Zinsen	Tilgung	Zahlung	Zahlung2
	c3	c4	c5	c6
1	1780.50	2967.50	4748.00	4302.88
2	1735.99	2967.50	4703.49	4258.36
3	1691.48	2967.50	4658.98	4213.85
4	1646.96	2967.50	4614.46	4169.34
5	1602.45	2967.50	4569.95	4124.83
6	1557.94	2967.50	4525.44	4080.31
7	1513.43	2967.50	4480.93	4035.80

c6=.85*c4+c3

Die Spalten werden erzeugt wie folgt:

```
c1:  seq(i,i,1,40)
c2:  seq(118700 - 118700/40*i,i,1,40)
c3:  seq((118700 - 118700/40*(i - 1))*0.015,i,1,40)
c4:  seq(118700/40,i,1,40)
c5:  c3+c4
c6:c3 + 0.85*c4
```
(schon für Frage f))

DATA	Periode	Restsch	Zinsen	Tilgung
	c1	c2	c3	c4
36	36.00	11870.00	222.56	2967.50
37	37.00	8902.50	178.05	2967.50
38	38.00	5935.00	133.54	2967.50
39	39.00	2967.50	89.03	2967.50
40	40.00	0.00	44.51	2967.50
41				
42				

r41c1=

DATA	Zinsen	Tilgung	Zahlung	Zahlung2
	c3	c4	c5	c6
36	222.56	2967.50	3190.06	2744.94
37	178.05	2967.50	3145.55	2700.43
38	133.54	2967.50	3101.04	2655.91
39	89.03	2967.50	3056.53	2611.40
40	44.51	2967.50	3012.01	2566.89
41				
42				

r41c3=

Die ersten vier und die letzten drei Zeilen können abgelesen werden.

Die `CellSheet` Ausführung sieht so aus:

Formeln:

```
A2:       A1 + 1
B2:       B1 - D2
C2:       B1*0.015
D2:       $B$1/40
E2:       D2+C2
F2:       C2 + 0.85*D2
```

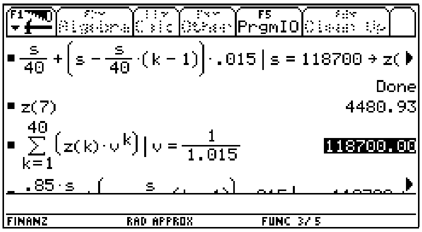
til	A	B	C	D	E
1	0	118700.00			
2	1.	115732.50	1780.50	2967.50	4748.00
3	2.	112765.00	1735.99	2967.50	4703.49
4	3.	109797.50	1691.48	2967.50	4658.98
5	4.	106830.00	1646.96	2967.50	4614.46
6	5.	103862.50	1602.45	2967.50	4569.95
7	6.	100895.00	1557.94	2967.50	4525.44

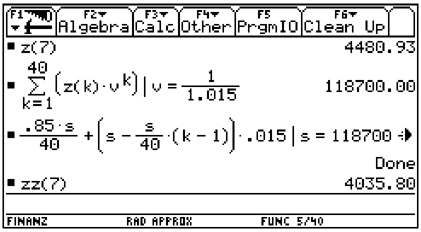
A2: =A1+1

e) und f)

Die Zahlungen werden unter `z(k)`, bzw. `zz(k)` gespeichert.

Der ergänzte Tilgungsplan ist auf Seite 28 abgebildet.



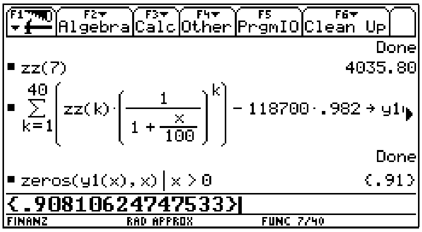


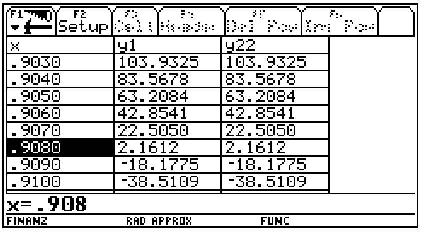
Kontrolle: Der Barwert aller Zahlungen zur Kreditverzinsung ergibt genau die Brutto-Kreditsumme.

Wenn man die Zahlungen für das 7. Quartal vergleicht, bestätigt sich die Richtigkeit der Formeln.

g) Der Auszahlungsbetrag für den Kredit beträgt 116 563,40€ (118 700 × 0,982). Damit sucht man jenen Zinsfuß, zu dem der Barwert aller Zahlungen `zz(k)` genau 116 563,40€ ausmacht.

Eine näherungsweise Lösung der entsprechenden Gleichung kann man numerisch, graphisch und über eine dezimale Suche in einer Tabelle finden:



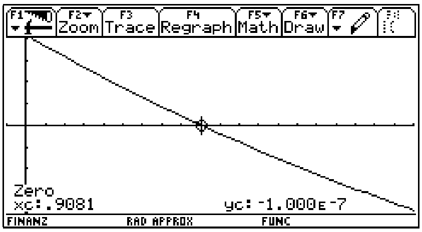


x	y1	y22
.9030	103.9325	103.9325
.9040	83.5678	83.5678
.9050	63.2084	63.2084
.9060	42.8541	42.8541
.9070	22.5050	22.5050
.9080	2.1612	2.1612
.9090	-18.1775	-18.1775
.9100	-38.5109	-38.5109

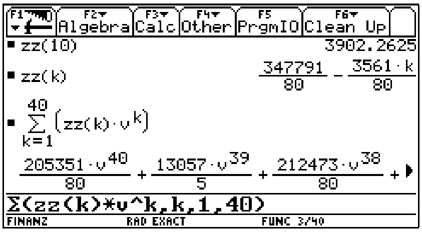
x=.908

Die effektive Verzinsung ist 0,91%/Quartal.

Am schnellsten geht es über die Tabelle. Sowohl die numerische Lösung der Gleichung als auch das Zeichnen des Graphen mit anschließender Nullstellensuche erfordern geraume Rechenzeit.

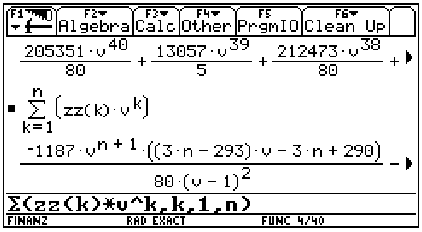


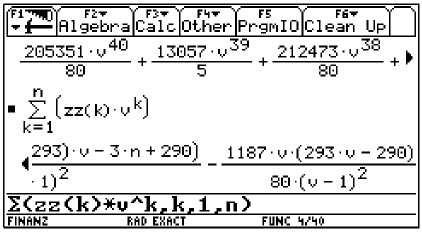
h)



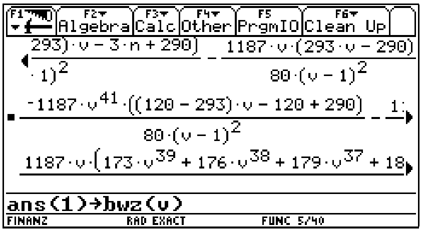
So geht es offenbar nicht. Keine geschlossene Formel wird ausgegeben, sondern eine Summe von Potenzfunktionen.

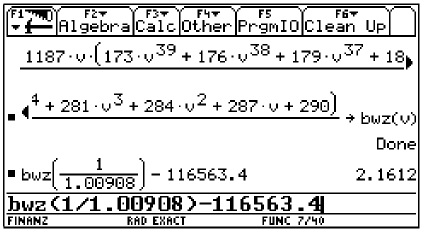
Interessanterweise wird aber eine geschlossene Formel erzeugt, wenn man die Summe allgemein bildet – weil ja die Summe nicht als Polynom ausgeschrieben werden kann.





Der *TI* verweigert die Zusammenfassung auch dann, wenn man nun für $n = 40$ einsetzt.



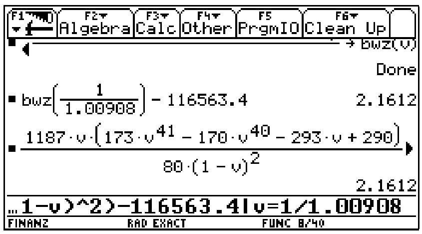


Der kleine – rundungsbedingte - Unterschied von 2,16€ zeigt, dass die Summenformel stimmt. Der Term sollte dennoch zusammengefasst werden. Daher muss der letzte Schritt mit „Papier und Bleistift“ erfolgen.

$$-\frac{1187v^{41}\,((120-293)v-120+290)}{80\,(v-1)^2}-\frac{1187v(293v-290)}{80(v-1)^2}=$$

$$=\;-\frac{1187v}{80(v-1)^2}\left(v^{40}(-173v+170)+293v-290\right)\;=$$

$$=\;\frac{1187v(173v^{41}-170v^{40}-293v+290)}{80(1-v)^2}$$



Wenn die „Basic Skills“ noch nicht verkümmert sind, dann bestätigt sich das Ergebnis.

$$\sum_{k=1}^{n} zz(k)\cdot v^k = -\frac{1187\cdot v^{n+1}\cdot(3\cdot n\cdot(v-1)-293\cdot v+290)}{80\cdot(v-1)^2}-\frac{1187\cdot v\cdot(293\cdot v-290)}{80\cdot(v-1)^2}$$

$$-\frac{1187\cdot v^{n+1}\cdot(3\cdot n\cdot(v-1)-293\cdot v+290)}{80\cdot(v-1)^2}-\frac{1187\cdot v\cdot(293\cdot v-290)}{80\cdot(v-1)^2}$$

$$-\frac{1187\cdot v\cdot(v^{n}\cdot(3\cdot n\cdot(v-1)-293\cdot v+290)+293\cdot v-290)}{80\cdot(v-1)^2}$$

$$1187\cdot v\cdot(v^{40}\cdot(3\cdot 40\cdot(v-1)-293\cdot v+290)+293\cdot v-290)$$

$$-1187\cdot v\cdot(173\cdot v^{41}-170\cdot v^{40}-293\cdot v+290)$$

$$\frac{-1187\cdot v\cdot(173\cdot v^{41}-170\cdot v^{40}-293\cdot v+290)}{80\cdot(v-1)^2}$$

Auch *DERIVE* dividiert den Ausdruck aus und liefert eine Summe von Potenztermen. Aber die Substitution, die dann zur gültigen Antwort führt, lässt sich dafür maschinell erledigen.

Wer die Wahl hat, hat die Qual!

Kapitalwertmethode und die Methode des internen Zinsfußes bilden den Kern dieser Aufgabe. Bei der Berechung des internen Zinsfußes kann der TI unter Umständen trotz i > 0-Bedingung ein merkwürdiges Ergebnis liefern. Hier ist der Benutzer gefordert, eine – durch die Daten gestützte – sinnvolle Schätzung einzubringen.

Überraschend ist die Tatsache, dass ein höherer Kapitalwert nicht unbedingt eine bessere interne Verzinsung nach sich zieht. Es wird oft nicht bedacht, dass dieser interne Zinsfuß ja nur dann Gültigkeit hat, wenn alle Kapitalrückflüsse aus der Investition zu diesem „virtuellen" Zins wiederveranlagt werden können.

Dazu kommt eine Grundaufgabe der Rentenrechnung mit der Bestimmung einer „Schlussrate", bzw. die Neubewertung der Investition unter Annahme einer teilweisen Fremdfinanzierung.

Der Einsatz geeigneter Funktionen (auf Diskette) reduziert die lästige Rechenarbeit auf ein Minimum und stellt das Problem und die Beurteilung der Ergebnisse in den Vordergrund.

Zwei Investitionsalternativen stehen zur Auswahl. Beide erfordern einen Kapitaleinsatz von 200 000 EURO und haben einen Planungshorizont von 20 Jahren.

Bei Investition A erwartet man für die ersten 5 Jahre keinen Gewinn. Dann sollte der durchschnittliche jährliche Ertrag bei 30 000 EURO liegen.

Bei Investition B hat man guten Grund für die ersten 10 Jahre einen Jahresertrag von 20 000 EURO und dann von 15 000 EURO anzunehmen.

Als Kalkulationszinsfuß für die Investitionsrechnung werden 6% festgelegt.

a) Welcher Investition sollte man nach der Kapitalwertmethode den Vorzug geben? Begründe die Antwort und begründe außerdem, warum hier die Kapitalwertmethode zur Beurteilung geeignet scheint.

b) Berechne für beide Pläne den internen Zinsfuß. Müsste man nach dieser Methode die Entscheidung aus a) revidieren? Erkläre die Antwort.

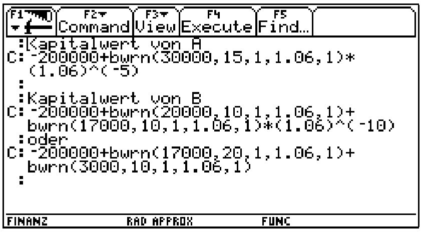
c) Wie sieht der Vergleich der Renditen aus, wenn man sicher ist, die Erlöse zu mindestens 6,5% wiederveranlagen zu können?

