Grundvorstellungen zu mathematischen Begriffen

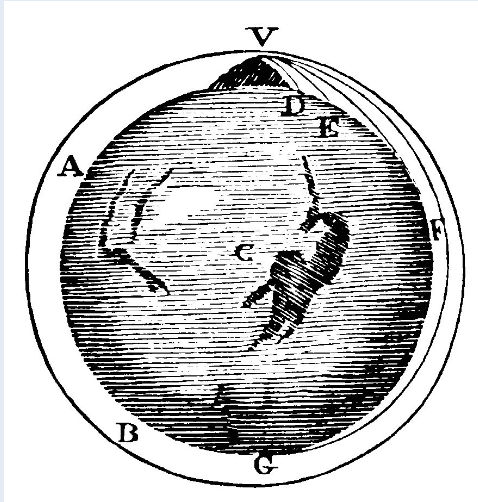
Bundesseminar Mathematik
26.2.2014

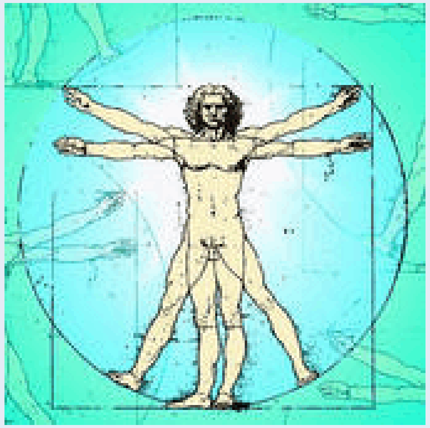
Josef Lechner (lejos@aon.at) BG/BRG Amstetten

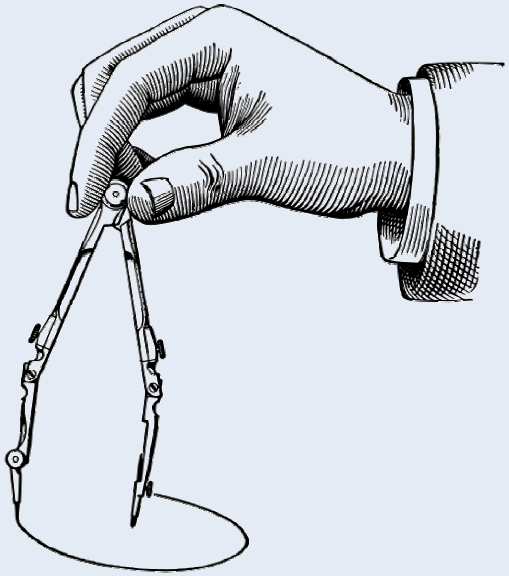
Ein einleitendes Beispiel

Begriffsbildung

Beispiel: Welche Vorstellungen verbinden Sie mit dem Wort Kreis ?



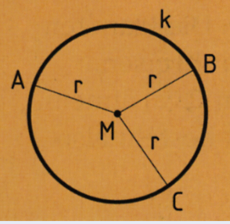




Beispiel: Woran sollen Schülerinnen und Schüler beim Kreis denken?

1.Klasse:

Kreis



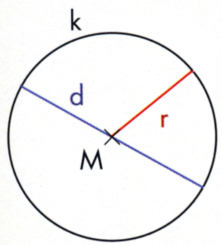
Alle **Punkte eines Kreises k** haben **vom Mittelpunkt denselben Abstand**, nämlich den **Radius r.** Es gilt zB: $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = r$

Es gilt auch umgekehrt:
Alle Punkte, die **vom Punkt M denselben Abstand r** haben, liegen **auf dem Kreis k.**

4.Klasse:

Alle **Punkte** eines **Kreises** haben vom **Mittelpunkt denselben Abstand** (Radius r).

Durchmesser und **Umfang** eines Kreises stehen in Beziehung zueinander.



Umfang = Durchmesser mal pi
$u = d \cdot \pi$ oder
$u = 2r \cdot \pi$

Flächeninhalt = Radius zum Quadrat mal pi
$A = r^2 \cdot \pi$

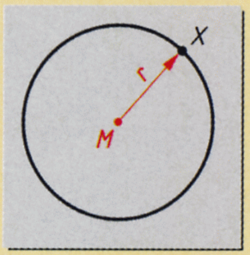
π ist die **Kreiszahl**. Sie hat unendlich viele Dezimalstellen und ist nicht periodisch.
Ihr **gerundeter Wert** beträgt 3,14.

7.Klasse:

Definition: Die Menge aller Punkte X (der Ebene), die von einem gegebenen Punkt M den Abstand r haben, ist die Kreis*linie* k mit Mittelpunkt M und Radius r:

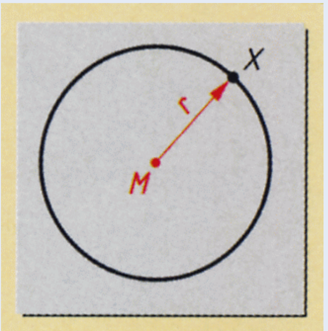
$$k[M;r] = \{X \mid \overline{XM} = r\}$$

Die *abgeschlossene* Kreis*scheibe* ist die Punktmenge
$\{X \mid \overline{XM} \leqslant r\}$ („Inneres“ plus „Rand“).
Die *offene* Kreis*scheibe* ist die Punktmenge
$\{X \mid \overline{XM} < r\}$ („Inneres“ ohne „Rand“).



Das ist Mathematik 1 / MathematiX4 / Mathematik-Lehrbuch 7

Beispiel: Der „vektorielle‟ Kreis



$$k \;\ldots\; |\, X - M \,| = r$$

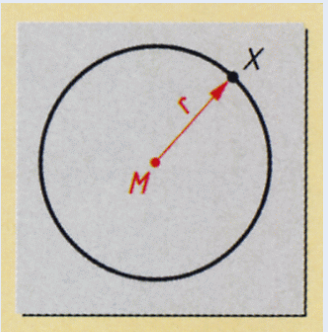
$$k \;\ldots\; \left| \begin{pmatrix} x - m_x \\ y - m_y \end{pmatrix} \right| = r$$

$$k \;\ldots\; (x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 = r^2$$

$$k \;\ldots\; x^2 - 2x m_x + m_x{}^2 + y^2 - 2y m_y + m_x{}^2 = r^2$$

$$k \;\ldots\; x^2 + y^2 + a\,x + b\,y + c = 0$$

Beispiel: Der „vektorielle" Kreis



$$k \ldots |X - M| = r \qquad k \ldots \left| \begin{pmatrix} x - m_x \\ y - m_y \end{pmatrix} \right| = r$$

$$k \ \ldots \ (x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 = r^2$$

$$k \ \ldots \ x^2 + y^2 + a\,x + b\,y + c = 0$$

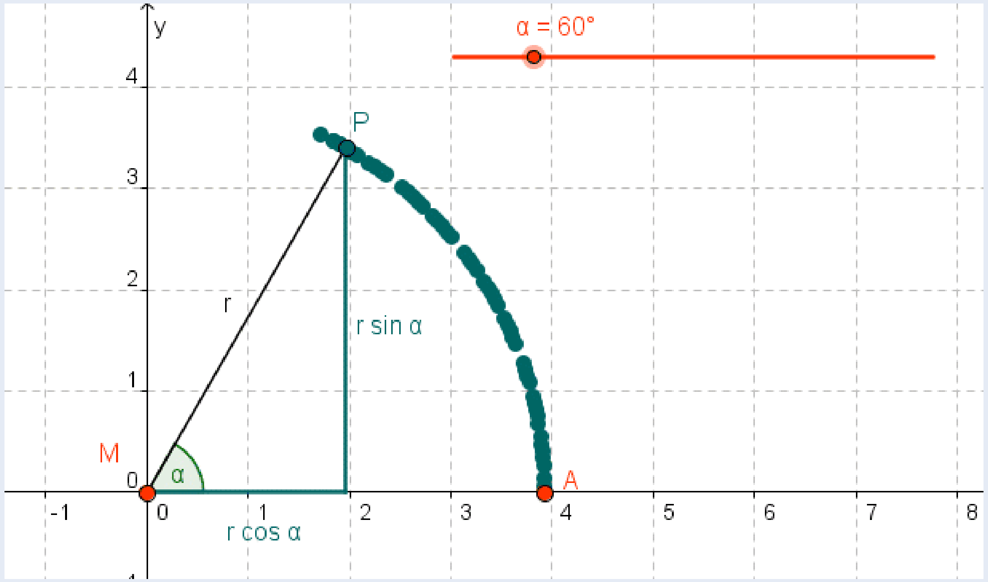
Kenntnisse/Wissen:

- Kreisgleichung in Vektorform kennen.
- Kreisgleichung in Koordinatenform kennen.
- Allgemeine Kreisgleichung kennen.

Fertigkeiten/Fähigkeiten:

- Kreisgleichung aus Punkt und Radius aufstellen können.
- Aus allgemeiner Kreisgleichung Mittelpunkt und Radius ermitteln können.

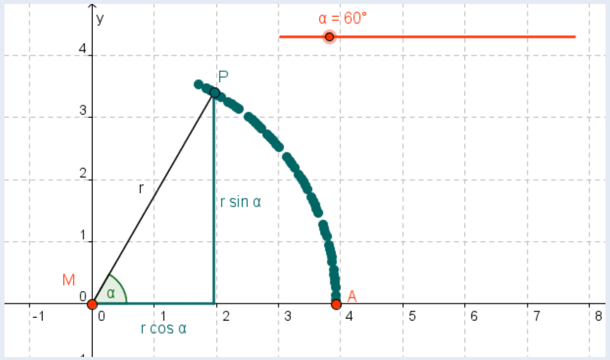
Beispiel: Der „dynamische“ Kreis



$$k \ldots X(t) = \begin{cases} r \cdot \cos(t) \\ r \cdot \sin(t) \end{cases} \quad mit \quad t \in [0;2\pi[$$

http://thema-mathematik.at/tmwiki/doku.php?id=tmwiki:parameterdarstellung_des_kreises

Beispiel: Der „dynamische" Kreis



$$k \ldots X(t) = \begin{cases} r \cdot \cos(t) \\ r \cdot \sin(t) \end{cases} \quad mit \;\; t \in [0;2\pi[$$

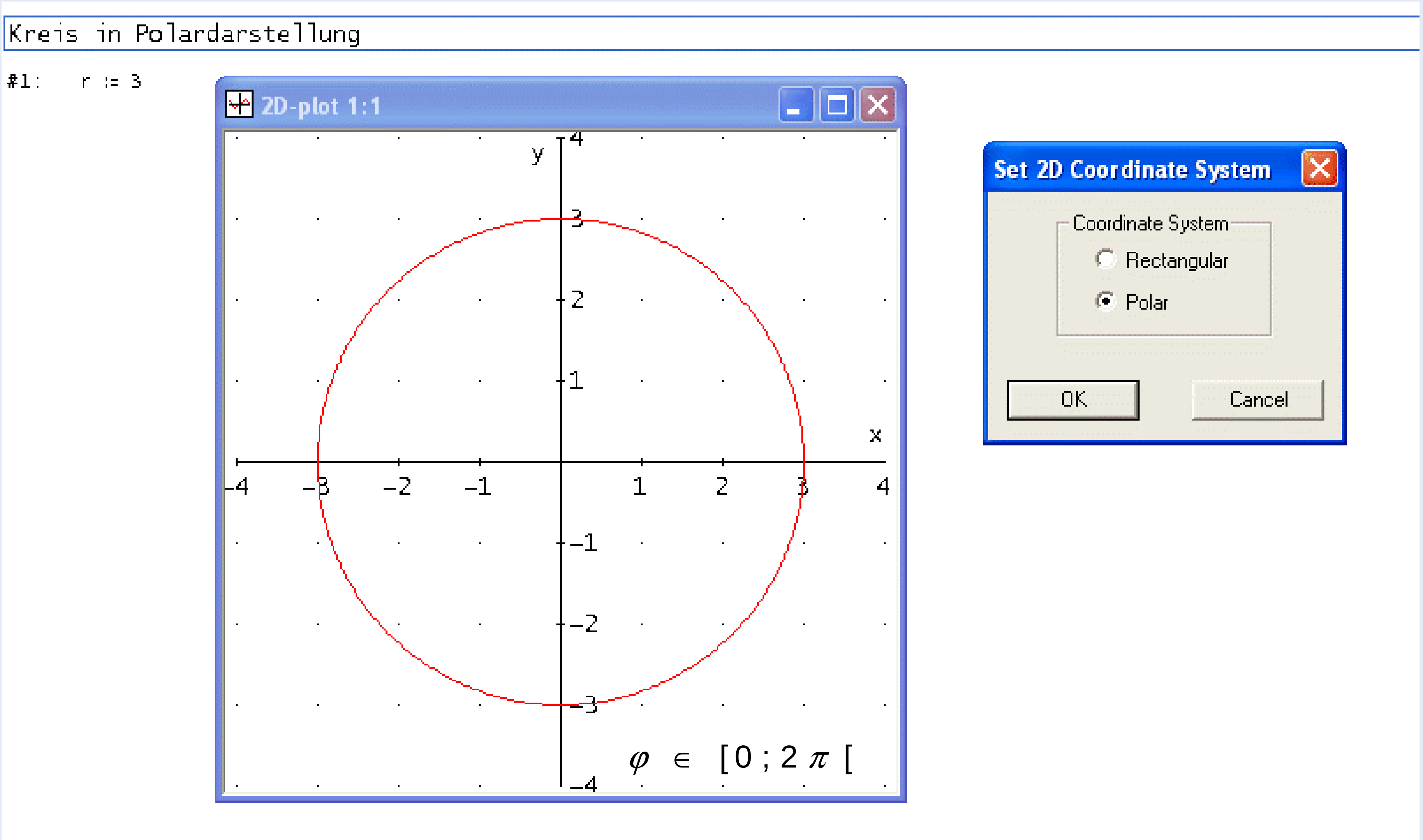
Kenntnisse/Wissen:

- Kreisgleichung in Parameterform kennen.
- Bedeutung des Parameters erklären können (z.B. als Zeit).
- Zusammenhang zwischen Parameterintervall und Bogenlänge angeben können.

Fertigkeiten/Fähigkeiten:

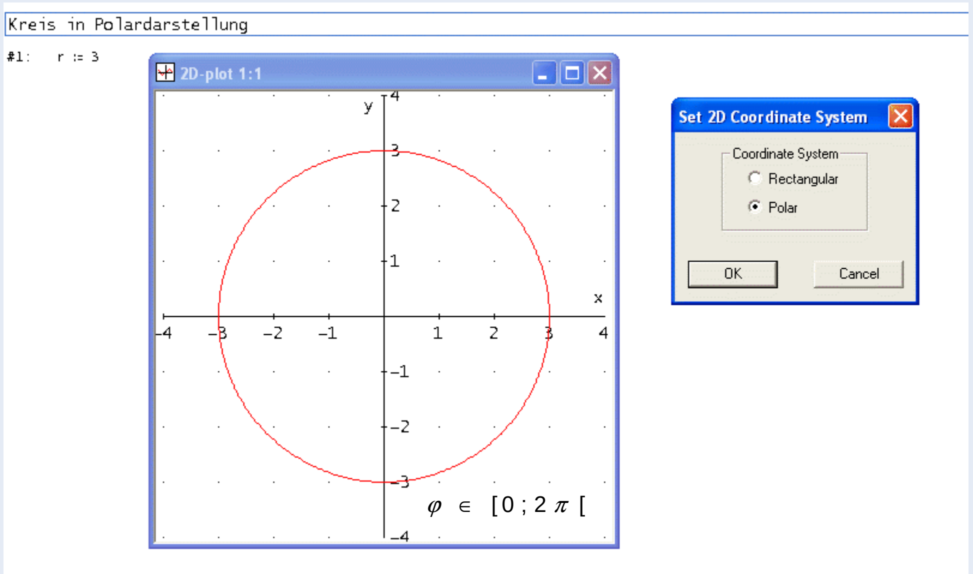
- Kreisgleichung in Paramterform anschreiben können.
- Aus Parameterform Koordinatengleichungen angeben können.

Beispiel: Der „polare“ Kreis



Kreis in Polardarstellung mit dem CAS Derive geplottet.

Beispiel: Der „polare" Kreis



Kenntnisse/Wissen:

- Bedeutung des Koordinatensystem für die Darstellung erkennen.
- Polardarstellung eines Kreises kennen.

Fertigkeiten/Fähigkeiten:

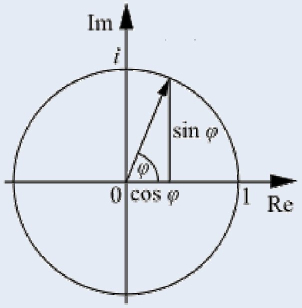
- Zwischen Polarkoordinaten und kartesischen Koordinaten umrechnen können.
- Kurve über Radius und Winkel angeben können.
- Koordinatensystem in Graphikwerkzeugen einstellen können.

Beispiel: Der „komplexe“ Kreis

$$\cos(x) = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\sin(x) = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

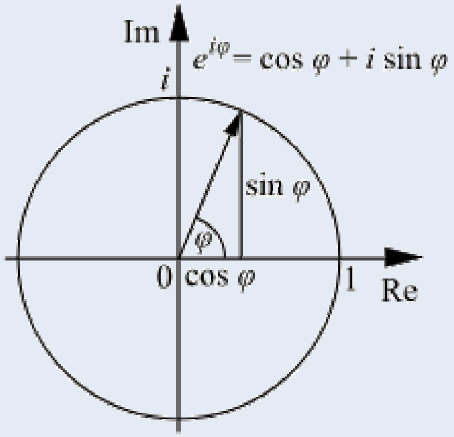
$$e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$



$$\begin{aligned} e^{i \cdot x} &= \frac{(i \cdot x)^0}{0!} + \frac{(i \cdot x)^1}{1!} + \frac{(i \cdot x)^2}{2!} + \frac{(i \cdot x)^3}{3!} + \frac{(i \cdot x)^4}{4!} + \frac{(i \cdot x)^5}{5!} + \dots \\ &= \frac{x^0}{0!} + i \cdot \frac{x^1}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i \cdot \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i \cdot \frac{x^5}{5!} - \dots \\ &= \left(\frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) + i \cdot \left(\frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right) = \cos(x) + i \cdot \sin(x) \end{aligned}$$

Euler'sche Formel: $e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$

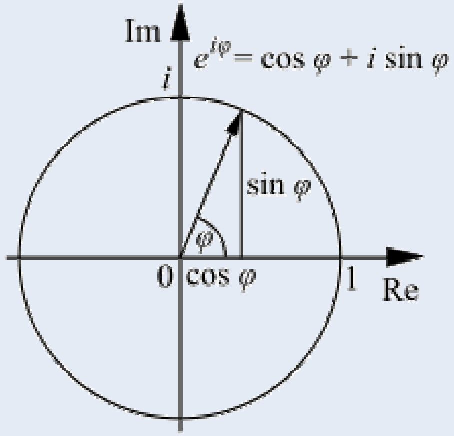
$$e^{i \cdot \pi} = \cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi) = -1 + i \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad e^{i\pi} + 1 = 0$$



$$z(\varphi) = r \cdot e^{i\varphi} \quad (r \text{ const.}, \varphi \in [0; 2\pi[\,)$$

Beispiel: Der „komplexe" Kreis

$$z(\varphi) = r \cdot e^{i\varphi} \quad (r \ const., \ \varphi \in [0;2\pi[\,)$$



Kenntnisse/Wissen:

- Polarform komplexer Zahlen kennen.
- Wissen, wie sich Punkte oder Kurven in der komplexen Ebene darstellen lassen.

Fertigkeiten/Fähigkeiten:

- Aus der Polardarstellung von Kurven die komplexe Darstellung herleiten können.
- Die Bedeutung der Parameter r und φ erklären können.
- Die Multiplikation und Division komplexer Zahlen mittels Drehstreckungen und Drehstauchungen geometrisch interpretieren können.

Einige Kernpunkte des Grundvorstellungskonzepts
nach R.v.Hofe (1995)

- Ein mathematischer Begriff lässt sich nicht mit *einer* GV, sondern eher mit *mehreren* GVs erfassen ⇨ gegenseitige Vernetzung führt zu Grundverständnis.
- Im Laufe der Schulzeit werden primäre GVs (konkrete Handlungsvorstellungen) durch sekundäre GVs ergänzt. Diese sind Vorstellungen, die durch math. Darstellungsmitteln (wie Diagramme, Graphen, Symbole) repräsentiert werden.
- GVs sind i.A. nicht stabile, für allemal gültige „kognitive Werkzeuge", sondern eher ein System mentaler mathematischer Modelle, das sich durch Erweiterung alter und Gewinn neuer Verstellungen laufend weiterentwickelt.

Die besondere Rolle der Begriffsbildung in der Mathematik

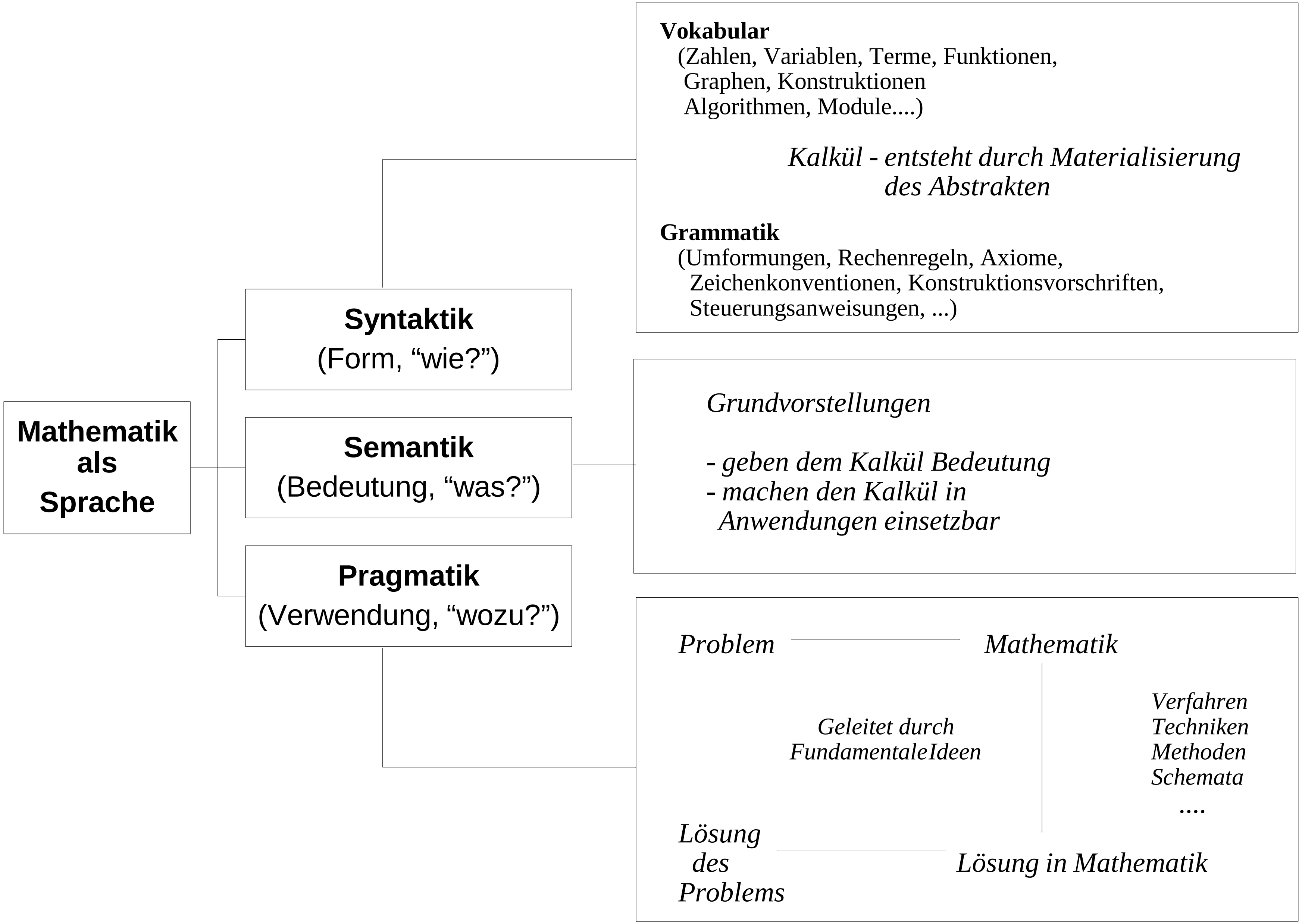
Frey: *Wir werfen über die Erfahrungswelt ein Netz der Begriffe und suchen sie darin zu fangen*. (1967)

Dijkstra: *The introduction of suitable abstractions is our only mental aid to organize and master complexity*. (1982)

Reichel: *Die Begriffsbildung hat für die Mathematik - im Unterschied zu anderen Wissenschaften - eine besondere Bedeutung..... Während in anderen Bereichen Begriffe zur möglichst korrekten Beschreibung der dort zentralen Ideen dienen, entstehen die Gegenstände der Mathematik erst durch die Begriffsbildung.* (1989)

Fischer: *Durch die Materialisierung des Begriffs in Form eines Symbols oder in Form einer speziellen Struktur wird es möglich mit Abstraktem zu operieren, es umzugestalten und aktiv zur Problemlösung einzusetzen.* (1996)

Wer sich ein Thema aussucht, wie »Begriffsbildung und Wissenserwerb«, muss irgendwie verrückt sein. Das Thema ist ähnlich schwierig wie das Thema »Was ist Liebe?« “ (Edelmann ,1996)


Mathematik als Sprache
Syntaktik
(Form, “wie?”)
Semantik
(Bedeutung, “was?”)
Pragmatik
(Verwendung, “wozu?”)
Vokabular
(Zahlen, Variablen, Terme, Funktionen,
Graphen, Konstruktionen
Algorithmen, Module....)
Kalkül - entsteht durch Materialisierung des Abstrakten
Grammatik
(Umformungen, Rechenregeln, Axiome,
Zeichenkonventionen, Konstruktionsvorschriften,
Steuerungsanweisungen, ...)
Grundvorstellungen
- geben dem Kalkül Bedeutung
- machen den Kalkül in Anwendungen einsetzbar
Problem
Mathematik
Geleitet durch FundamentaleIdeen
Verfahren
Techniken
Methoden
Schemata
....
Lösung des Problems
Lösung in Mathematik

Was sind Grundvorstellungen ?