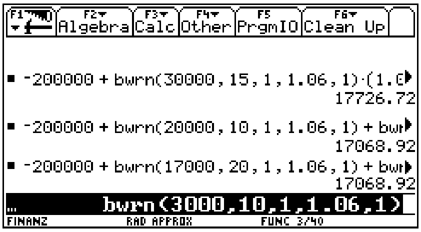
d) Die Unternehmensleitung hat sich für Projekt A entschieden. Für einen Teil der Anschaffungskosten wird aber nun doch ein Kredit in der Höhe von 75 000 EURO aufgenommen. Dieser Kredit ist in vorschüssigen vierteljährlichen Raten zu 4 000 EURO bei $i = 7\%$ zu tilgen.
Wieviele Vollraten sind fällig, wenn die erste Rate ein Jahr nach der Kreditaufnahme fällig ist? Wie hoch ist die letzte Zahlung, wenn die Schlussrate gemeinsam mit der letzten Vollrate fällig ist?

e) Auf welche Weise wird sich der Kapitalwert durch die Fremdfinanzierung ändern?

Lösungsvorschlag:

a) Die Kapitalwerte für die beiden Investitionsalternativen sind 17 726,72€ und 17 068,92€.



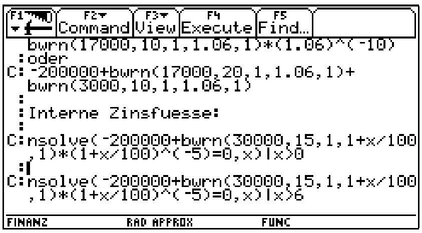


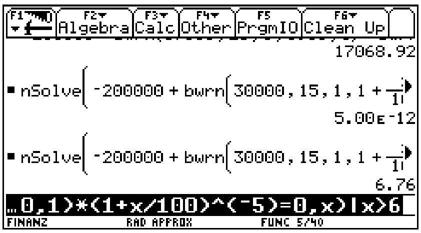
In diesem Fall ist die Kapitalwertmethode als Entscheidungsgrundlage geeignet, da sowohl der Kapitaleinsatz als auch die Nutzungsdauer für beide Alternativen gleich sind. Beide Pläne haben einen deutlich positiven Kapitalwert, bringen also eine deutliche höhere Rendite als 6%.

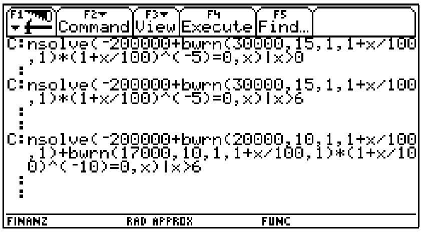
Plan A hat einen geringfügig höheren Kapitalwert und daher wäre ihm der Vorzug zu geben – wenn die Investitionsrechnung alleine die Entscheidung begründet.

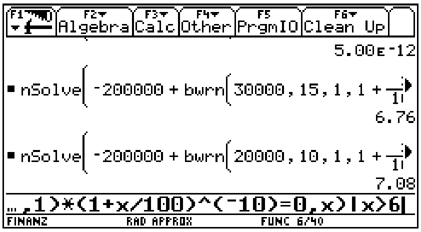
b) Der erste Versuch, den Zinsfuß zu bestimmen, schlägt fehl, selbst wenn man die Bedingung $x > 0$ vorgibt. Man weiß aber aus a), dass x auf jeden Fall über 6% liegen muss, daher setzt man fest, dass $x > 6$. Dann erhält man für Plan A die interne Verzinsung von 6,76%

Auf die gleiche Weise ergibt sich für Plan B – für viele überraschend – eine höhere interne Verzinsung von 7,08%.



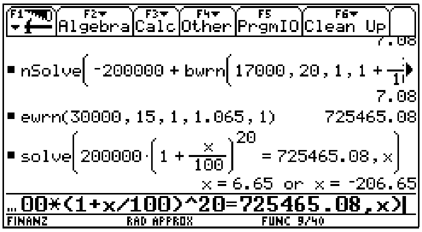


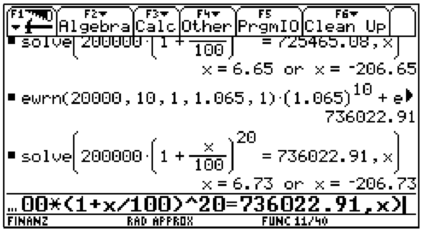




Die Begründung liegt darin, dass man bei dieser Berechnungsart annehmen muss, dass die Erträge wieder zum Effektivzinssatz angelegt werden können. Da wirken sich die früheren Kapitalrückflüsse bei Plan B besser aus. Diese Rendite tritt nur ein, wenn die Erträge tatsächlich zu 7,08% wiederveranlagt werden können.

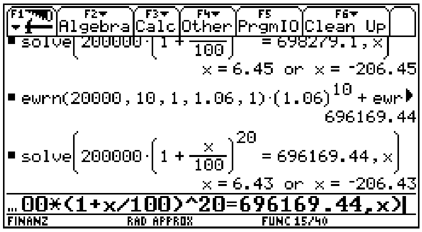
c) Auch in diesem Fall verzinst sich das eingesetzte Kapital besser.



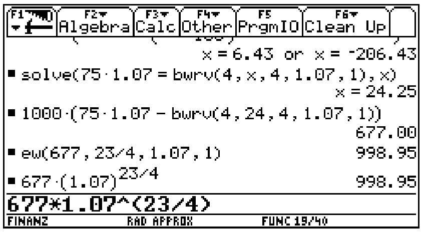


Einer internen Verzinsung von 6,65% stehen 6,73% gegenüber.

(Wenn wir allerdings nur eine Wiederveranlagung höchstens zum Kalkulationszinsfuß erwarten können, dann liegt Plan A besser. Siehe das rechte Bild.)



d) 75 000€ werden ein Jahr lang aufgezinst, und das stellt den Barwert der vorschüssigen Quartalsrückzahlungen dar, die 24 mal voll zu bezahlen sind. (Es wurde durch 1000 gekürzt.)

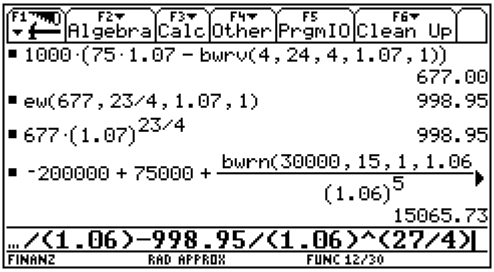


677,00€ ist der Wert der Schlussrate zu Beginn der Laufzeit der Rückzahlungen. Dieser Wert muss bis zum Beginn des 24. Quartals, das dauert dann 23 Vierteljahre, aufgezinst werden.

Die letzte Zahlung beträgt 4 998,95€.

e) Da der Kreditzins über dem Kalkulationszinsfuß liegt, wird der Kapitalwert sinken.

Die Rückzahlungen sind mit 6% zu bewerten.



Der Kapitalwert sinkt auf 15 065,73€.

Hier finden Sie den Term, der zum Kapitalwert führt komplett ausgeschrieben. Beachten Sie die Berücksichtigung der 6%, sowie der Schlussrate.

```
-200 000 + 75 000 + bwrn(30000,15,1,1.06,1) / 1.06^5 -
        bwrv(4000,24,4,1.06,1)/1.06 - 998.95 / 1.06^(27/4)
```

So könnte der letzte Teil der Aufgabe in einer *DERIVE*-Bearbeitung aussehen:

d)

SOLVE(75000 1.07 = bwrv(4000, n, 4, 1.07, 1), n) = (n = 24.252402 − 371.46383 î ∨ n = 24.252402 + 371.46383 î ∨ n = 24.252402)

24 Vollraten!

fix2(75000 1.07 − bwrv(4000, 24, 4, 1.07, 1)) = 677

$$\text{fix2}\left(\text{ew}\left(677, \frac{23}{4}, 1.07, 1\right)\right) = 998.95$$

e)

$$\text{fix2}\left(\text{bw}(\text{bwrn}(30000, 15, 1, r, 1), 5, r, 1) - 200000 + \left(75000 - \text{bwrv}(4000, 24, 4, r, 1)\ r^{-1} - \text{bw}\left(998.95, \frac{27}{4}, r, 1\right)\right)\right)$$

15065.73

Der Kapitalwert fällt auf 15 065,73€

Jeder braucht ein Dach über dem Kopf

„Schaffa, schaffa, Hüsle baue“ ist ein Spruch, den man unseren Landsleuten in Vorarlberg gerne in den Mund legt. Und tatsächlich stammt diese Aufgabe in ihrer Urfassung aus einer Reifeprüfung, die vor vielen Jahren im Ländle gegeben wurde. In dankbarer Erinnerung widme ich diese paar Seiten meinem Freund und Kollegen Walter Heinzle, dem ich sehr viel Wissen verdanke.

Sie können leicht den ursprünglichen Teil wieder erkennen, der auch für damalige Zeiten recht anspruchsvoll gewesen ist. Ich möchte hier besonders auf die Möglichkeiten hinweisen, die über die rekursive Behandlung in Teilaufgabe h) machbar geworden ist.

Trotz des Wegfalls der lästigen Rechnerei verlangt die Aufgabe Textverständnis und eine gewisse Flexibilität im Umgang mit dem Funktionenapparat, der die Finanzmathematik beschreibt.

Ein 35-jähriger Angestellter benötigt für den Kauf einer Eigentumswohnung ein langfristiges Darlehen in der Höhe von 100 000€.

Seine Sparkasse unterbreitet ihm das folgende Finanzierungsangebot:

Aufnahme eines Baudarlehens über diesen Betrag mit einer Laufzeit von 24 Jahren bei einer Jahresverzinsung von 10,25% mit vierteljährlicher Kapitalisierung. Die Rückzahlungen erfolgen in nachschüssigen Monatsraten. Der Kreditnehmer muss für die Laufzeit des Darlehens eine Ablebensversicherung abschließen, deren monatliche Prämien in der Höhe von 62€ gemeinsam mit den Rückzahlungen zu begleichen sind. Bei Abschluss des Vertrags sind Kreditspesen und Steuern in der Höhe von 350€ fällig.

a) Welchem effektiven Zinssatz entspricht der angegebene?

b) Wie hoch ist die monatliche Belastung (inkl. Versicherung)?

c) Welcher effektiven Verzinsung entsprechen diese Konditionen, wenn man die Versicherung und die Spesen/Steuern mit einrechnet?

d) Wie hoch sind die gesamten Kreditkosten? (Darunter versteht man die Differenz aus der Kreditsumme und allen Rückzahlungen.)

Ein privater Finanzierungsberater schlägt ein anderes Finanzierungsmodell vor, bei dem zusätzlich zu einer Zwischenfinanzierung durch eine Bank ein Bausparvertrag abgeschlossen wird. Es ergibt sich eine Laufzeit von insgesamt 28 Jahren und die Rückzahlung erfolgt in nachschüssigen Monatsraten und zwar: 1 200€ für die ersten 7 Jahre, dann 900€ für die nächsten 7, weiters 700€ für die übernächsten 7 und schließlich 400€ für das letzte Viertel der Laufzeit.

e) Vergleiche diese Kreditkosten mit denjenigen vom vorigen Angebot.

f) Berechne auch hier die tatsächliche Zinsbelastung.

g) Welches Angebot würdest Du annehmen? Begründe Deine Antwort.

h) Um welchen Betrag müssten alle Rückzahlungen bei dieser Variante erhöht oder gesenkt werden, damit die effektive Verzinsung bei beiden Finanzierungsplänen gleich ist (unter Berücksichtigung von Versicherung, Spesen und Steuern)?

i) Bei welcher Kreditsumme zu den Rückzahlungsbedingungen von Variante 2 ist diese mit Variante 1 gleichwertig?

j) Verwende für beide Varianten eine geeignete Methode zur Darstellung der jeweiligen noch offenen Restschulden am Monatsende und stelle fest, zu welchem Zeitpunkt die Restschulden für beide Optionen gleich sind.

Lösungsvorschlag:

Grundsätzlich wird auch hier mit dem schon vorgestellten Formelmechanismus gerechnet.