Grundvorstellungen

(1) Grundvorstellungen ...
sind stets an bestimmte Darstellungen gebunden

- kontextbezogene/verbale Darstellungen
- graphisch/geometrische Darstellungen
- formal/symbolische Darstellungen

Beispiel: Fallgeschwindigkeit

Der zurückgelegte Weg beim freien Fall lässt sich beschreiben durch

$$s(t) = \frac{g}{2} t^2$$

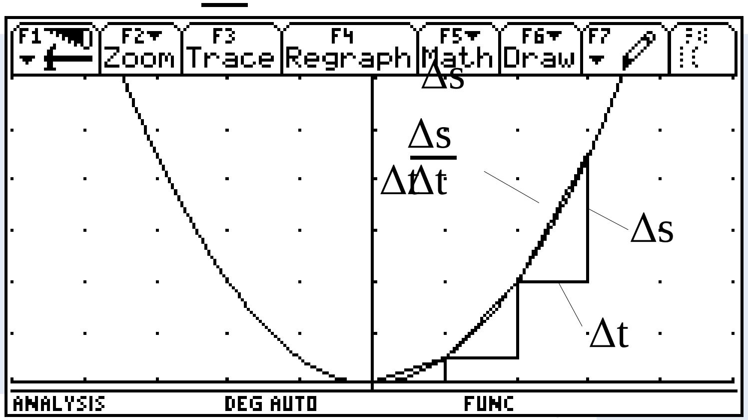
Wenn wir $g \approx 10$ m/s² setzen, bekommen wir also $s(t) = 5\, t^2$.

(1) Ermittle die mittlere Geschwindigkeit während der 1., der 2. , der 3., ... der *n*. Sekunde des Fallens.

(2) Gib eine graphische Veranschaulichung der ersten drei Geschwindigkeitswerte an.

(3) Versuche die momentane Geschwindigkeit nach einer Sekunde Fallzeit anzugeben.

Beispiel: Fallgeschwindigkeit



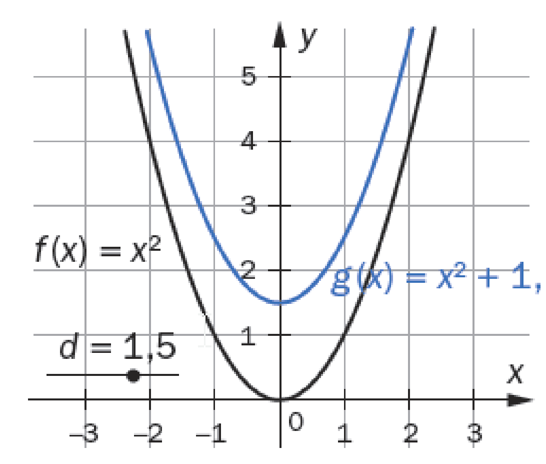
Inhaltliche Beschreibung	*Formale Beschreibung*	*Geometrische Beschreibung*
Wegzunahme (Wegintervall)	$\underbrace{s(t_1) - s(t)}_{\Delta s}$	Länge der Kathete parallel zur Ordinate im Sekanten-Steigungsdreieck
vergangene Zeit (Zeitintervall)	$\underbrace{t_1 - t}_{\Delta t}$	Länge der Kathete parallel zur Abszisse im Sekanten-Steigungsdreieck
mittlere Geschwindigkeit im betrachteten Intervall	$\underbrace{\frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t}}_{\frac{\Delta s}{\Delta t}}$	Steigung der Hypotenuse im Sekanten-Steigungsdreieck

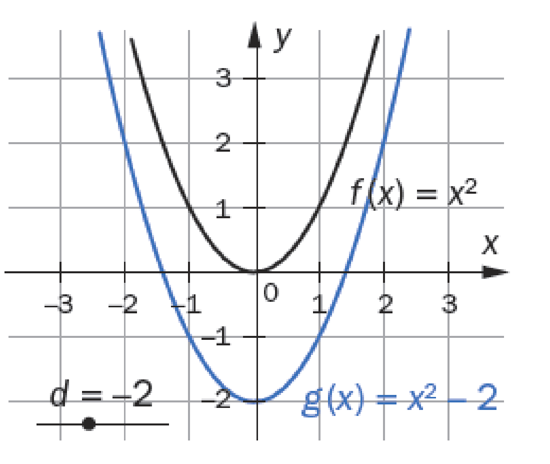
(2) Grundvorstellungen ...

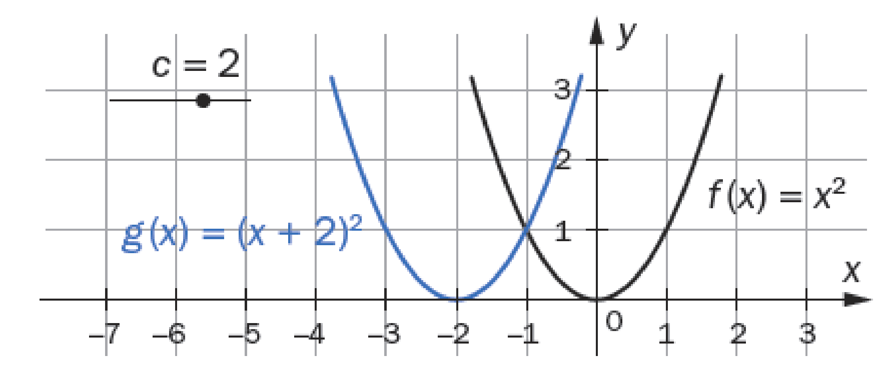
sind prototypische Exemplare einer Klasse ähnlicher Objekte

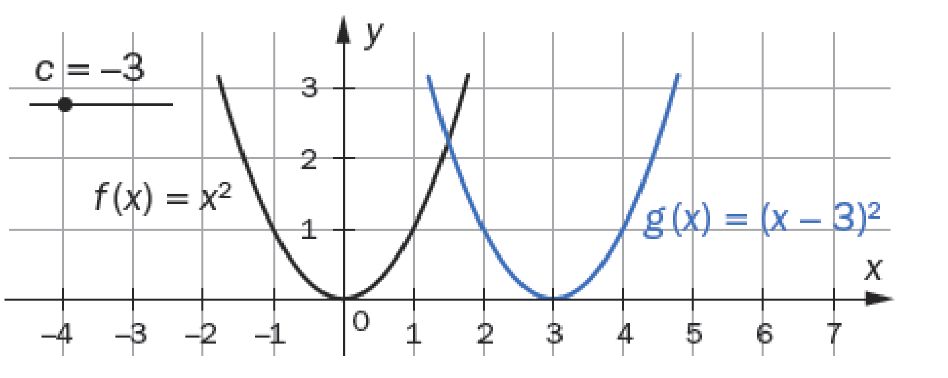
- beinhalten wesentliche Eigenschaften einer Funktionsklasse
- ermöglichen Transformationen
- ermöglichen Umformungen

Beispiel: Parametervariation



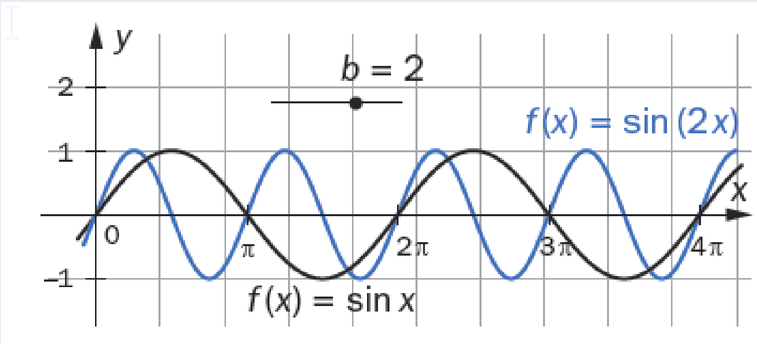


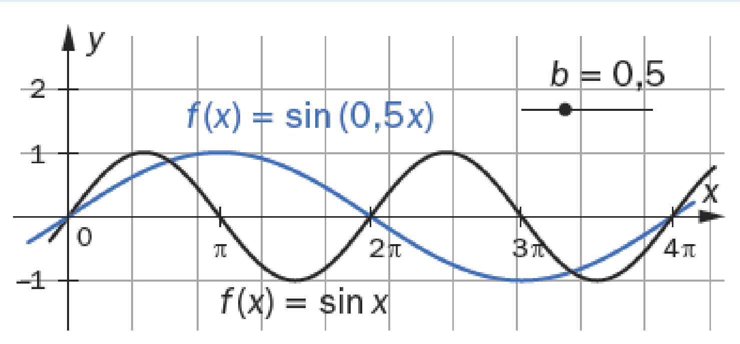


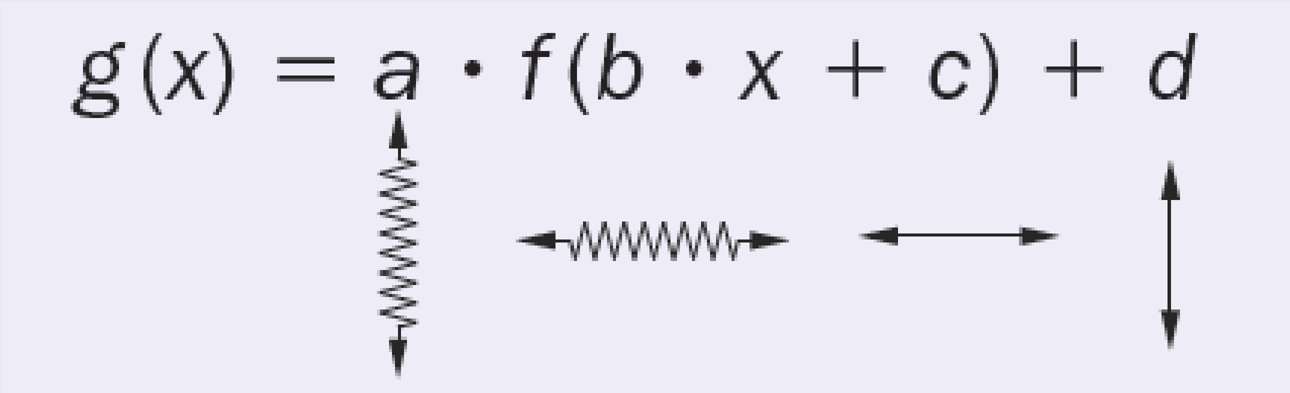


http://thema-mathematik.at/tmwiki/doku.php?id=tmwiki:parametervariation

Beispiel: Parametervariation







Quelle: Thema Mathematik 6, S.155

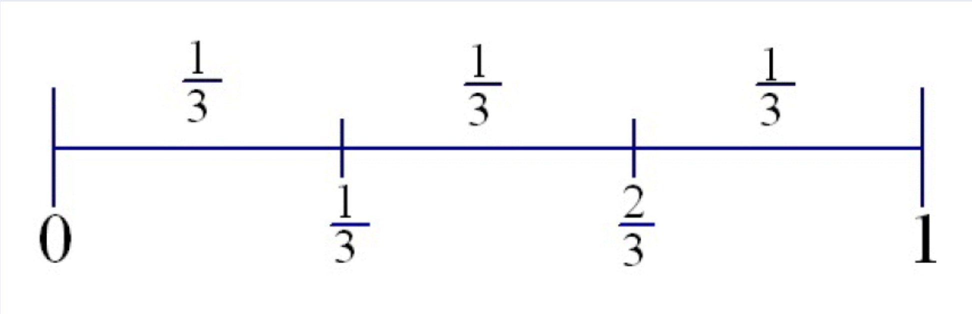
(3) Grundvorstellungen ...