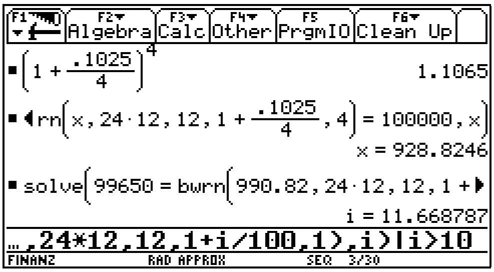
a) $\left(1+\frac{0,1025}{4}\right)^4 = 1,106508 \rightarrow i_{eff} \approx 10,65\%$

b) Die Kreditsumme ist der Barwert einer nachsch. Monatsrente mit einer Laufzeit von 24 Jahren bei einer viertelj. Verzinsung von 10,25/4%. Daher:

```
solve(bwrn(x,24*12,12,(1+0.1025/4),4)=100000,x)
```

Eine Rückzahlung beträgt 928,82€ und inklusive Versicherung sind dann 990,82€ monatlich zu bezahlen. Zur Verfügung gestellt werden insgesamt nur 99 650€. Daher erhält man die tatsächliche Verzinsung aus der folgenden Gleichung:

c)
```
99650 = bwrn(990.82,288,12,1+i/100,1),i)|i>10
```



Die tatsächliche Zinsbelastung beträgt 11,67%.

d) Die Kreditkosten sind demnach: $24 \times 12 \times 990{,}82€ - 99\,650€ = 185\,706{,}16€$

e) Die Kreditkosten betragen nun:

$1\,200€ \times 84 + 900€ \times 84 + 700€ \times 84 + 400€ \times 84 - 100\,000€ = 168\,800€.$

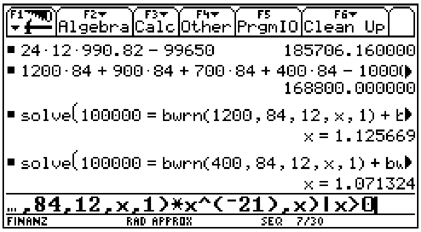
Damit scheint die zweite Variante deutlich günstiger zu sein.

f) Die einzelnen Periodenbarwerte sind auf den gemeinsamen Bezugspunkt – Kreditaufnahme – abzuzinsen und mit dem Kredit gleichzusetzen.
(x = Aufzinsungsfaktor = $1 + i$)

```
solve(100000=bwrn(1200,84,12,x,1)+bwrn(900,84,12,x,1)*
x^(-7)+bwrn(700,84,12,x,1)*x^(-14)+ bwrn(400,84,12,x,1)*
x^(-21),x)|x>1.1
```

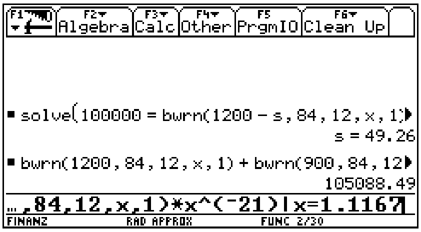
Als tatsächliche Verzinsung ergibt sich jetzt 12,57%.

g) Die höhere Verzinsung steht nur scheinbar im Widerspruch zu den niedrigeren Kreditkosten. Bei der zweiten Variante sind die Zahlungen ungleich verteilt. Wenn man etwa die hohen Zahlungen am Anfang mit den niedrigen am Ende vertauscht, hat man die gleichen Kreditkosten, aber die Verzinsung fällt plötzlich auf etwa 7%.



Als Konsequenz daraus sollte wegen der niedrigeren Verzinsung die erste Variante gewählt werden.

h) Alle Zahlungen im Ansatz zu f) werden um den gleichen Betrag s gesenkt, so dass der Barwert 100 000€ bei einer Verzinsung von 11,67% erreicht werden kann.
Die Reduktion müsste 49,26€ betragen.

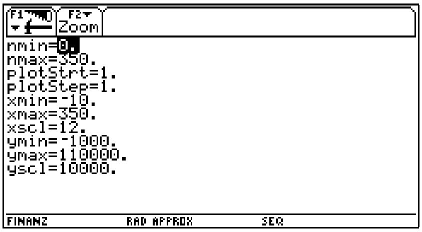


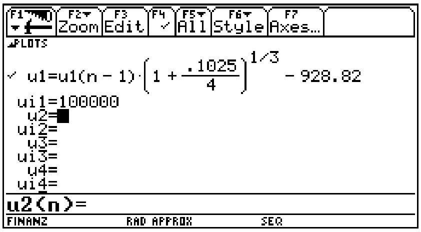
i) Das ist die rechte Seite der Gleichung in f) mit 11,67% als Zinsfuß.

Bei einer Kreditsumme von 105 088,49€ wäre diese Möglichkeit gleich günstig.

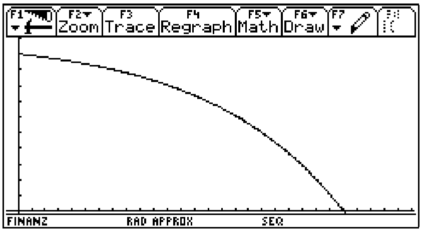
j) Die Restschulden können z.B. rekursiv im `SEQUENCE`-Modus definiert werden. Dann lässt sich entweder aus der Tabelle oder – schneller – aus dem Graphen die Antwort ablesen.

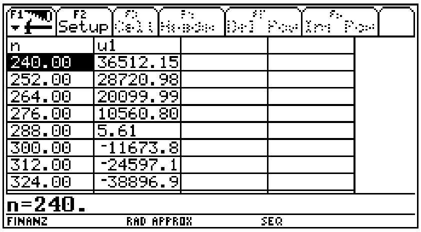
Für die Variante 1 muss die Verzinsung in die äquivalente Monatsverzinsung umgewandelt werden. Die `WINDOWS`-Werte werden gleich auch im Hinblick auf die zweite Variante eingestellt.





Graphik und Tabelle zeigen, dass man in 24 Jahren oder 288 Monaten mit den Rückzahlungen fertig ist.

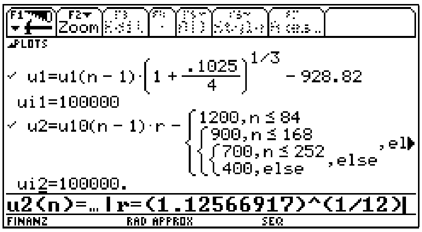


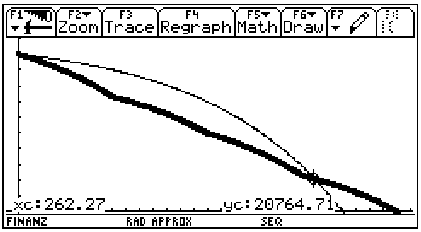


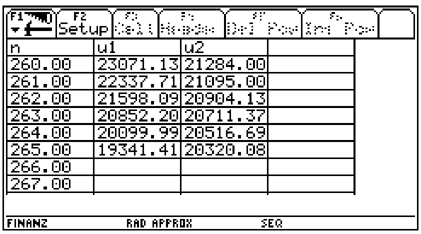
Die Definition der zweiten Folge ist ein wenig schwieriger, weil sie stückweise definiert werden muss. Das ist auch im Folgeneditor machbar.

```
u2(n)=u2(n-1)*1.125669^(1/12)-when(n≤84,12ØØ,
       when(n≤168,9ØØ,when(n≤252,7ØØ,4ØØ)))
```

```
u2i(n)=1ØØØØØ
```







Nach ca. 262 oder 263 Monaten sind die Restschulden gleich. Die Graphen und die Tabelle zeigen, dass die Modelle stimmen. Nach 24 bzw. nach 28 Jahren sind die Restschulden jeweils auf Null gefallen.

In *DERIVE* wird die rekursive Vorgangsweise mit dem `ITERATES`-Befehl nachvollzogen. (Das können Sie auf der Diskette finden.)

Der Tilgungsplan – ein rekursives Modell

Wie schon in der Einleitung erwähnt, sind die Tilgungspläne schon lange aus unseren Schularbeiten – und erst recht aus den Reifeprüfungsaufgaben – weitgehend verschwunden.

Sehen Sie bitte an dieser Aufgabe, wie dieser, scheinbar überlebten Aufgabenstellung ein nicht unbeträchtlicher Gehalt verliehen werden kann, indem man

(1) die rekursive Denkweise in einfacher Weise beleben kann und

(2) auch der formalen Gestaltung den ihr zustehenden Wert verleiht.

Interessant mag erscheinen, dass die angesprochene rekursive Denkweise durch einfaches wiederholtes Tastendrücken am TI besonders eindrucksvoll erlebt werden kann. Für mich war die Wiederbegegnung mit dem Tilgungsplan nach vielen Jahren des Vergessens sehr eindrucksvoll und erfrischend.

Die Einnahmen einer Gemeinde lassen für die nächsten 15 Jahre – bedingt durch die Erschließung eines Areals für die Ansiedlung eines Gewerbe- und Industrieparks – Mehreinnahmen in einer voraussichtlichen Höhe von 30 000€/Jahr erwarten. Man will diese Einnahmen zweckgebunden für den Ausbau der Infrastruktur verwenden und legt unter der Bevölkerung eine Anleihe mit einer Laufzeit von 15 Jahren auf. Es wird eine Verzinsung von 4,5% angeboten.

a) In welcher Höhe kann die Anleihe aufgelegt werden, wenn die erwarteten Überschüsse zur Deckung der Annuitäten herangezogen werden sollen (auf die nächsten 1000€ gerundet)?
Wie lauten die ersten und die letzten zwei Zeilen des entsprechenden Tilgungsplanes?

b) Während der ersten 6 Jahre wird die Anleihe plangemäß getilgt. Besondere unerwartete Belastungen auf dem Gesundheitssektor machen es notwendig, vorerst zwei Jahre mit der Tilgung auszusetzen (es wird nur der Zinsendienst geleistet). Dann sollte mit erhöhten Annuitäten so fortgesetzt werden, dass die Anleihe mit dem 15. Jahr ausläuft. Wie lauten die 6. – 9. Zeile und die beiden letzten Zeilen des Tilgungsplans nun?

c) Nach heftigen Debatten beschließt der Gemeinderat – gegen die Stimmen der Opposition – , dass für zwei Jahre überhaupt nichts gezahlt wird (auch keine Zinsen), dass aber ab dem 9. Jahr die Zinsen auf 5% und die Annuitäten um 10% erhöht werden sollen. Wie lange dauert die Tilgung der Anleihe unter diesen Bedingungen?

d) Stelle vom nunmehrigen Tilgungsplan die Zeilen 1, 2, 5-9 und die beiden letzten in einer ordentlichen Form zusammen.

e) Ein ortsansässiger Unternehmer hat Anteile in der Höhe von 7 000€ gezeichnet, die nach 10 Jahren verlost (zurückgezahlt) wurden. Er konnte seine Zinsgewinne zu durchschnittlich 4% wiederveranlagen. Welche durchschnittliche Rendite hat seine Geldanlage erwirtschaftet?

Lösungsvorschlag:

Der Vorschlag beruht zuerst auf der *DERIVE*-Durchführung. Es wird durchgängig mit dem `ITERATES`-Befehl gearbeitet, der den rekursiven Aufbau des Tilgungsplanes sehr schön nachvollziehen läßt.

a) Die Anleihesumme ist der gerundete Barwert aller Annuitäten = 323 000€.

Eine Rundungsroutine wird vorbereitet und die Höhe der tatsächlich zu zahlenden Annuitäten ermittelt (= 30 075,76€).

```
         ROUND(x, 0.01)
rd(x) := ──────────────
              100
bwrn(30000, 15, 1, 1.045, 1) = 322186.37
SOLVE(bwrn(x, 15, 1, 1.045, 1) = 323000, x)
x = 30075.760
```

Für eine ansprechende Gestaltung des Tilgungsplans werden eine Überschrift und eine Zwischenraumzeile vorbereitet.

```
ueberschr:=["Jahr","Restschuld","Zinsen","Tilgung","Annuität"]
zwr:=[..., ..., ..., ..., ...]
```

In der Ausgangszeile z_0 steht nur die Anleihesumme.

```
z0:=[0, 323000, ---, ---, ---]
[ann1:=30075.76, i:=0.045]
```

(Annuität und Zinsfuß werden definiert.)

Die Entwicklung des ersten Planes erkennt man im folgenden Befehl. Die Rekursion bezieht sich immer auf den Ausdruck `z`, dessen Startwert der Vektor `z0` ist.

neues erstes Element (Jahr) = altes erstes Element + 1
neues 5. Element (Annuität) = `ann1`
neues 3. Element (Zinsen) = Zinsen vom alten zweiten Element (alter Restschuld)
neues 4. Element (Tilgung) = Annuität – Zinsen
neues 2. Element (Restschuld) = alte Restschuld – Tilgung

$$\text{plan1} := \text{ITERATES}\left(\left[z_1 + 1,\ \text{rd}(z_2 - (\text{ann1} - z_2\ i)),\ \text{rd}(z_2\ i),\ \text{rd}(\text{ann1} - z_2\ i),\ \text{rd}(\text{ann1})\right],\ z,\ z0,\ 15\right)$$

APPEND([ueberschr], plan1)

Jahr	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität
0	323000	---	---	---
1	307459.24	14535	15540.76	30075.76
2	291219.15	13835.67	16240.09	30075.76

```
APPEND([ueberschr], plan1 ROW [1, 2], [zwr], plan1 ROW [15, 16])
```

Jahr	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität
0	323000	---	---	---
1	307459.24	14535	15540.76	30075.76
...	...	...	...	...
14	28780.64	2534.49	27541.27	30075.76
15	0.01	1295.13	28780.63	30075.76

b) Die 6. Zeile ist die Ausgangszeile für die beiden nächsten Jahre, in der nur die Zinsen gezahlt werden. Plan 2 hat eine andere Entstehungsgeschichte.

```
z6 := plan1 ROW 7
```

$$\text{plan2} := \text{ITERATES}\left(\left[z_1 + 1,\ \text{rd}(z_2),\ \text{rd}(z_2\ 0.045),\ 0,\ \text{rd}(z_2\ 0.045)\right],\ z,\ z6,\ 2\right)$$

6	218614.4	10709.15	19366.61	30075.76
7	218614.4	9837.65	0	9837.65
8	218614.4	9837.65	0	9837.65

```
z8 := plan2 ROW 3
SOLVE(bwrn(x, 7, 1, 1.045, 1) = 218614.4, x) = (x = 37099.184)
```

Die erhöhte Annuität beträgt 37 099,18€. Plan 3 erhält man leicht durch Anpassung des „Rezeptes“ für Plan 1.

```
ann2 := 37099.184
```

$$\text{plan3} := \text{ITERATES}\left(\left[z_1 + 1,\ \text{rd}(z_2 - (\text{ann2} - z_2\ i)),\ \text{rd}(z_2\ i),\ \text{rd}(\text{ann2} - z_2\ i),\ \text{rd}(\text{ann2})\right],\ z,\ z8,\ 7\right)$$

```
APPEND([ueberschr], plan2, [plan3 ROW 2], [zwr], plan3 ROW [7, 8])
```

Jahr	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität
6	218614.4	10709.15	19366.61	30075.76
7	218614.4	9837.65	0	9837.65
8	218614.4	9837.65	0	9837.65
9	191352.86	9837.65	27261.54	37099.18
...	...	...	...	...
14	35501.61	3126.35	33972.83	37099.18
15	0	1597.57	35501.61	37099.18

c) In den Jahren 7 und 8 ist die Annuität = `ann3` = 0, daher wird die Tilgung negativ und die Restschuld erhöht sich mit jedem Jahr. Für die Zeit ab dem 9. Jahr gelten ein neuer Zinsfuß `i_n` = 5% und die neue Annuität `ann4`.