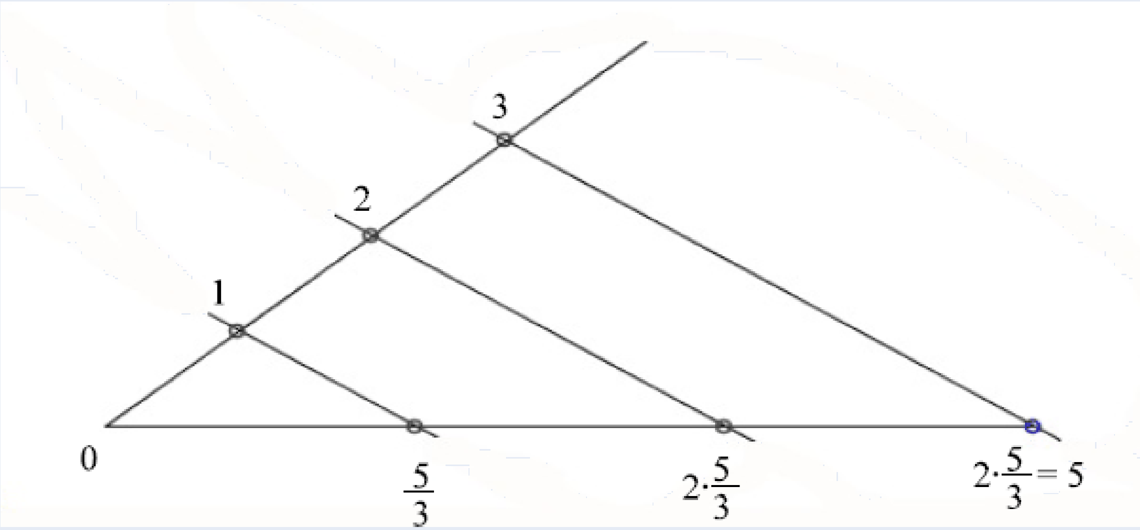
sind wichtige, weil allgemeinbildende Vorstellungen, die mit einem mathematischen Inhalt verbunden werden sollen.

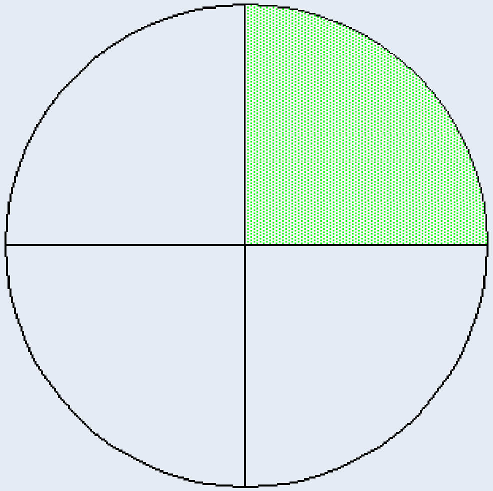
- Bilden die Basis für inhaltliches Denken
- Ermöglichen Operationalisierungen

Beispiel: Was heißt "dividieren"?

GV1: Teilungsvorgang

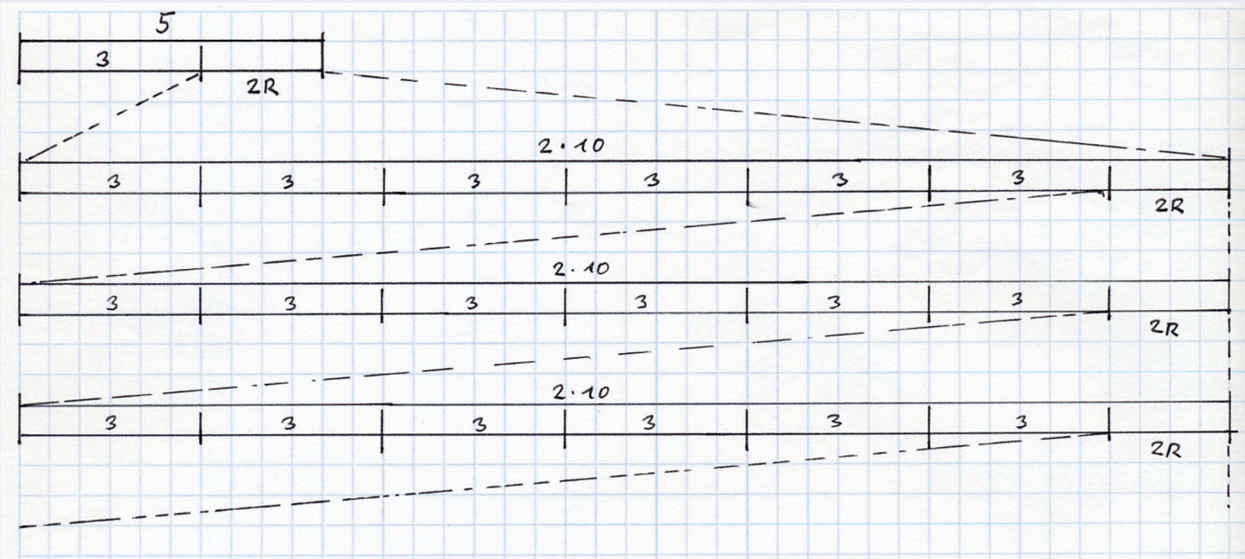


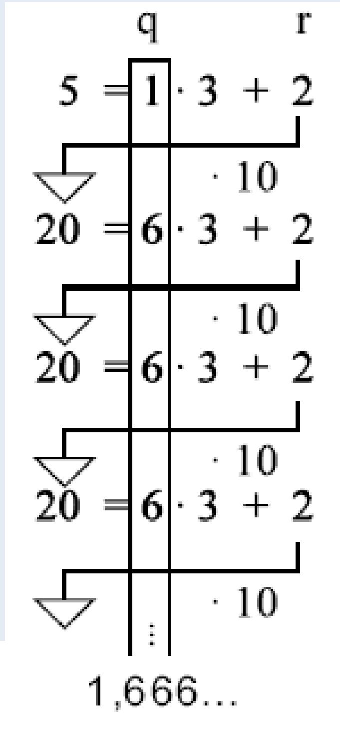




Beispiel: Was heißt „dividieren“ ?

GV2: Messvorgang





5 : 3 = 1, 6 6 6 ....

20

20

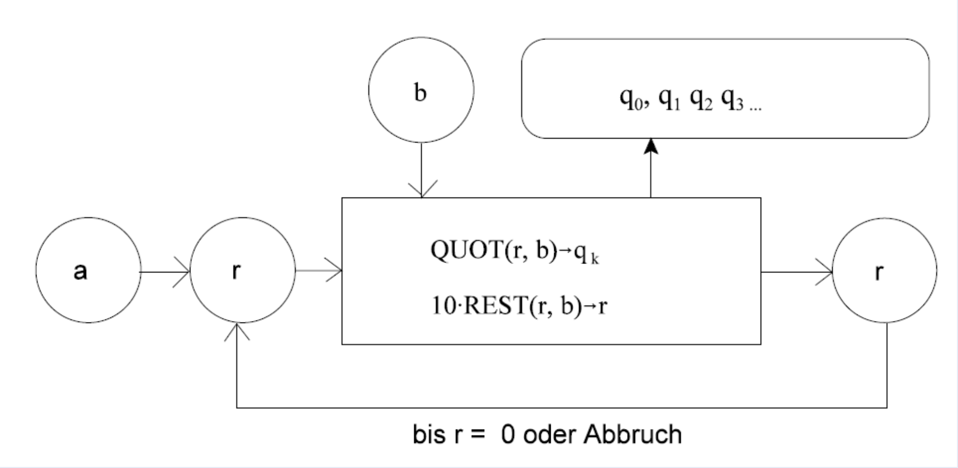
20

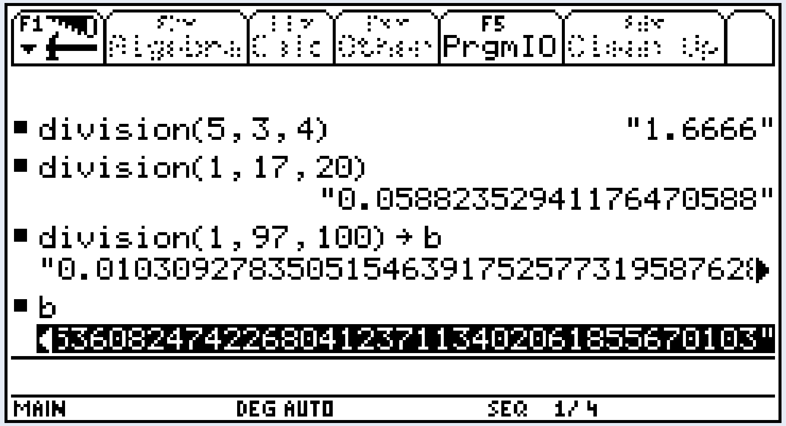
.....

Beispiel: Was heißt rational?

GV2: Messvorgang

Der Messvorgang als Algorithmus

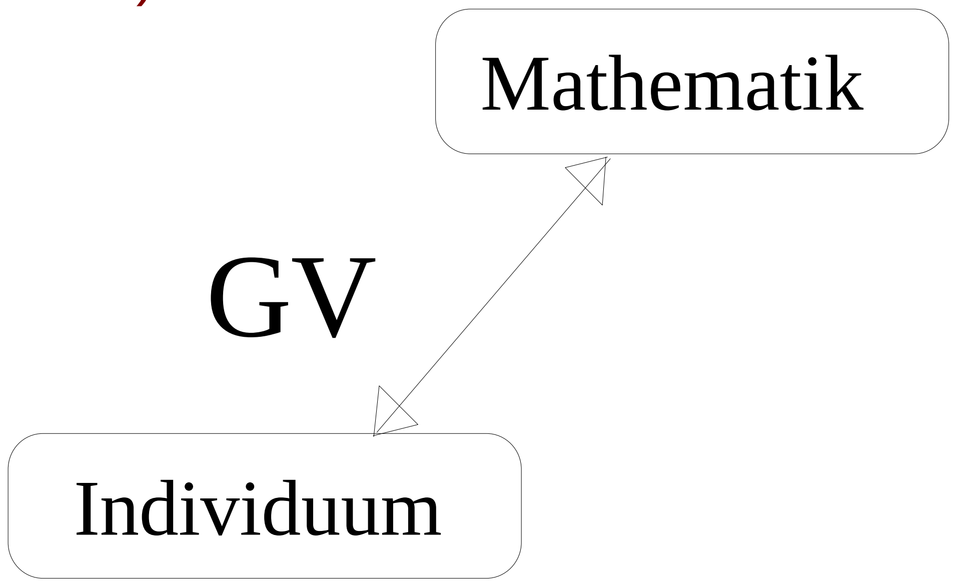




DIVISION (a,b)
a → r
LOOP (bis r=0 oder Abbruch)
QUOT(r,b) → qk
10·REST(r,b) → r

(4) Grundvorstellungen ...

beschreiben Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und den Phänomenen der individuellen Begriffsbildung (v.HOFE)



Beispiel: Schülerfehler

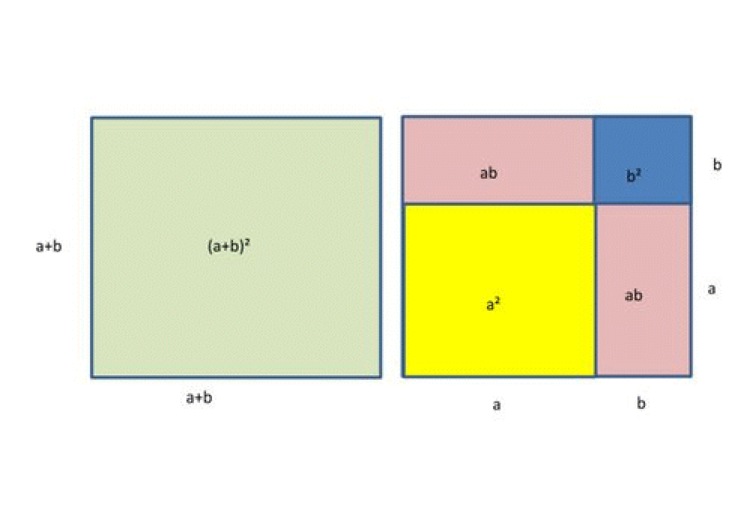
$$(4x+3y)^2 = 16x^2 + 9y^2$$ freshman's dream

$$(4x+3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 3y^2$$

GV1: $$(A+B)^2 = A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$$

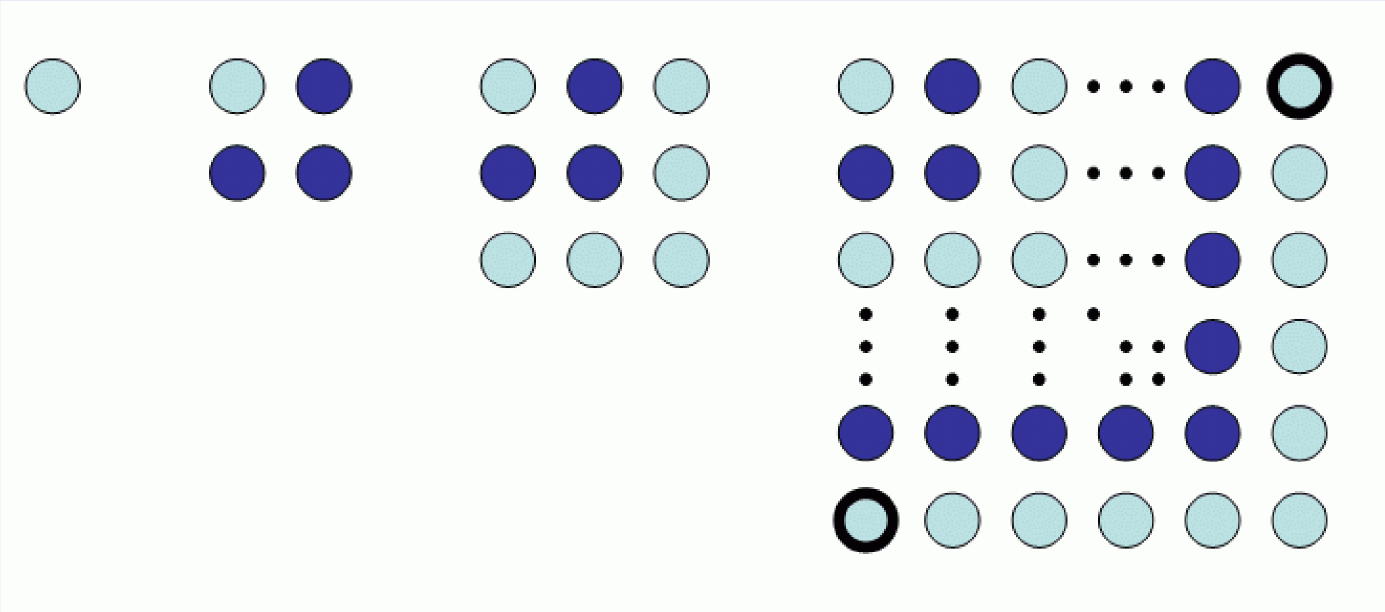
$$(\boxed{4x} + \boxed{3y})^2$$

GV2:



Beispiel: Unmittelbare Einsichten

$$1 + 3 + 5 + \ldots (2n - 1) = n^2$$



Beispiel: Prozentrechnung

GV: p% von G sind A

1 In unserer Schule erreichten 56% von 750 Schülerinnen und Schülern mehr als 60 Punkte beim Känguru-Wettbewerb. Wie viele Schülerinnen und Schüler waren das?

Lösung: x% von y sind z
56% von 750 = z
$56 / 100 \cdot 750 = z$
$z = 420$

2 Von 600 getesteten Maturanten waren 288 beim Testlauf für die neue Zentralmatura erfolgreich. Wie viel Prozent sind dies?
Lösung: x% von y sind z
x% von 600 sind 288
$x/100 \cdot 600 = 288$
$x = 48$ (%)

3 Beim letzten Schikurs waren 18 Schülerinnen und Schüler, das sind 15%, als Anfänger dabei. Wie viele Schülerinnen und Schüler waren auf Schikurs mit?

Lösung: x% von y sind z
15% von y sind 18
$15/100 \cdot y = 18$
$y = 120$

Beispiel: Grundvorstellungen zum exponetiellen Wachstum

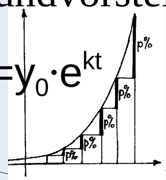
Mathematik
Begriff der exponentiellen Zunahme
$y_{n+1}=y_n+y_n\cdot(p/100)$

verstehen

inhaltlich bestimmen

aufbauen

Grundvorstellung
$y(t)=y_0\cdot e^{kt}$



Sachzusammenhang
Reiskörner am Schachbrett
Wachstum von Bakterien
Keime in der Kuhmilch
Zinseszinsen

deuten in, didaktisch umsetzen

erfassen

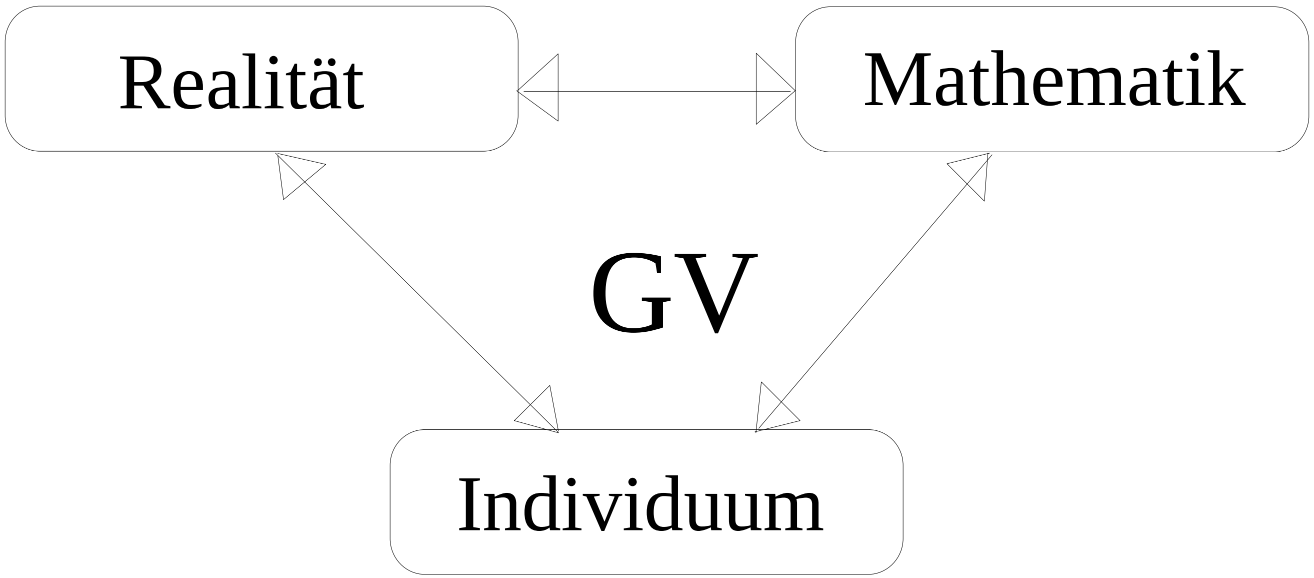
aktivieren

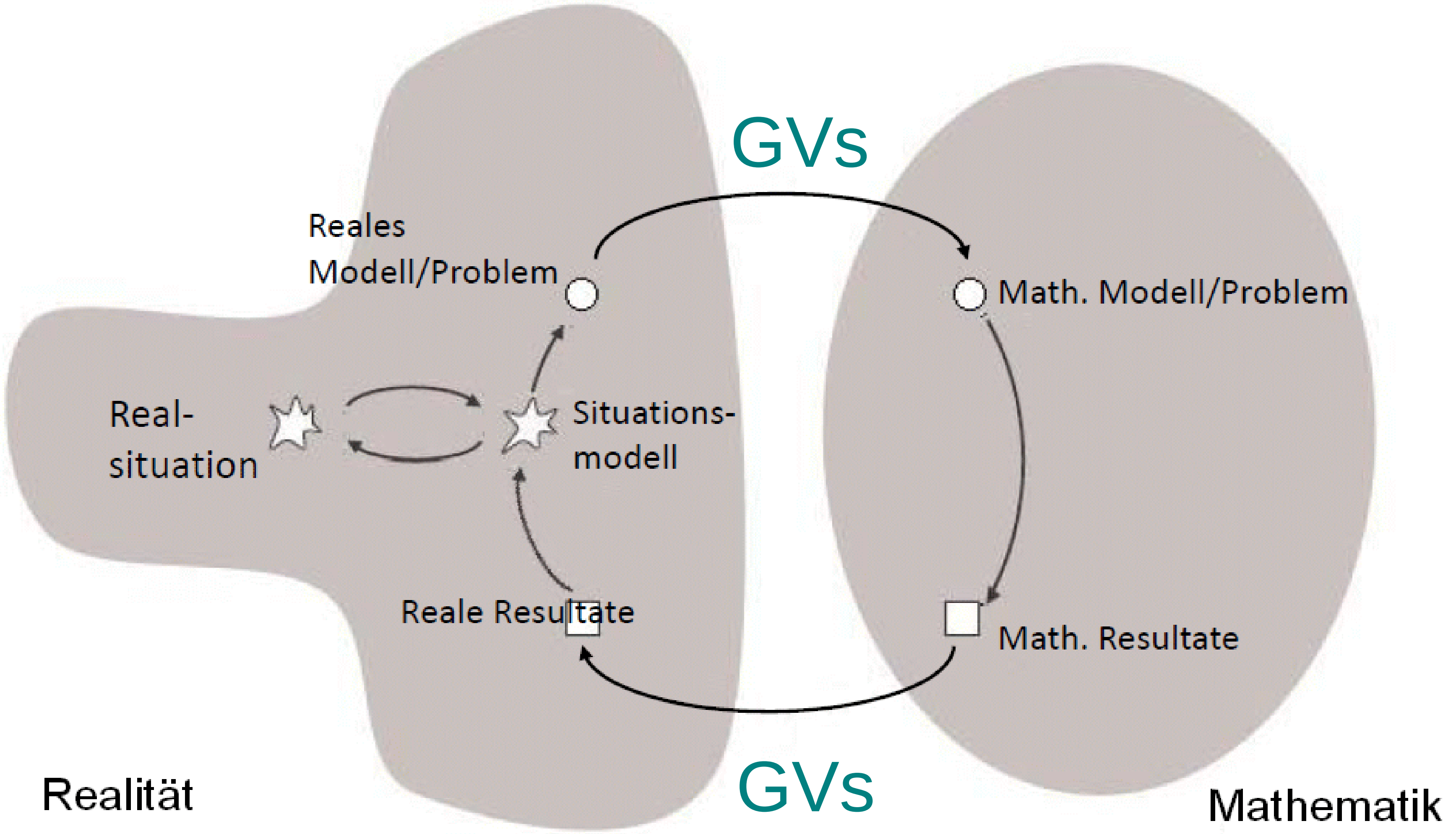
Mensch, Individuum
subj. Erfahrungsbereiche
mentale Strukturen
Handlungsvorstellungen
internal images

(5) Grundvorstellungen ...