Dem *DERIVE*-Ausschnitt kann man leicht folgen:

```
ann3 := 0
plan4 := ITERATES([z_1 + 1, rd(z_2 - (ann3 - z_2 i)), rd(z_2 i), rd(ann3 - z_2 i),
  rd(ann3)], z, z6, 2)
```

$$\begin{bmatrix} 6 & 218614.4 & 10709.15 & 19366.61 & 30075.76 \\ 7 & 228452.05 & 9837.65 & -9837.65 & 0 \\ 8 & 238732.39 & 10280.34 & -10280.34 & 0 \end{bmatrix}$$

```
z8 := plan4 ROW 3
ann4 := ann1 1.1
i_n := 0.05
SOLVE(bwrn(ann4, x, 1, 1.05, 1) = 238732.39, x, Real) = (x = 9.1728542)
```

Es geht insgesamt noch weitere 10 Jahre:

d) Diese 10 Jahre werden im Plan5 beschrieben, dessen letzte Zeile die insgesamt vorletzte `vlz` des ganzen konvertieren Rückzahlungsplans darstellt. Im letzten Jahr ist nur noch die übrig gebliebene Restschuld + den Zinsen für das letzte - das insgesamt 18. Jahr - zu leisten.
Dann wird der ganze Plan gemäß Aufgabe zusammengebaut.

```
plan5 := ITERATES([z_1 + 1, rd(z_2 - (ann4 - z_2 i_n)), rd(z_2 i_n), rd(ann4 - z_2 i_n),
  rd(ann4)], z, z8, 9)
vlz := plan5 ROW 10
vlz = [17, 5556.76, 1840, 31243.33, 33083.34]
lz := [18, 0, rd(5556.76 i_n), 5556.76, 5556.76 (1 + i_n)]
plan_kompl := APPEND([ueberschr], plan1 ROW [1, 2], [zwr], [plan1 ROW 6], plan4,
  [plan5 ROW 2], [zwr], [plan5 ROW 10], [lz])

plan_kompl
```

Jahr	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität
0	323000	---	---	---
1	307459.24	14535	15540.76	30075.76
...	...	...	...	...
5	237981.01	11543.11	18532.65	30075.76
6	218614.4	10709.15	19366.61	30075.76
7	228452.05	9837.65	-9837.65	0
8	238732.39	10280.34	-10280.34	0
9	217585.67	11936.62	21146.72	33083.34
...	...	...	...	...
17	5556.76	1840	31243.33	33083.34
18	0	277.84	5556.76	5834.598

e) Der Endwert aller Zinserträge aus der Anleihe ist bei 4%iger Verzinsung zu berechnen.

$$\mathrm{ewrn}(315,\ 6,\ 1,\ 1.04,\ 1)\ 1.04^{4} + 350\ (1 + 1.04) = 3158.2875$$

$$\mathrm{SOLVE}\left(\mathrm{ev}\left(7000,\ 10,\ 1 + \frac{x}{100},\ 1\right) = 7000 + 3158.29\right)$$

$$x = -203.79400 \vee x = 3.7940018$$

Nach 10 Jahren erhält der Unternehmer sein Kapital zurück, das in dieser Zeit um insgesamt 3158,29€ gewachsen ist. Die effektive Verzinsung beträgt daher ca. 3,8%.

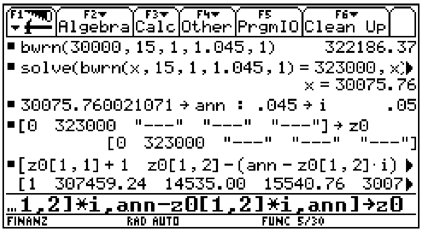
Auf Seite 28 wird der Aufbau eines Tilgungsplanes mit `CellSheet` gezeigt. Nicht zu verachten ist die Möglichkeit, auch im Homescreen des *TI* rekursiv vorgehen zu können.

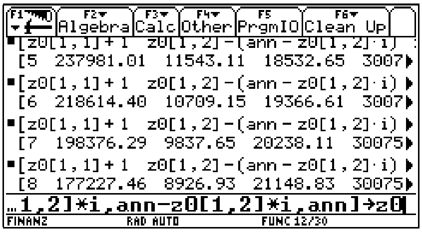
Nach Berechnung der Annuität wird die „nullte" Zeile `zØ` erzeugt, die dann jeweils durch die nächste Zeile ersetzt wird. Dazu muss die Anweisung nur einmal editiert werden. Aufeinanderfolgendes Drücken der Eingabetaste generiert den Tilgungsplan zeilenweise. Die Werte müssen dann allerdings aufs Papier übertragen werden.

Diese wichtige eine generierende Zuweisung lautet:

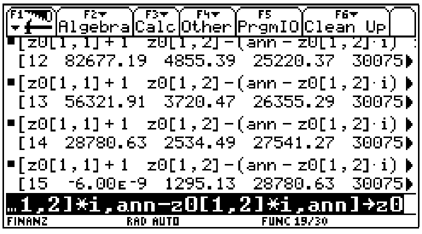
```
[zØ[1,1]+1,zØ[1,2]-(ann-zØ[1,2]*i),zØ[1,2]*i,ann-zØ[1,2]*i,ann] → zØ
```

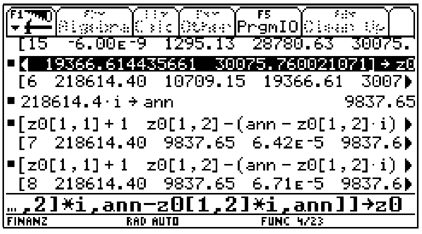
Es ist reizvoll, diese Anweisung mit dem `ITERATES`-Befehl von *DERIVE* zu vergleichen. Zu beachten ist, dass der *TI* einen Zeilenvektor als eine 1 × n-Matrix interpretiert. Daher muss ein Element über zwei „Indizes" angesprochen werden.





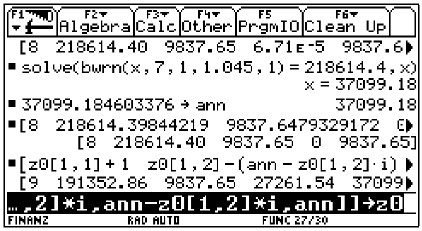
Der „Erzeugungsbefehl" wird 15 mal aufgerufen, dann ist der Tilgungsplan fertig. Für Teilaufgabe b) wird die 6. Zeile zur „nullten". Nur die Zinsen werden ausgezahlt, das ergibt die neue Annuität `ann`, und schon können die nächsten Zeilen generiert werden.



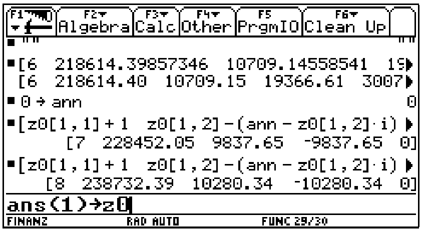


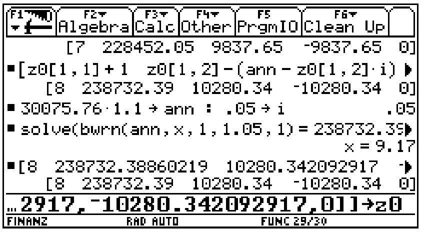
Vergleichen Sie bitte immer mit dem entsprechenden Schritt in der *DERIVE*-Ausführung.

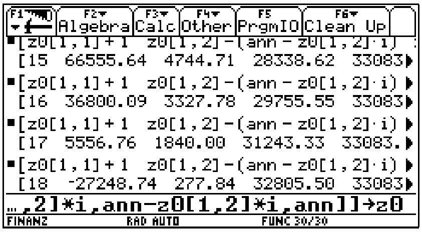
Die neue Annuität wird berechnet, sie wird zur neuen ann und der konvertierte Plan könnte zu Ende geführt werden.

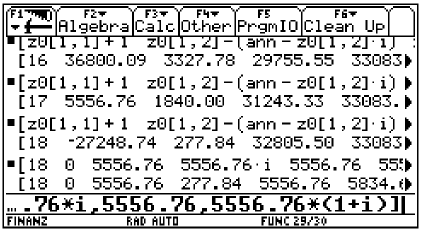


In weiterer Folge finden Sie die Durchführung auf dem *TI*.





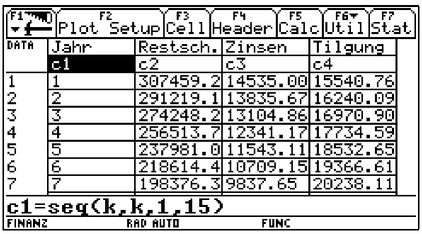


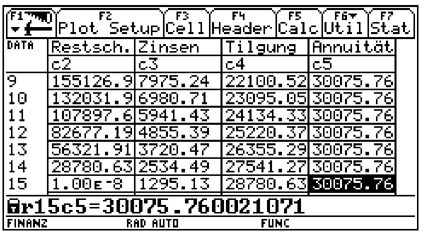


Der Einsatz der in den Lehrbüchern abgeleiteten Formeln für die elementweise Erzeugung eines Tilgungsplans ist unter dem Namen „*rekursiv*" nicht vorgesehen. Ich möchte daher noch zeigen, wie das Problem im `Data/Matrix Editor` gelöst werden könnte.

`ann` sei bereits mit 30 075,76 und `i` mit 0,045 belegt.

```
c1: seq(k,k,1,15)
c2: seq(323000-ewrn(ann-323000*i,k,1,1.05,1),k,1,15)
c4: seq((ann-323000*i)*1+i^(k-1),k,1,15)
c5: seq(ann,k,1,15)
c3: c5-c4
```





So können der Reihe nach die Teilpläne voneinander getrennt erzeugt werden.

Nostalgie in einer Problemlöseschularbeit

Diese Vermessungsaufgabe hat schon Geschichte. Anlässlich einer „Problemlöseschularbeit“ im Rahmen unseres ACDCA-Projekts, in dem wir neue Formen der Leistungsbeurteilung probieren konnten, erinnerte ich mich an eine Aufgabe, die mir in den frühen 60er-Jahren in der Mittelschule als Hausübung gegeben worden war. Ich kramte in meinen alten Dingen – und ich fand das Hausübungsheft von Pepi Böhm, 6B, aus dem Jahre 1961.

Das Beispiel schien mir recht geeignet für diese Arbeit, die noch dazu als Gruppenschularbeit angesetzt war. Jeweils drei Schüler arbeiteten an einer Arbeit. Sie erhielten dann eine gemeinsame Beurteilung.

Während der Arbeit war sehr schön die Arbeitsteilung zu beobachten. Während ein Gruppenmitglied nach einer groben gemeinsam erstellten Skizze sich an die maßstabsgetreue Zeichnung machte, begannen die beiden anderen zu rechnen, wobei sie bei den Dreiecksauflösungen auf eine fertige Black Box zurück greifen konnten, und sich nicht mit langwierigen Rechnungen über Sinus- und Kosinussatz herumschlagen mussten, wie ich 1961 (damals natürlich noch mit Logarithmenbuch!). Damit waren sie nie vom Ziel ihrer Aufgabenstellung abgelenkt. (Zu dieser Black Box finden Sie ein weiteres Beispiel und zusätzliche Bemerkungen im ersten Band. Die entsprechenden Funktionen sind auf der Diskette für TI und DERIVE.

Die Einbeziehung der analytischen Geometrie sorgt für die so oft geforderte Vernetzung von verschiedenen Teilgebieten der Schulmathematik.

Von einem, unter dem Winkel $\alpha = 32{,}1567°$ abfallenden Hang sieht man von einem Punkt A aus einen am gegenüberliegenden Hang liegenden trigonometrischen Punkt B unter dem Tiefenwinkel 22,3462°.

Geht man von A 150m talwärts zum Punkt A’, so kann man B von dort unter dem Tiefenwinkel 14,5883° anvisieren. A’ ist 125m von der Talsohle T entfernt. Die Seehöhe von B ist in der Karte mit 982m angegeben.