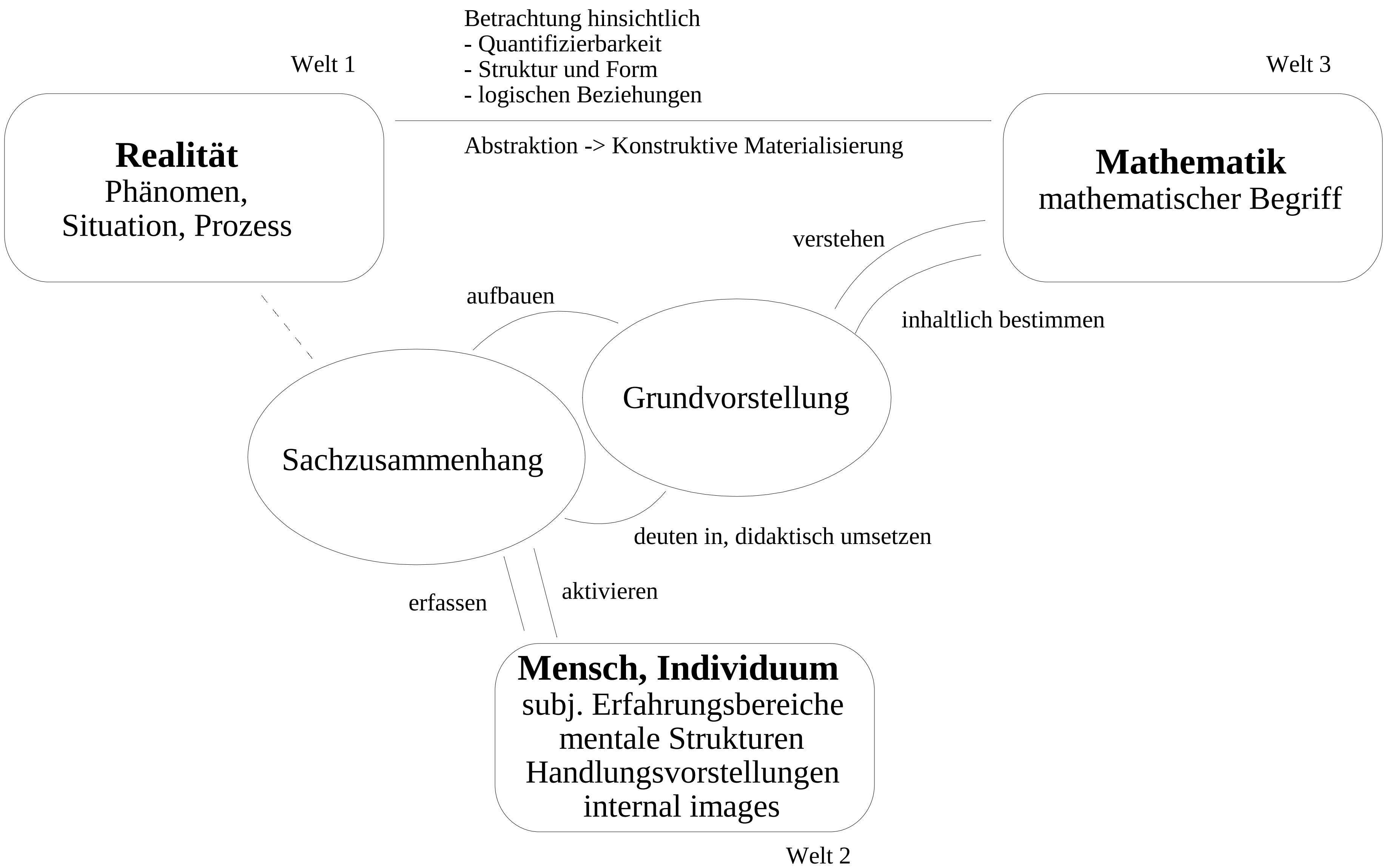
spielen eine ganz wesentliche Rolle beim Übersetzen zwischen Realität und Mathematik.

- „Wenn man Verstehen als Prozess des Erfassens von Bedeutung ansieht (...), sind Grundvorstellungen sogar unabdingbar für wirkliches Verstehen. Dem Aufbau adäquater Grundvorstellungen kommt daher in einem verstehensorientierten und realitätsbezogenen Mathematikunterricht eine überragende Bedeutung zu“ (BLUM u. WIEGAND 1998, S. 30). Sie gestatten ein Hin- und Hergleiten zwischen Mathematik und Realität.
- „Grundvorstellungen machen Mathematik anwendbar“. (MALLE 1999, S. 67).


Realität
Mathematik
GV
Individuum


GVs
Reales
Modell/Problem
Math. Modell/Problem
Real-
situation
Situations-
modell
Reale Resultate
Math. Resultate
Realität
GVs
Mathematik

Blum, 2005


Betrachtung hinsichtlich
- Quantifizierbarkeit
- Struktur und Form
- logischen Beziehungen
Welt 1
Welt 3
Realität
Phänomen,
Situation, Prozess
Abstraktion -> Konstruktive Materialisierung
Mathematik
mathematischer Begriff
verstehen
aufbauen
inhaltlich bestimmen
Grundvorstellung
Sachzusammenhang
deuten in, didaktisch umsetzen
aktivieren
erfassen
Mensch, Individuum
subj. Erfahrungsbereiche
mentale Strukturen
Handlungsvorstellungen
internal images
Welt 2

Beispiel: Grundvorstellungen zum exponentiellen Wachstum

Welt 1

Realität
Phänomen des unbegrenzten Wachstums

Betrachtung hinsichtlich
- Quantifizierbarkeit
- Struktur und Form
- logischen Beziehungen

Abstraktion -> Konstruktive Materialisierung

Welt 3

Mathematik
Begriff der exponentiellen Zunahme
$y_{n+1}=y_n+y_n\cdot(p/100)$

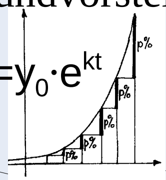
verstehen

inhaltlich bestimmen

aufbauen

Grundvorstellung

$y(t)=y_0\cdot e^{kt}$



Sachzusammenhang
Reiskörner am Schachbrett
Wachstum von Bakterien
Keime in der Kuhmilch
Zinseszinsen

deuten in, didaktisch umsetzen

erfassen

aktivieren

Mensch, Individuum
subj. Erfahrungsbereiche
mentale Strukturen
Handlungsvorstellungen
internal images

Welt 2

(6) Grundvorstellungen ...

müssen innerhalb eines mathematischen Teilgebiets
(jeden Teilgebiets!) *identifiziert* werden.

- Erst die intensive Beschäftigung und Durchdringung eines Teilgebiets ermöglicht es, derartige Grundvorstellungen zu indentifizieren.
- Ein systematischer Katalog von Grundvorstellungen und eine Diskussion darüber wäre für alle Teilgebiete der Schulmathematik wünschenswert.

Beispiel: Grundvorstellungen zu Funktionen

GV1: Zuordnungs-Vorstellung

Eine Größe wird einer anderen eindeutig zugeordnet.

GV2: Kovariations- oder Änderungs-Vorstellung

Verändert sich die eine Größe, so verändert sich die zugeordnete Größe in bestimmter Weise.

GV3: Objekt-Vorstellung

Eine Funktion wird als Ganzes, als eigenständiges mathematisches Objekt sui generis betrachtet.

Beispiel: Grundvorstellungen zum Differentialquotienten

GV1: Differentialquotient als lokale Änderungsrate

Der Differentialquotient ist der Grenzwert der mittleren Änderungsraten von Größen an der betreffenden Stelle.

GV2: Differentialquotient als Steigung

Der Differentialquotient beschreibt die Steigung des Funktionsgraphen an der betreffenden Stelle.

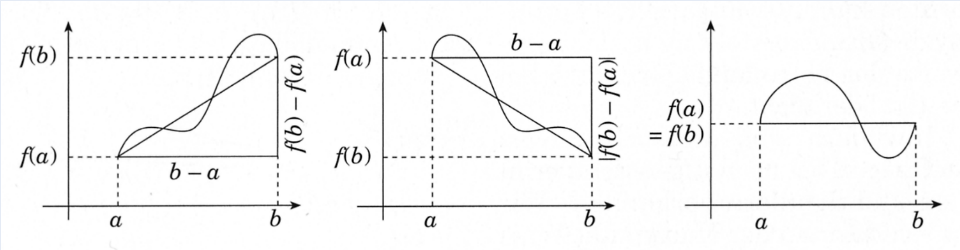
Bedeutet f(x) –	**dann bedeutet** $\frac{df(x)}{dx}$ –
– die **Ordinate** des Punktes (auf einer geeigneten* Kurve) mit der Abszisse x	– die **Steigung** der Kurve in diesem Punkt
– den vom Start bis zum Zeitpunkt x zurückgelegten **Weg**	– die **Geschwindigkeit** zu diesem Zeitpunkt
– die **Einkommensteuer** beim zu versteuernden Einkommen x	– den **Grenzsteuersatz** („Steuer für die letzte Mark“) bei diesem Einkommen
– die vom Anfangspunkt bis zur Wegstelle x verrichtete **Arbeit**	– die an dieser Stelle wirkende **Kraft**komponente
– das **Volumen** der Kugel vom Radius x	– den **Oberflächeninhalt** dieser Kugel
– das **Volumen** eines Körpers bis zur Höhe x	– den **Querschnitt** des Körpers in dieser Höhe
– den **Flächeninhalt** unter einer Kurve (oberhalb der ersten Achse) bis zur Stelle x	– die **Ordinate** des Kurvenpunktes mit der Abszisse x (die Höhe der Fläche bei x)
– das **Integral** $\int_a^x g(u)\,du$ einer Funktion g im Intervall [a;x]	– den **Funktionswert** g(x)

* „Geeignet“ als Kurven sind die Graphen differenzierbarer Funktionen.

Quelle: Mathematik lehren, 78,S.62

Beispiel: Grundvorstellungen zum Differentialquotienten

GV1: Differentialquotient als Änderungsverhältnis



Der Differenzenquotient soll als Verhältnis aufgefasst werden: Die mittlere Änderungsrate ist gleich dem Verhältnis der Änderung der Funktionswerte zur Änderung der Argumente.

GV2: Differentialquotient als mittlere Änderung pro Einheit

Die mittlere Änderungsrate ist gleich der mittleren Änderung der Funktionswerte pro Argumenteinheit.

GV3: Differentialquotient als Änderungsfaktor

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=m \Rightarrow f(b)-f(a)=m\cdot(b-a)$$

Die mittlere Änderungsrate ist gleich demFaktor, mit dem die Änderung der Argumente multipliziert werden muss, um die Änderung der Funktionswerte zu erhalten.

Quelle:Didaktikreihe der ÖMG, Heft 30

(7) Grundvorstellungen ...

stellen die Verbindung zwischen mathematischen Inhalten und mathematischen Tätigkeiten her.

- Hinter jeder Definition, Beschreibung von Eigenschaften eines Begriffs steht eine Grundvorstellung.
- Hinter jeder mathematischen Grundtätigkeit steht eine Grundvorstellung.

Problemlösen

Kenntnisse / Wissen	Begriffe Bausteine Werkzeuge	Fertigkeiten / Fähigkeiten
Mathematische Inhalte Grundwissen	Vorstellungen Grundvorstellungen	Mathematische Tätigkeiten Grundtätigkeiten

- Zahlen
- Algebra
- Geometrie
- Analysis
- Stochastik

M als Sprache
zur Beschreibung von
- Strukturen u. Mustern,
- Systemen
- Quantifizierbarem,
- Reproduzierbarem
- logischen Beziehungen,
- Zusammenhängen
- Ereignissen und Prozessen
- Situationen und Zuständen

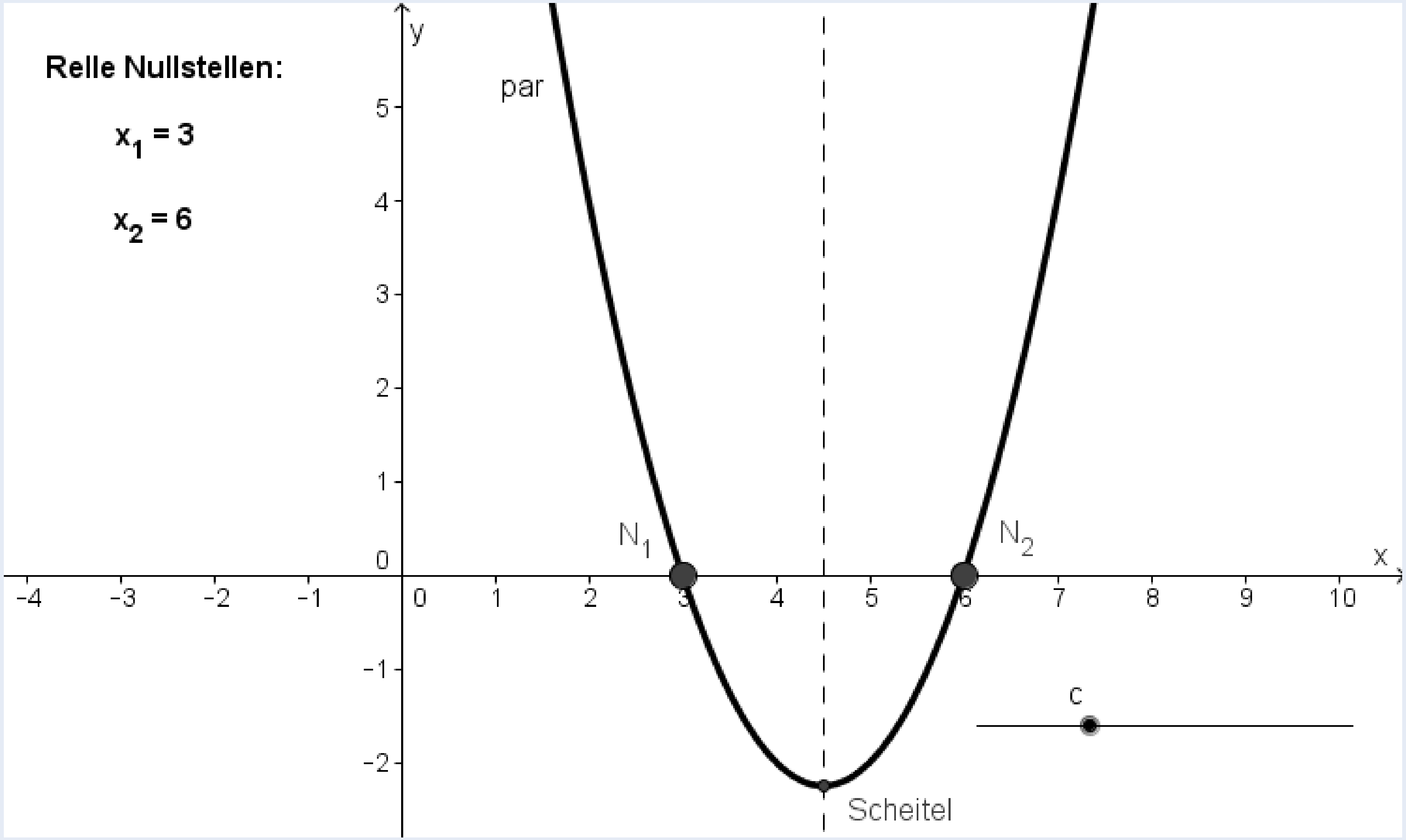
- Darstellend-interpretierendes Arbeiten
- Operativ-algorithmisches Arbeiten
- Kritisch-argumentierendes Arbeiten
- Heuristisch-experimentelles Arbeiten

Reflektieren, Verstehen

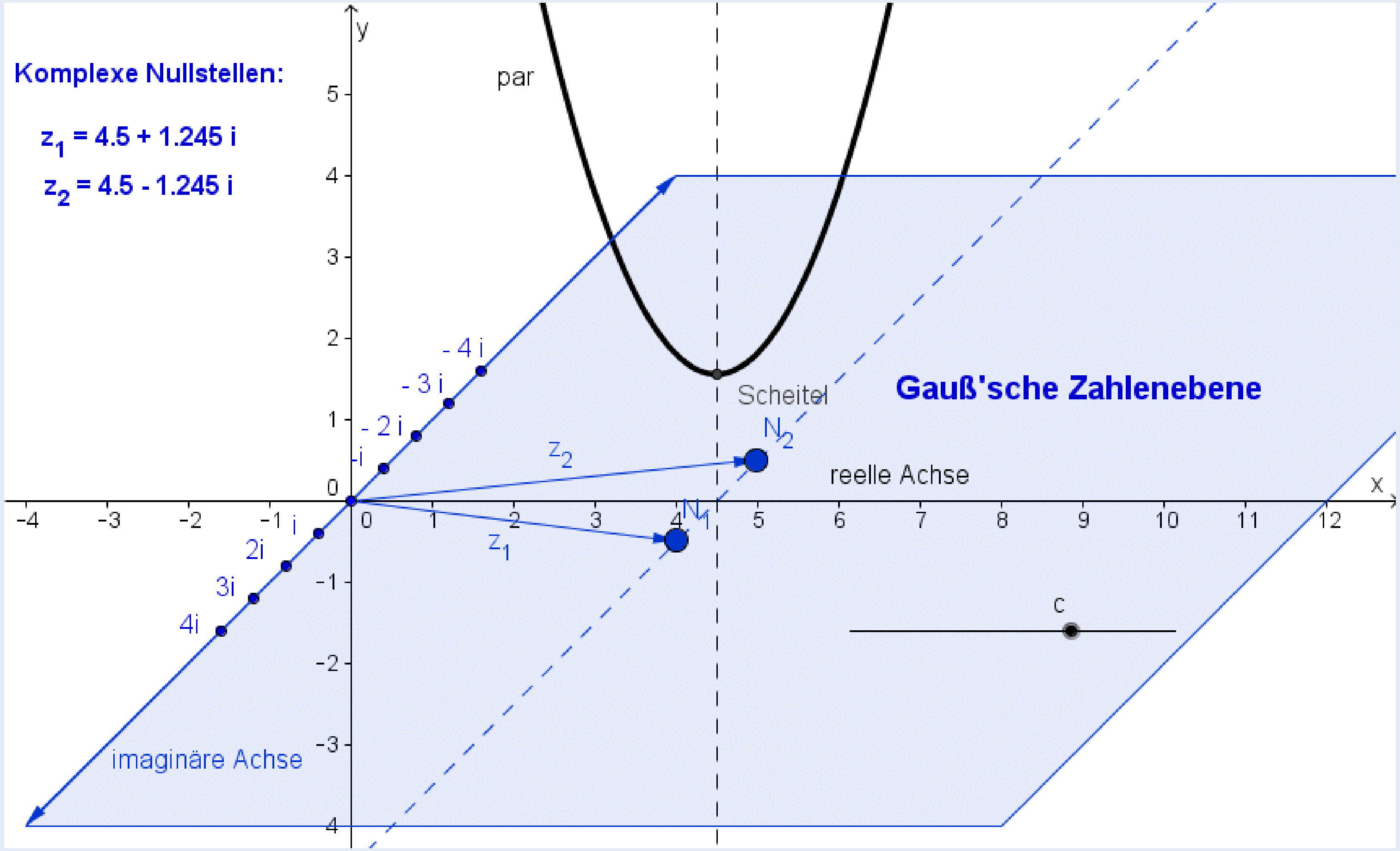
Beispiele aus den vier Inhaltsbereichen

Grundvorstellungen

Beispiel: Quadratische Gleichung

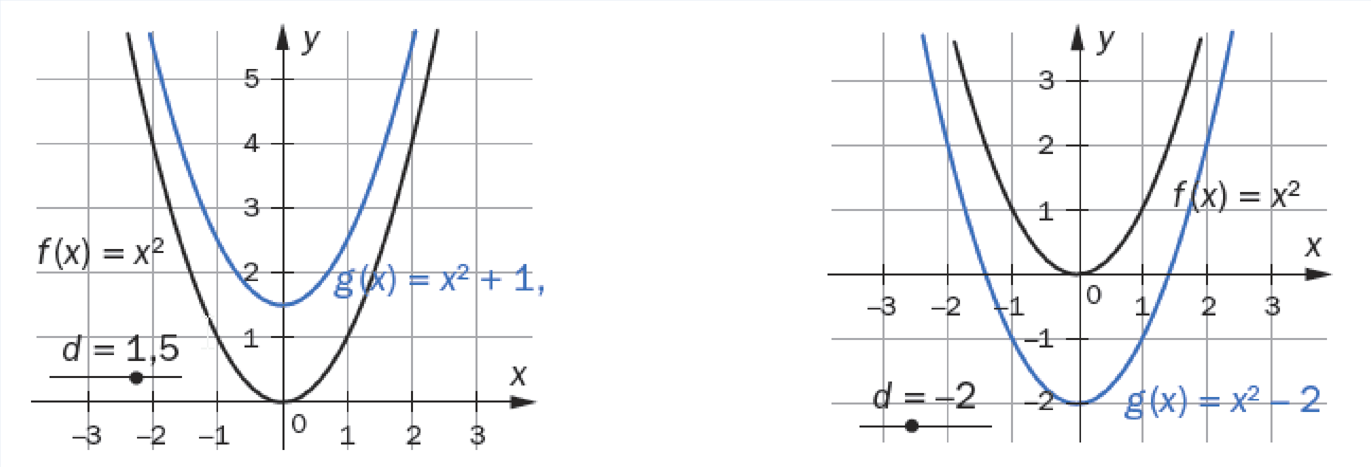


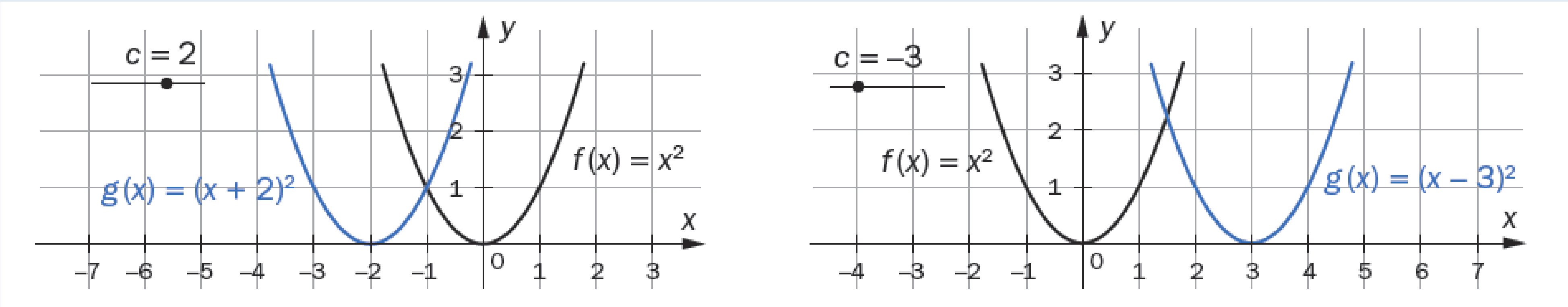
Beispiel: Quadratische Gleichung



http://thema-mathematik.at/tmwiki/doku.php?id=nullstellen_01

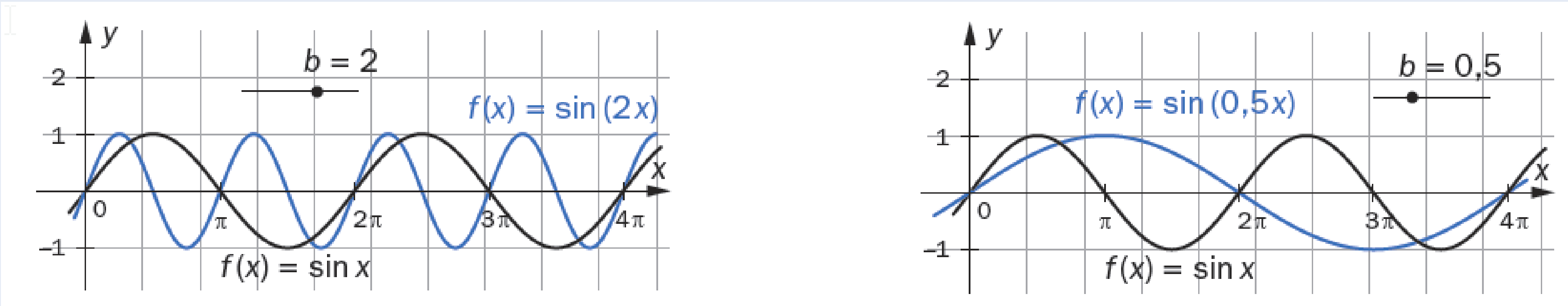
Beispiel: Parametervariation





http://thema-mathematik.at/tmwiki/doku.php?id=tmwiki:parametervariation

Beispiel: Parametervariation



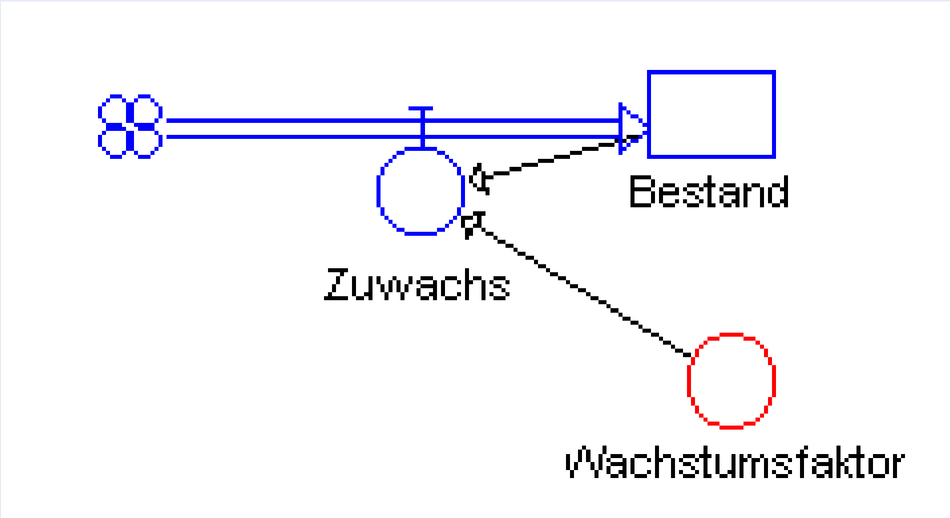
$$g(x) = a \cdot f(b \cdot x + c) + d$$

Quelle: Thema Mathematik 6, S.155

Beispiel: Grundvorstellungen zur Exponentialfunktion

graphisch/geometrische Vorstellungen

- Exponentielles Wachstum (Abnahme) bedeutet: Der Zuwachs ist proportional zum aktuellen Bestand.