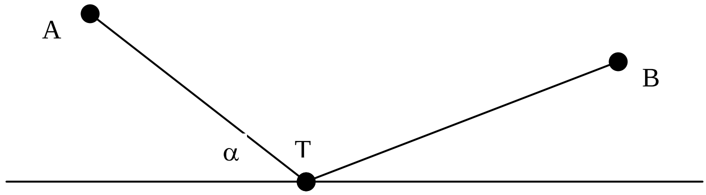
a) Fertige eine Zeichnung des Sachverhalts in einem geeigneten Maßstab an und lies vorerst die Antworten auf die Fragen b) – d) aus der Zeichnung ab. Dann führe die Berechnung durch.

b) Welche Seehöhe haben A und A’?

c) Welchen Neigungswinkel hat der Gegenhang (jener mit B)?

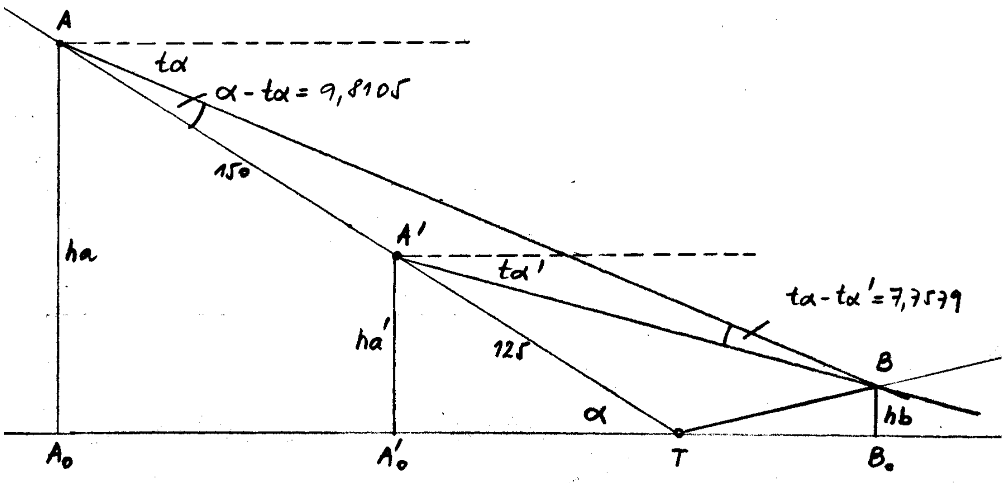
d) Wie weit von der Talsohle ist B entfernt?

e) Führe die Berechnung auch über die analytische Geometrie durch.



Lösungsvorschlag:

a) Die maßstabsgetreue Zeichnung (hier im Druck etwas verkleinert!)
Frage für Schüler: Welcher Maßstab tritt hier auf?



Der Zeichnung können im Original die folgenden Werte entnommen werden:

TB = 30,5mm $\hat{=}$ 76m

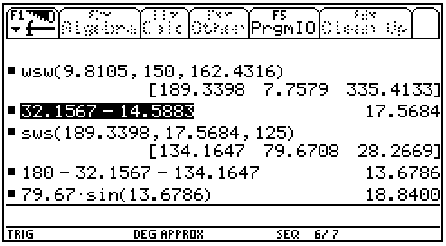
$\angle$ BTB_0 = Neigungswinkel ~ 14°

hb = 7mm $\hat{=}$ 18m

ha'– hb = 19mm $\hat{=}$ 48m → Seehöhe von A' ~ 982m + 48m = 1030m

ha – hb = 50,5mm $\hat{=}$ 126m → Seehöhe von A ~ 982m + 126m = 1108m

b) - d) Im Dreieck ΔAA'B kennt man eine Seite AA' = 150 und die beiden anliegenden Winkel mit α – tα und 180 – α + tα'. `wsw(winkel1,seite3,winkel2)` liefert als Ergebnis die Liste `[seite1,winkel3,seite2]`. (Mit *DERIVE* geht es genau so.)

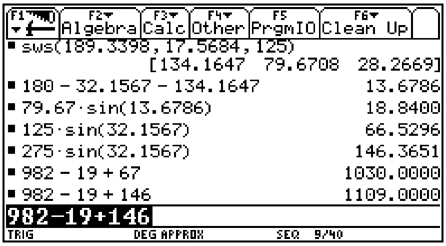


Damit ergibt sich für die Strecke A'B, als dem Winkel 9,8105° gegenüberliegend, der Wert 189,3398.

Nun kann das Dreieck ΔTA'B aufgelöst werden, da man zwei Seiten (A'T und A'B), sowie den von ihnen eingeschlossenen Winkel α - tα' kennt.

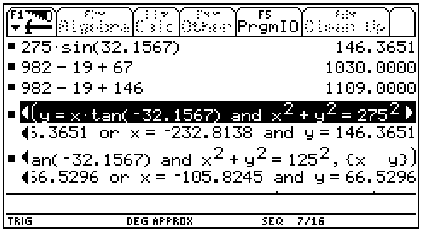
`sws(seite1,winkel3,seite2)` wird angewendet und liefert bereits die beiden gewünschten Endergebnisse für TB = 79,67m und über den ∠ A'TB = 134,1647° den Neigungswinkel von TB mit 180° – α – 134,1647° = 13,6786°.

Der Vergleich mit den aus der Zeichnung abgelesenen Werten bestätigt die Ergebnisse.



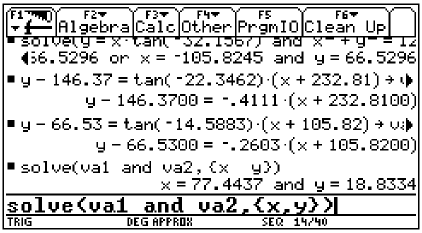
Für die Seehöhen braucht man nur mit rechtwinkligen Dreiecken zu arbeiten und erhält der Reihe nach die Abstände zur Basisgeraden, woraus einfach die Seehöhen für A und A' mit 1109m, bzw. 1030m abgeleitet werden können.

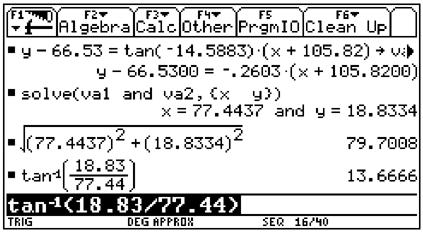
e) Für die analytische Behandlung setzt man den Ursprung z.B. in den Punkt T und bestimmt vorerst die Koordinaten von A und A'. Das geht einfach mit der Vektorrechnung, und wenn diese nicht verfügbar ist, dann schneidet man die Trägergerade mit zwei Kreisen um T mit den Radien 275 bzw. 125.



Die Punkte A und A' haben die Koordinaten A(-232,81/146,37) und A'(-105,82/66,53).

Die Gleichungen der Visierlinien durch A und A` heißen `va1` und `va2`.





Im Schnittpunkt der Geraden `va1` und `va2` ergibt sich Punkt B mit B(77,44/18,83).

Den Abstand TB und den Neigungswinkel findet man nun leicht.

Da bleibt mir der Atem weg

Winkelfunktionen und ihre Anwendungen sind ein wesentlicher Bestandteil aller unserer Lehrpläne. Leider werden sie dann zumeist nur für Dreiecksauflösungen verwendet (Vermessungsaufgaben, ...). Man findet sie dann wieder im Zusammenhang mit den Ableitungs- und Integrationsregeln, wobei man sich schon mit einer Begründung für die Notwendigkeit, dies auch mit Winkelfunktionen zu tun, schwer tut (eventuell notwendig im Zusammenhang mit Extremwertaufgaben).

Wir können aber viele periodische Vorgänge des täglichen Lebens durch Winkelfunktionen modellieren. Hier wird ein Beispiel gezeigt. Weitere Aufgaben können Sie in einem ACDCA-Skriptum „Fächerübergreifende Anwendungen von Winkelfunktionen" (www.acdca.ac.at) finden. Besonders hinweisen will ich in diesem Zusammenhang auf ein gemeinsam mit Tania Koller ausgearbeitetes Beispiel über die Berechnung von Heizkosten.

Modellieren mit Winkelfunktionen, Interpretationen von Ableitungen und Integralen, Arbeiten mit den richtigen physikalischen Dimensionen können gemeinsam eine attraktive Aufgabe ergeben.

Im Rahmen einer Untersuchung wird bei einem Patienten die Atemgeschwindigkeit gemessen. Um ordentliche Ruhedaten zu erhalten, sind erst Daten, die 10 Sekunden nach Untersuchungsbeginn gemessen werden, brauchbar. Für den ersten kurzen Zeitraum gibt das Messinstrument die folgenden Daten aus:

Zeit in Sek	10.0	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5	14.0	14.5	15.0	15.5
Liter/sec	0.36	0.12	-0.15	-0.33	-0.44	-0.25	-0.05	0.28	0.43	0.33	0.15	-0.04

a) Stelle die Daten graphisch dar. Welcher Funktionstyp wird sich am besten zur Beschreibung der Atmungsgeschwindigkeit eignen und warum?

b) Finde eine geeignete Modellfunktion $v(t)$, ohne ein eventuell vorhandenes Regressionswerkzeug zu benützen. Erkläre die Vorgangsweise.
Stelle auch die Abweichungen der Daten vom Modell dar.

c) Beantworte unter Verwendung der Graphik die folgenden Fragen:

Wie lange dauert ein Atmungszyklus?

Wie oft atmet diese Person durchschnittlich pro Minute?

Welche Bedeutung haben die unterschiedlichen Vorzeichen für die Funktionswerte?

Welche Bedeutung haben Nullstellen und Extremwerte des Graphen?

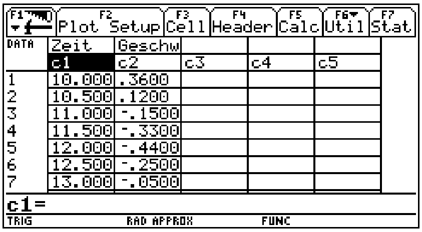
d) Die Lunge enthält auch in ausgeatmetem Zustand ca. 1200cm^3 Restluft. Wieviel Luft befindet sich in der Lunge des untersuchten Patienten, wenn er voll eingeatmet hat?

e) Finde eine Modellfunktion für das Luftvolumen $L(t)$ in der Lunge in Abhängigkeit von der Zeit t.

f) Wie lautet die Ableitung der Atmungsgeschwindigkeitsfunktion und welche Interpretation kann man ihr verleihen? Welchen Wert hat sie an der Stelle $t = 11{,}1$sec? Gib den Wert mit seiner richtigen Dimension an.

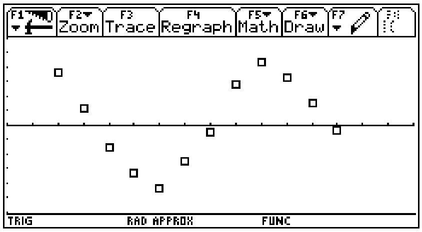
Lösungsvorschlag:

a) Die Daten werden auf dem *TI* in den `Data/Matrix Editor` eingegeben und als Streudiagramm dargestellt.



DATA	Zeit	Geschw			
	c1	c2	c3	c4	c5
1	10.000	.3600			
2	10.500	.1200			
3	11.000	-.1500			
4	11.500	-.3300			
5	12.000	-.4400			
6	12.500	-.2500			
7	13.000	-.0500			

c1=



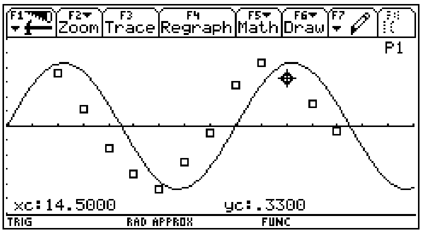
Wegen der offensichtlichen Periodizität und der Lage der Punkte dürfte sich eine trigonometrische Funktion am besten eignen.

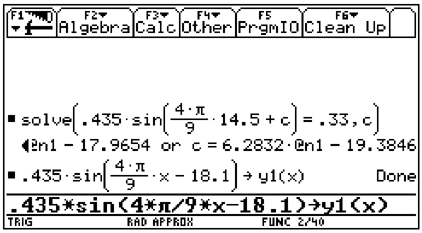
b) Das Modell lautet $v(t) = a \sin(b\, t + c) + d$. Dabei sind die Parameter a, b, c und d zu bestimmen.

Die Amplitude a ergibt sich aus $\frac{Maximum - Minimum}{2}$. Daher $a = 0{,}435$.

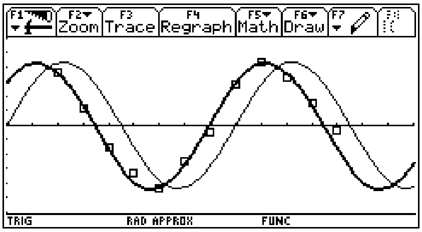
Eine Periode dauert nach den Datenpunkten etwa 4,5 sec. Daraus ergibt sich die Kreisfrequenz b mit $\frac{2\pi}{4{,}5}$. Verschiebung in vertikale Richtung gibt es keine, da die Atemgeschwindigkeit sinnvoll symmetrisch um 0 pendeln soll. Der geringe Unterschied von Maximum und Minimum kann vernachlässigt werden.