Beispiel: Grundvorstellungen zur Exponentialfunktion

Symbolisch/formale Vorstellungen

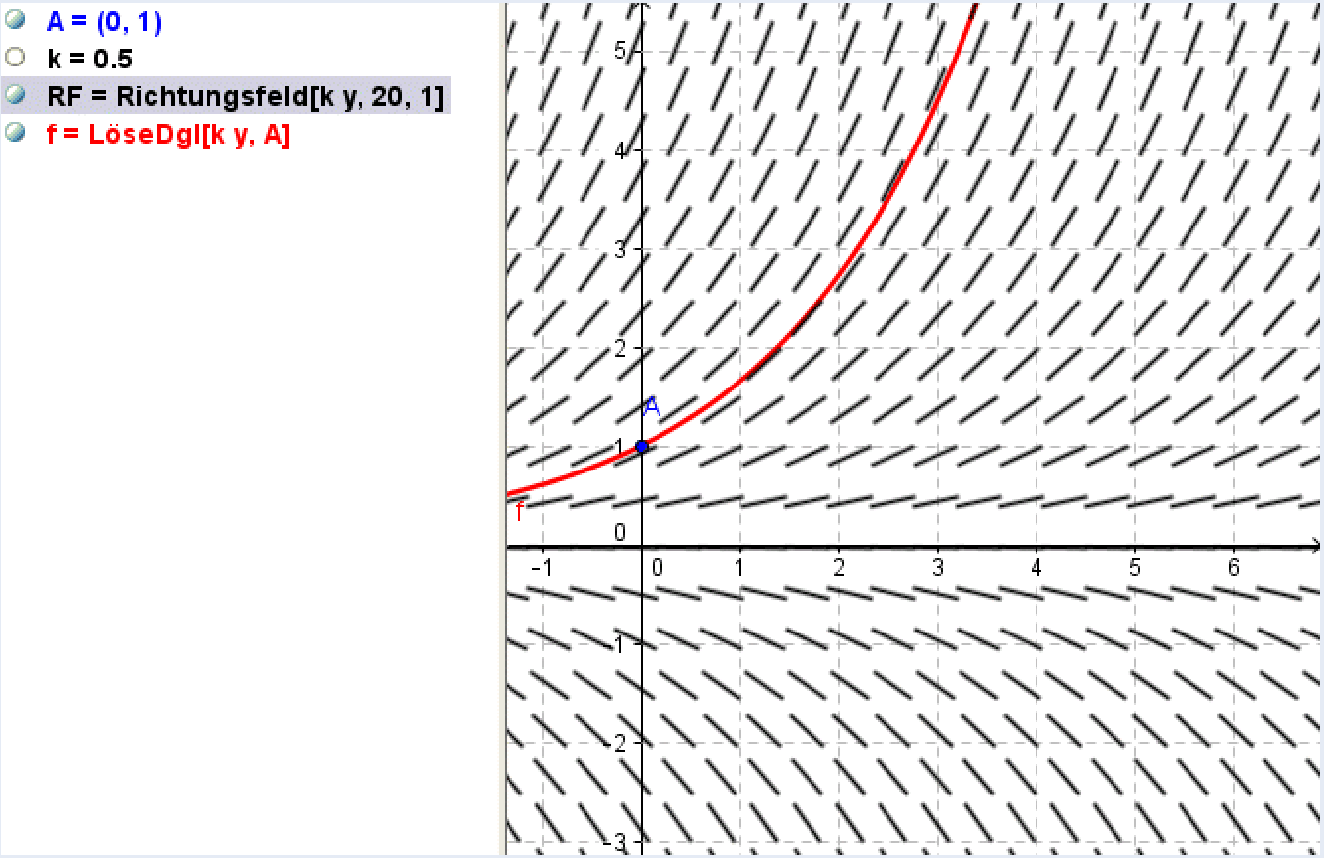
$$y_{n+1} = y_n + k \cdot y_n \qquad k_{disk} \in \mathbb{R}$$

$$y_n = y_0 \cdot (1 + k)^n$$

$$\frac{d\ y}{d\,t} = k \cdot y_n \qquad k_{kont} \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = y_0 \cdot e^{k \cdot t} = y_0 \cdot (e^k)^t = y_0 \cdot a^t$$

Beispiel: Grundvorstellungen zur Exponentialfunktion



Beispiel: Konfidenzintervall

z.B. $N=1500$
$k = 390$

Punktschätzung
$h = 26\%$

relative Häufigkeit

Stichprobe

Sicherheit γ

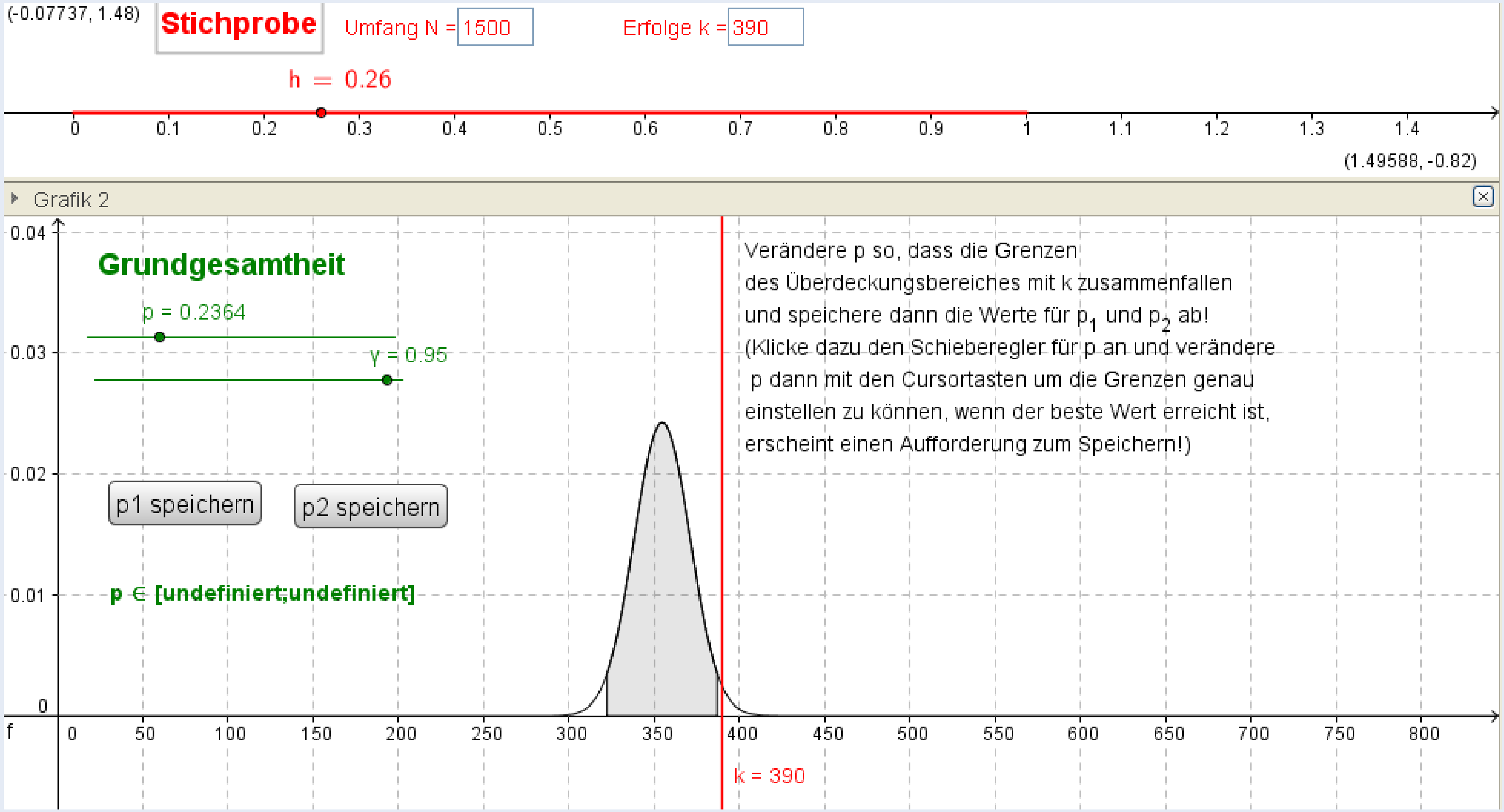
Intervall

$[p1;p2]$

für relativen Anteil gesucht

Grundgesamtheit

Beispiel: Konfidenzintervall



http://www.geogebratube.org/student/m68914

- Danke für ihre Aufmerksamkeit

BLUM, W.; LEISZ, D.: Modellieren im Unterricht mit der "Tanken"-Aufgabe, in:
Mathematik lehren, H. 128, S. 18-21, 2005

BLUM, W. u. WIEGAND. B (1998): Wie kommen die deutschen TIMSS-Ergebnisse zustande?
In: TIMSS und der Mathematikunterricht, S.28-34

BM:UKK: Die kompetenzorientierte mündliche Reifeprüfung im Fach Mathematik an AHS, Wien 2012
(http://www.bmukk.gv.at/schulen/unterricht/ba/reifepruefung.xml)

DIJKSTRA, E.W.: Selected Writings on Computing: A Personal Perspective, Springer-Verlag, 1982.

DORFMAYR, A.; C.BRAND, J. LECHNER, A.MISTLBACHER, A.NUSSBAUMER Thema Mathematik 6. Veritas 2011 Linz,

EDELMANN, W. (1996): Begriffsbildung und Wissenserwerb aus lernpsychologischer Sicht. In: Hischer, H.(Hrsg: Rechenfertigkeit und Begriffsbildung angesichts von Computer-Algebra-Systemen, S.22-30.

FISCHER, R. (1996): Perspektiven des Mathematikunterrichts. In: Zentralblatt für Didaktik der
Mathematik 1996, Heft 2, S.42-46.

HOFE, R.v.(1995): Grundvorstellungen mathematischer Inhalte, Spektrum, Heidelberg.

HOFE, R.v. (1996): Grundvorstellungen - Basis für inhaltliches Denken. In: Mathematik lehren, Heft 78, Oktober 1996, S. 4-8.

HOFE, R.v. (1996): Grundbildung durch Grundvorstellungen. In Mathematik lehren, Heft 118, Juni 2003, S. 4-8.

MALLE, G. (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Verlag Vieweg, Braunschweig,
Wiesbaden.

MALLE, G. (1999): Grundvorstellungen zum Differenzen- und Differentialquotient. In: Didaktikreihe der ÖMG, Heft 30, S.67-78.

REICHEL, H.-CH. (1993): Bildung durch Mathematik. In:KÖHLER, H. u. K.RÖTTEL: Mehr
Allgemeinbildung im Mathematikunterricht, Polygon Verlag, Buxheim.. S.113-126.

REICHEL, H.-Ch. (2000): Nachhaltiger Mathematikunterricht. HPT&ÖBV, Wien

REICHEL, H.-C., R. MÜLLER , G. HANISCH (1991): Lehrbuch der Mathematik 7.
Hölder-Pichler-Temsky, Wien.