In erster Annäherung lautet der Funktionsterm $0{,}435 \sin \frac{4\,\pi}{9} t$.

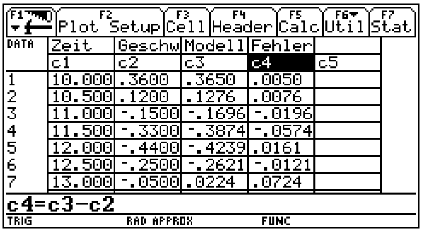




Für die noch erforderliche horizontale Verschiebung wählt man einen Datenpunkt und legt die Kurve durch diesen Punkt oder man findet den Verschiebungswert mit Hilfe des Cursors in der Graphik.

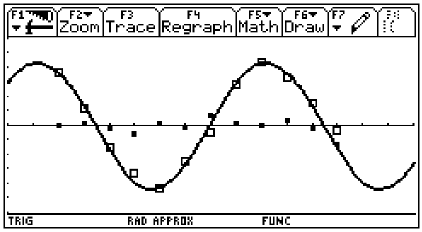


Der Wert -17.97 für *c* wird händisch noch ein wenig nachgebessert und *c* = -18,1 scheint recht gut zu passen.
Man könnte die Verschiebung auch über Trace ablesen .....



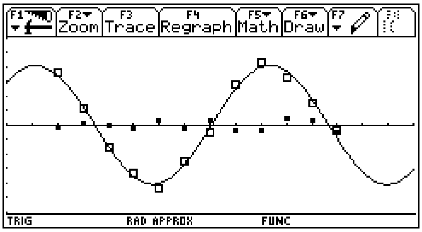
DATA	Zeit	Geschw	Modell	Fehler	
	c1	c2	c3	c4	c5
1	10.000	.3600	.3650	.0050	
2	10.500	.1200	.1276	.0076	
3	11.000	-.1500	-.1696	-.0196	
4	11.500	-.3300	-.3874	-.0574	
5	12.000	-.4400	-.4239	.0161	
6	12.500	-.2500	-.2621	-.0121	
7	13.000	-.0500	.0224	.0724	

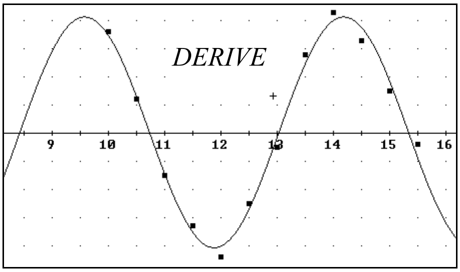
c4=c3-c2



Entweder übertragen die Schüler die Tabelle der Abweichungen oder das Diagramm in ihre Dokumentation.

Auf dem *TI*-89/*TI*-92+/*Voyage*200 gibt es auch die trigonometrische Regression und es ist für den Lehrer reizvoll, das damit erreichte Modell mit dem so elementar ermittelten zu vergleichen. Das Ergebnis ist nicht wesentlich besser. *DERIVE* verfügt über keine implementierte trigonometrische Regression[1].





c) Ein Zyklus dauert 4,5 Sekunden. Diese Person hat in der Minute etwas mehr als 13 Atmungszyklen.

Das positive Vorzeichen steht für Einatmen, das negative für Ausatmen.

Die Schnittpunkte mit der *x*-Achse geben die Zeitpunkte an, in denen der Wechsel zwischen Ein- und Ausatmen geschieht.

Zu den Zeitpunkten der Maxima wird am heftigsten eingeatmet, bei den Minima am raschesten ausgeatmet.

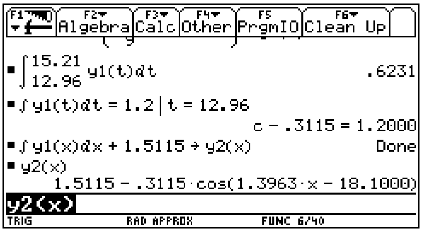
[1] *MacDonald Phillips* programmierte den Marquardt-Levenberg-Algorithmus und er wurde im *DERIVE* & *TI*-92 Newsletter #46 publiziert.

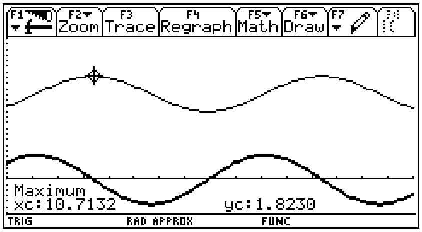
d) Das insgesamt eingeatmete Luftvolumen erhält man über die Integration über jene halbe Periode, die im Einatmungsbereich liegt. Zwei Nullstellen können im Grafikfenster ermittelt werden: $t_1 = 12{,}96$ und $t_2 = 15{,}21$.
Es werden ca. 0,62 Liter eingeatmet (und dannn auch wieder ausgeatmet).

e) $L(t)$ ist das unbestimmte Integral der Geschwindigkeitsfunktion, bei der noch die richtige Integrationskonstante ermittelt werden muss. Eine mögliche Bedingung wäre $L(t = 12{,}96) = 1{,}2$. (Wenn mit dem Einatmen begonnen wird, dann ist gerade noch das Restvolumen 1,2 Liter in der Lunge vorhanden.)

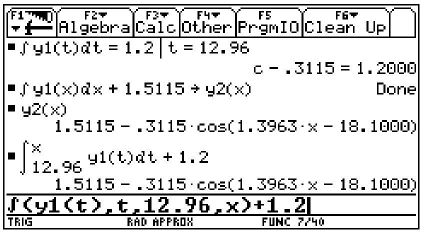
Die nächsten Abbildungen zeigen die Vorgangsweise.

Im rechten Bild ist die Luftvolumsfunktion gezeichnet. Der Cursor steht genau im Zeitpunkt, zu dem der Einatmungsprozess beendet ist. Nun ist am meisten Luft in der Lunge: 1,2 Liter und die zugeatmeten 0,62 Liter.





Wenn Schüler das Wesen des Integrals verstanden haben, dann können Sie die „Flächenfunktion" sofort hinschreiben.



Die Luftvolumenfunktion lautet: $L(t) = -0{,}3115 \cos(1{,}3963\, t - 18{,}1) + 1{,}5115$.

f) Die Ableitung der Atmungsgeschwindigkeitsfunktion lautet:

$v'(t) = 0{,}6074 \cos(1{,}3963\, t - 18.1)$.

Sie beschreibt die Beschleunigung (Verzögerung) beim Atmen.

$v'(11{,}1) = -0{,}52$ Liter/sec^2. Der Atmungsprozess verlangsamt sich.

Eine diskrete Aufgabe mit einer stetigen Verteilung

Die wichtigste stetige Verteilung ist die Normalverteilung, die traditionellerweise mit den Tabellen behandelt wurde. Skizzen mit Glockenkurve und entsprechender Fläche unter dem Graphen dienten dem Verständis. Die tatsächliche Integration konnte nicht durchgeführt werden.

Andere stetige Verteilungen dienten als „Spielwiese" für eine – mehr oder weniger – sinnvolle Anwendung des Integrierens. Heute kann auch die zugehörige graphische Darstellung einen wesentlichen Teil der Aufgaben ausmachen. Komplexe Rechnungen werden dem „Rechenknech"t überlassen.

Der Graph der Dichtefunktion $f(X)$ einer Zufallsvariablen X ist für $2 \leq X \leq 6$ eine Parabel. Außerhalb dieses Intervalls kann die Zufallsvariable keinen Wert annehmen. Außerdem gilt $f(X = 2) = 0{,}05$ und $f(X = 6) = 0{,}1$.

a) Wie lautet die Dichtefunktion?
Welche Eigenschaften muss eine Funktion aufweisen, dass sie als Dichtefunktion geeignet ist? Zeige, dass $f(X)$ diese Eigenschaften aufweist.

b) Wie lautet die Verteilungsfunktion $F(x)$?

c) Skizziere die Graphen von $f(X)$ und $F(x)$.

d) Wo liegt der „wahrscheinlichste" Wert? Welche Bedeutung hat er für $F(x)$?

e) Wie groß sind Mittelwert und Varianz?

f) Zeige die Gültigkeit des Verschiebungssatzes.

g) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X bei einem Zufallsexperiment einen Wert zwischen 3 und 4,5 annimmt.

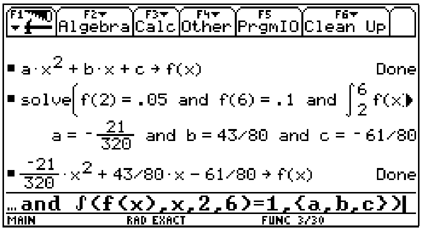
h) Für welchen Wert u gilt, dass $p(X > u) = 75\%$?

Lösungsvorschlag:

a) Die gesuchte Parabel muss die geforderten Funktionswerte annehmen und außerdem im Definitionsbereich mit der x-Achse den Flächeninhalt 1 bilden.

Die Gleichungen können einzeln aufgestellt werden und das entstehende Gleichungssystem wird dann auf eine bekannte Weise gelöst (z.B. mit `rref(..)`). Ab dem *TI*-92+ oder mit *DERIVE* kann man sich das sparen, weil Systeme mit mehreren Variablen – nicht nur lineare – direkt gelöst werden können (siehe Bild auf der nächsten Seite bzw. Diskette).

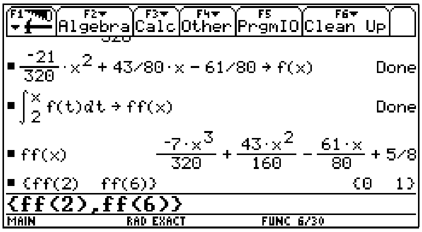
Alle Gleichungen werden in der entsprechenden Syntax eingegeben und das System kann „auf Knopfdruck" gelöst werden.

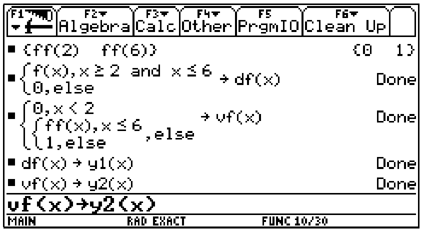


Die Dichtefunktion darf für $2 \le X \le 6$ keine negativen Funktionswerte annehmen. Es handelt sich um eine nach unten offene Parabel durch die beiden Randpunkte. Daher ist diese Forderung erfüllt. Außerdem muss die Fläche mit der x-Achse den Wert 1 annehmen.

Die Dichtefunktion lautet: $f(X) = \begin{cases} -\dfrac{21}{320}x^2 + \dfrac{43}{80}x - \dfrac{61}{80} & \text{für } 2 \le X \le 6 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

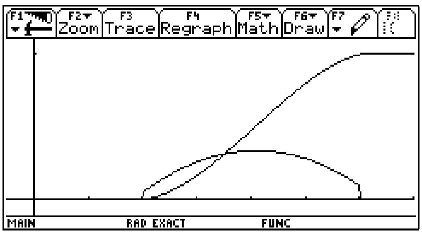
Die Dichtefunktion wird später gemeinsam mit der Verteilungsfunktion als abschnittsweise definierte Funktion in den Funktioneneditor geschrieben. Vorher wird die Verteilungsfunktion $F(\mathrm{x}) = \mathrm{p}(X \le x)$ bestimmt.

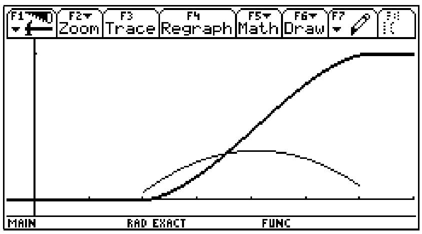




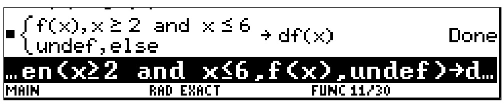
b) Die Verteilungsfunktion lautet: $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ -\dfrac{7x^3}{320} + \dfrac{43x^2}{160} - \dfrac{61x}{80} + \dfrac{5}{8} & \text{für } 2 \le x \le 6 \\ 1 & \text{für } x > 6 \end{cases}$

c)



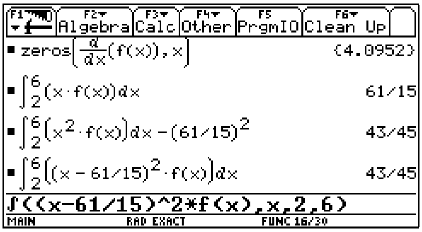


Der Graph der Dichtefunktion im linken Bild ist nicht befriedigend und wenn er so von Schülern abgezeichnet wird, dann ist das sicher nicht in Ordnung. Außerdem gehört aufs Papier eine ordentliche Skalierung dazu. Der *TI* zeigt die Sprungstellen bei $x = 2$, und $x = 6$ so nicht an, weil automatisch eine Verbindung vom jeweils letzten Bildpunkt des vorhergehenden Teiles zum ersten Pixel des folgenden Teiles gezeichnet wird. Da hilft ein Trick:



d) Der „wahrscheinlichste“ Wert ist nur von theoretischer Bedeutung. Er ist das Argument des Maximums der Dichtefunktion. Dieses liegt bei x = 86/21 ≈ 4,095. Dort hat die Verteilungsfunktion ihre größte Zunahme – ihre steilste Stelle – den Wendepunkt.

e) Der Mittel- oder Erwartungswert $E(x)$ ist 61/15 und die Varianz $V(x)$ = 43/45.

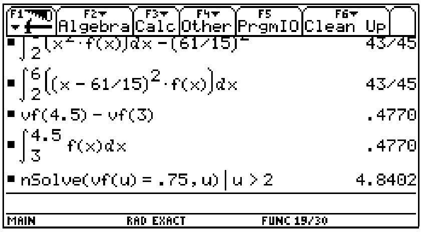


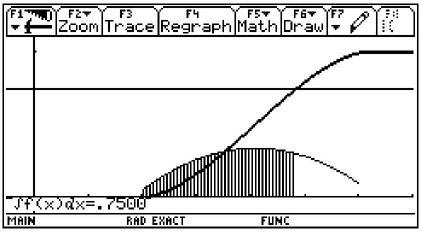
f) Verschiebungssatz:

$$V(x) = E\left(x^2\right) - \left(E(x)\right)^2 = E((x - E(x))^2 = \frac{43}{45}.$$

g) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist 47,7%

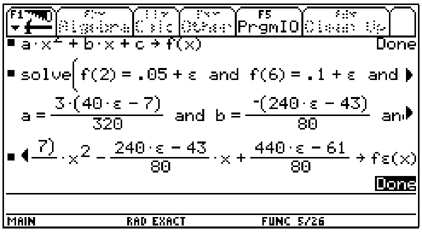
h) $F(u)$ = 0,75.
Die Gleichung kann analytisch oder graphisch gelöst werden. Graphisch lassen sich auch die 75% dargestellen.

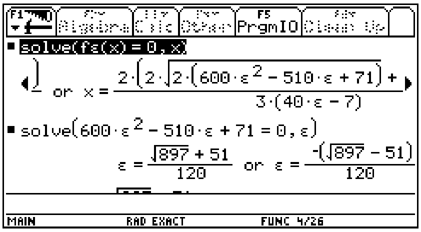


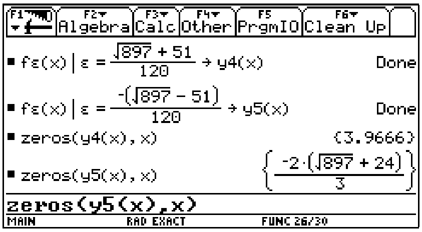


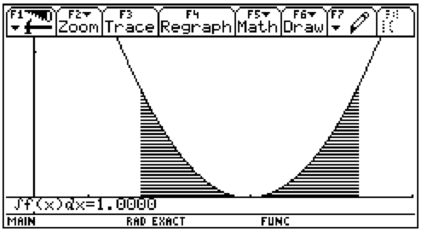
i) Es ließe sich noch eine interessante Frage stellen, die nun mit CAS-Unterstützung schön zu lösen ist: $f(X=2)$ = 0,05+ε und $f(X=6)$ = 0,1+ε. Welches Intervall ist für ε möglich, sodass eine sinnvolle Dichtefunktion definiert ist.

Antwort: -0,05 ≤ ε ≤ (√897+51)/120. Für ε = 7/40 ist die Dichtefunktion linear.









Zentraler Grenzwertsatz, Simulation und ....

An der österreichischen Handelsakademie bildet die Wahrscheinlichkeitsrechnung einen Schwerpunkt im M-Unterricht der Abschlussklasse. Neben den diskreten Verteilungen wird vor allem die Arbeit mit der Normalverteilung behandelt. Der Gebrauch der Tabellen ist bei Verwendung eines mächtigen Werkzeugs überflüssig geworden. Da der der Umgang mit Tabellen im allgemeinen eine wichtige Fertigkeit ist, habe ich das in kleinem Rahmen auch noch immer im Unterricht durchgeführt und auch abgefragt..

Im Rahmen der Matura habe ich aber gerne darauf verzichtet, obgleich meine Schüler „nur“ mit dem gewöhnlichen TI ausgestattet waren und daher für die „Umkehraufgaben“ entweder sehr lange Rechenzeiten in Kauf nehmen mussten oder sich mit numerischen Methoden zu helfen wussten, wie Sie es hier demonstriert bekommen. Die neue Generation der Rechner verfügt mit dem Statistik-Werkzeug und dem Numeric Solver über hervorragende Hilfsmittel, um die Rechnerei komplett in den Hintergrund zu rücken und dafür die Aufgabenstellung wirklich zum Thema zu machen.

Daher können jetzt auch Aufgaben wie die Simulation eines Zufallsprozesses schön in eine Prüfungsarbeit eingebaut werden, wobei auf eine ordentliche Dokumentation der Vorgangsweise Wert zu legen ist. Die Art der Dokumentation wird mit den Schülern vereinbart und geübt. Natürlich muss auch ein Trick, wie etwa hier die Filterung von Ergebnissen in Teilaufgabe c), bekannt sein.

Das Programm einer Firma beinhaltet u.a. die drei Produkte A, B und C. Die durchschnittlichen monatlichen Absatzmengen der Artikel pro Filiale sind 520, 180 und 75,3 Stück mit den zugehörigen Varianzen 80, 150 und 60. Die „Selling Numbers“ folgen etwa einer Normalverteilung. (Annahme, dass sich alle Filialen etwa gleich verhalten.)

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass im nächsten Monat die Verkaufszzahl von A und B in einer Filiale gemeinsam über 720 Stück liegt?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Absatz von A aus drei Filialen zusammen nicht über 1550 Stück liegt?

c) Führe für Frage b) eine Simulation mit insgesamt 120 Probeläufen durch und vergleiche das Ergebnis der Simulation mit dem theoretischen Ergebnis. Dokumentiere die Vorgangsweise ausreichend und nachvollziehbar.

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Filiale in einem Monat mehr als dreimal so viele Artikel von A als von B verkauft werden.

e) Innerhalb welcher Grenzen liegt mit 95%-Sicherheit der Jahresabsatz von C in einer bestimmeten Filiale? Mache eine geeignete Probe.

f) A wird um 1,80€ und B um 2,50€ verkauft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt der Umsatz einer Filiale für diese beiden Artikel zwischen 1300€ und 1400€?

g) Der Stückpreis für C liegt bei 5,20€. Welcher Erlös für C wird in einer Filiale nur in 5% aller Monate überschritten?

h) Eine längere Werbeaktion soll die Verkaufsziffern für C heben. Nach 6 Monaten ergab sich für die insgesamt 11 Filialen eine Erhöhung des Absatzes um durchschnittlich 1,5 Stück/Monat. Der Leiter der Werbeabteilung reklamiert diese Absatzerhöhung als Erfolg seiner Kampagne. Kann ihm bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% zugestimmt werden?

Lösungsvorschlag:

Nach dem zentralen Grenzwertsatz gilt für Linearkombinationen von normalverteilten Zufallsvariablen $X_1, X_2, ..., X_n$ mit den Mittelwerten $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ und den Standardabweichungen $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$.

Die neue Zufallsvariable $U = \pm a_1 X_1 \pm a_2 X_2 \pm ... \pm a_n X_n \pm a_0$. ist auch normalverteilt mit dem Mittelwert $\pm a_1 \mu_1 \pm a_2 \mu_2 \pm ... \pm a_n \mu_n \pm a_0$ und der Varianz $a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + ... + a_n^2 \sigma_n^2$. Die Konstante a_0 hat auf die Varianz keinen Einfluss.

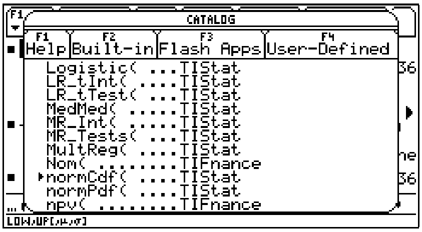
Zufallsvariable A: $\mu_A = 520,\ \sigma_A^2 = 80$
Zufallsvariable B: $\mu_B = 180,\ \sigma_B^2 = 150$
Zufallsvariable C: $\mu_C = 75{,}3,\ \sigma_C^2 = 60$

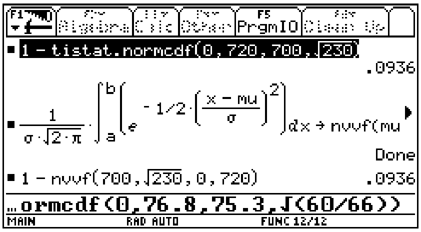
a) $p(A + B > 720) = ?$

neue Zufallsvariable $U = A + B$ mit $\mu_U = 520 + 180 = 700$, $\sigma_U^2 = 80 + 150 = 230$.

$p(U > 720) = 1 – F(720)$.

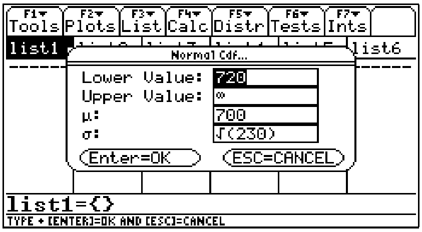
Am *TI*-89/92+/*Voyage*200 kann die Verteilungsfunktion der Normalverteilung über den `CATALOG` und `F3` aufgerufen werden, wenn man die empfehlenswerte und kostenlose Statistik-Flash-Applikation auf dem Rechner hat.

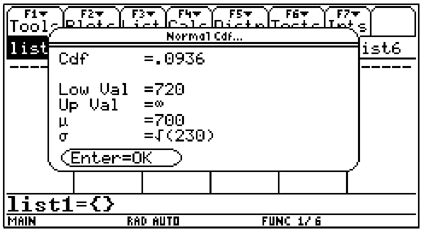




Beim „gewöhnlichen“ *TI*-92 muss man die Verteilungsfunktion vordefinieren und kann dann mit ihr arbeiten. Allerdings treten da deutlich längere Rechenzeiten auf.

Mit der Flash-Applikation kann auch direkt gearbeitet werden. Unter `F5, Distr` findet sich mit `Normal Cdf` auch die Verteilungsfunktion der Normalverteilung.





Wie sieht das aber in *DERIVE* aus?

Aus der *DERIVE*-Hilfe:

`NORMAL(z, m, s) ist die Verteilungsfunktion für die Normalvereilung an der Stelle z mit dem Mittelwert m und der Standardabweichung s. Die Standardwerte für m und s sind 0 und 1. Damit wird NORMAL(z) äquivalent zur Verteilungsfunktion der normierten Normalverteilung.`

Daher

`1 - NORMAL(720, 700, ‹230) = 0.0936245`

Die Wahrscheinlichkeit ist 9,36%.

b) $p(A + A + A \le 1550) = ?$

Es ist zu beachten, dass hier $A + A + A \neq 3A$. Es ist nämlich nicht der dreifache Absatz einer Filiale sondern die Summe aus den Absatzziffern von drei verschiedenen Filialen gemeint. Das wirkt sich auf die Varianz aus.

neue Zufallsvariable $U = A_1 + A_2 + A_3$ mit $\mu_U = 520 + 520 + 520 = 1560$,

$$\sigma_U^2 = 80 + 80 + 80 = 240.$$

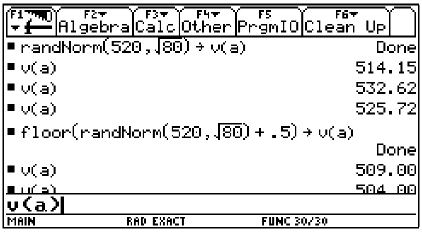
$p(0 \le U \le 1550) = ?$

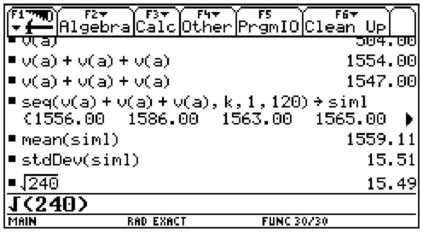
Die Antwort lautet: 25,93%.

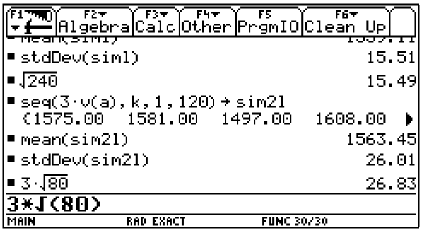
NORMAL(1550, 1560, √240) = 0.259302

NORMAL(1550, 1560, √240) - NORMAL(0, 1560, √240) = 0.259302

c) Zur Simulation benötigt man zuerst die Möglichkeit, überhaupt (μ,σ)-normalverteilte Zufallszahlen zu erzeugen. Alle gängigen CAS können das. Dann sind diese Zufallszahlen sinnvollerweise auf Ganze zu runden, und anschließend eine Folge der Summe von jeweils drei derartigen Zufallszahlen zu erzeugen.



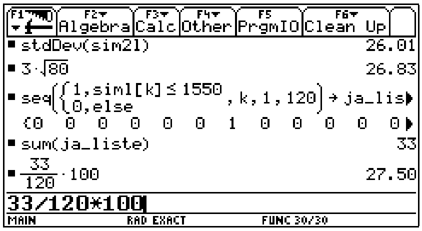




Vergleichen Sie bitte „außer Konkurrenz“ die Ergebnisse für das Dreifache eines Filialumsatzes.
Das Mittel bleibt gleich, aber die Varianz ist das Neunfache!!

Nun soll aber der Anteil jener Filialen herausgefiltert werden, in denen der Absatz höchstens 1550 Stück ausmacht.

Das sind hier 27,50%, gegenüber den theoretischen 25,9% von vorhin.



Sehen Sie im folgenden eine mögliche *DERIVE*-Durchführung.

Die Listen werden mit dem mächtigen `VECTOR`-Befehl erzeugt. Das Filtern der gewünschten Ergebnisse erfolgt über `SELECT` einfacher wie auf dem *TI*. Außerdem lassen sich natürlich leichter längere Testläufe durchführen.

```
fil1 := VECTOR(FLOOR(RANDOM_NORMAL(√80, 520) + 0.5), k, 1, 120)
fil2 := VECTOR(FLOOR(RANDOM_NORMAL(√80, 520) + 0.5), k, 1, 120)
fil3 := VECTOR(FLOOR(RANDOM_NORMAL(√80, 520) + 0.5), k, 1, 120)
alle := fil1 + fil2 + fil3
DIM(SELECT(v ≤ 1550, v, alle)) = 31
```

$$\frac{\text{DIM(SELECT}(v \le 1550,\ v,\ \text{alle}))}{120}\ 100 = 25$$

$$\frac{\text{DIM(SELECT}(v \le 1550,\ v,\ \text{alle}))}{120}\ 100 = 23.3333$$

$$\frac{\text{DIM(SELECT}(v \le 1550,\ v,\ \text{alle}))}{120}\ 100 = 29.1666$$

$$\frac{\text{DIM(SELECT}(v \le 1550,\ v,\ \text{alle}))}{120}\ 100 = 34.1666$$

Als Mittelwerte und Standardabweichungen ergeben sich:

Zuerst für die Summe der 3 Filialwerte

und dann

für den dreifachen Wert einer Filiale.

(Vergleiche Mittelwert und Standardabweichung!)

```
AVERAGE(alle) = 1560.3
STDEV(alle) = 14.5999
AVERAGE(3 fil1) = 1562.8
STDEV(3 fil1) = 28.1626
```

Das Ergebnis für 1200 Simulationen ergibt hier 26,5%.

$$\frac{\text{DIM(SELECT}(v \le 1550,\ v,\ \text{alle}))}{1200}\ 100 = 26.5$$

d) $p(A > 3B) = p(A - 3B > 0) = ?$

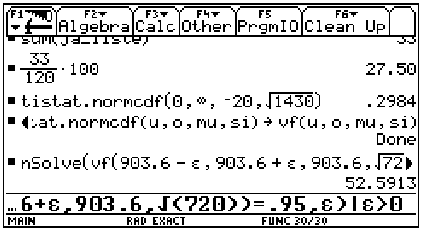
$U = A - 3\,B$ mit $\mu_U = 520 - 540 = -20$, $\sigma_U^2 = 80 + 9 \times 150 = 1430$.

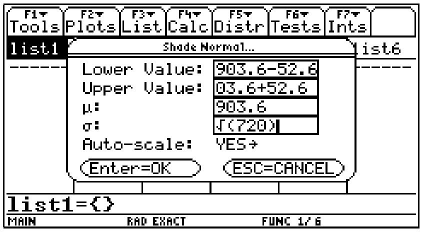
$p(U > 0) = 29{,}84\%$

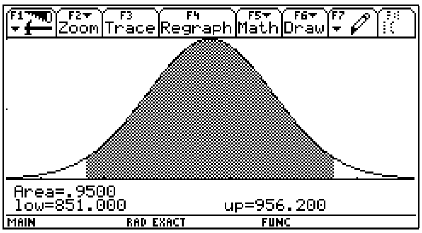
e) $J = C_1 + C_2 + \ldots\ldots + C_{12}$; Mittelwert für $J = 12\ \mu_C = 903{,}6$ und $\sigma_J^2 = 720$.

$p(\mu_C - \varepsilon \le J \le \mu_C - \varepsilon) = 0{,}95$

Welchen Wert hat ε?







Diese Art von Rechnungen kann am gewöhnlichen *TI*-92 recht lange dauern und fallweise überhaupt fehlschlagen. Nullstellensuche einer entsprechenden Funktion oder das Arbeiten mit der Tabelle sind ein guter Ausweg (siehe Aufgabe g)).

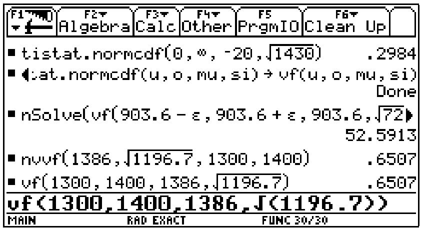
f) $U = 1{,}8\,A + 2{,}5\,B$; $p(1300 \le U \le 1400) = ?$

$\mu_U = 1{,}8 \times 520 + 2{,}5 \times 180 = 1386$

$\sigma_U^2 = 1{,}8^2 \times 80 + 2{,}5^2 \times 150 = 1196{,}7$

Die Wahrscheilichkeit ist 65,07%.

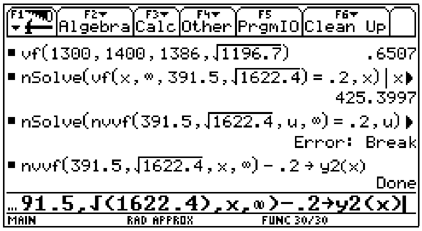
(In der letzten Zeile für den *TI*-92 wurde mit der vordefinierten Funktion `vf()` gearbeitet.)



g) $E = 5{,}20 \times C$; $p(E \ge x) = 0{,}2$

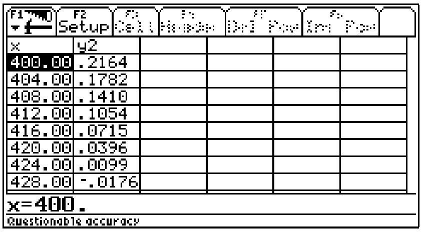
$\mu_E = 5{,}2 \times 75{,}3 = 391{,}5$

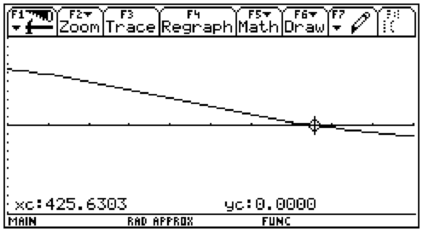
$\sigma_E^2 = 5{,}2^2 \times 60 = 1622{,}7$



Der Erlös von ca. 425,4 wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% übertroffen.

Die beiden Bilder zeigen die Suche nach x über eine Tabelle, bzw. über den Graphen bei der die Funktion `y2(x)` verwendet wird.





Wieder ein Blick zu *DERIVE*:

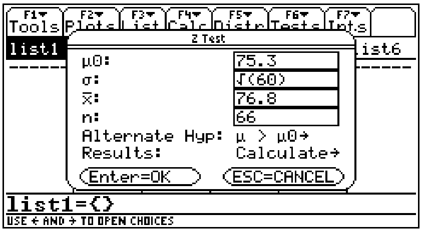
```
1 - NORMAL(x, 391.5, √1622, 4) = 0.2
NSOLVE(1 - NORMAL(x, 391.5, √1622, 4) = 0.2, x, 390, 600)
x = 425.395
```

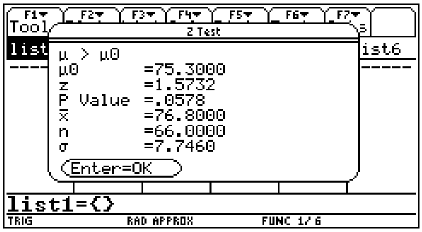
h) Die Nullhypothese H_0 lautet: $\mu_0 \le 75{,}3$

Die Alternativhypothese H_a lautet: $\mu_0 > 75{,}3$

$n = 11 \times 6 = 66$

Die Arbeit mit der Statistik-Applikation für die Flash-Rechner fällt - nach Formulierung der Hypothesen aus dem Problem heraus - sehr leicht.





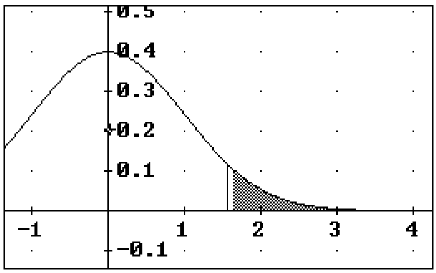
Wegen `P Value` > 5% kann H_0 nicht verworfen werden, dh. dass der Erfolg nicht statistisch gesichert dem Werbemanager zugesprochen werden kann. Mit 5,78% Wahrscheinlichkeit kann der Mittelwert auch zufällig über 76,8 ME liegen.

Der schon auf Seite 51 zitierte *MacDonald Phillips* schrieb eine komplette Behandlungsroutine für alle gängigen Hypothesentests. Diese Datei wird im *DERIVE* Newsletter demnächst veröffentlicht. Sehen Sie zum Abschluss, wie *DERIVE* – kundig programmiert – die Hypothese beurteilt (auch auf Diskette).

ZTest(μ > 75.3, 76.8, √60, 66)

Ho:	μ ≤ 75.3
Ha:	μ > 75.3
xbar:	76.8
σxbar:	0.953462589245592
N:	66
Zxbar:	1.57321327225522
Zα:	1.64485362693085
P(Z):	0.0578347215637987
α:	0.05
P(Type II Error):	0.528555937910734
Conclusion:	Do Not Reject Ho

ZTestPlot(μ > 75.3, 76.8, √60, 66)



Dazu gibt es noch die graphische Darstellung der Dichtefunktion, des kritischen Breeichs und der Position des entsprechenden z-Werts. Hier liegt der z-Wert außerhalb des kritischen Bereichs, daher kann H_0 nicht verworfen werden. (Bei $\alpha = 1\%$ sieht die Sache bereits anders aus!)

Wichtige und hilfreiche Funktionen

End- und Barwert eines Kapitals `kap` nach `zeit_` in Jahren beim Aufzinsungsfaktor `r_` und `zp` Zinsperioden / Jahr.

$$\text{ew}(\text{kap}, \text{zeit\_}, \text{r\_}, \text{zp}) := \text{kap}\cdot \text{r\_}^{\text{zeit\_}\cdot \text{zp}}$$

$$\text{bw}(\text{kap}, \text{zeit\_}, \text{r\_}, \text{zp}) := \frac{\text{kap}}{\text{r\_}^{\text{zeit\_}\cdot \text{zp}}}$$

End- und Barwertformeln für vor- und nachschüssige Renten.
Rentenbetrag `rente`
Anzahl der Zahlungen `anzahl`
Rentenperioden/Jahr `rp`
Zinsperioden/Jahr `zp`
Aufzinsungsfaktor (für die jeweilige Zinsperiode!) `r_`

$$\text{bwrv}(\text{rente}, \text{anzahl}, \text{rp}, \text{r\_}, \text{zp}) := \frac{\text{rente}\cdot(\text{r\_}^{-\text{zp}\cdot\text{anzahl}/\text{rp}} - 1)}{\text{r\_}^{-\text{zp}/\text{rp}} - 1}$$

$$\text{bwrn}(\text{rente}, \text{anzahl}, \text{rp}, \text{r\_}, \text{zp}) := \frac{\text{bwrv}(\text{rente}, \text{anzahl}, \text{rp}, \text{r\_}, \text{zp})}{\text{r\_}^{\text{zp}/\text{rp}}}$$

$$\text{ewrv}(\text{rente}, \text{anzahl}, \text{rp}, \text{r\_}, \text{zp}) := \text{bwrv}(\text{rente}, \text{anzahl}, \text{rp}, \text{r\_}, \text{zp})\cdot \text{r\_}^{\text{anzahl}\cdot\text{zp}/\text{rp}}$$

$$\text{ewrn}(\text{rente}, \text{anzahl}, \text{rp}, \text{r\_}, \text{zp}) := \text{bwrn}(\text{rente}, \text{anzahl}, \text{rp}, \text{r\_}, \text{zp})\cdot \text{r\_}^{\text{anzahl}\cdot\text{zp}/\text{rp}}$$

Kapitalwertformel
Zahlungsliste zl_ (als Vektor [ ] in *DERIVE*, bzw. als Liste beim TI { })
Fälligkeitsliste fl_ (als Vektor [ ] in *DERIVE*, bzw. als Liste beim TI { })
Aufzinsungsfaktor r_

$$\text{kapw}(\text{zl\_}, \text{fl\_}, \text{r\_}) := \sum_{i=1}^{\text{DIM}(\text{zl\_})} \frac{\text{zl\_}_i}{\text{r\_}^{\text{fl\_}_i}}$$

Für die trigonometrischen Funktionen benutzen Sie bitte die entsprechenden Dateien auf der Diskette.

```
SSS(s1,s2,s3) → [w1,w2,w3]
SWS(s1,w3,s2) → [w1,s3,w2]
WSW(w1,s3,w2] → [s1,w3,s2]
SSW(s1,s2,w1) → [w2,w3,s3]
```