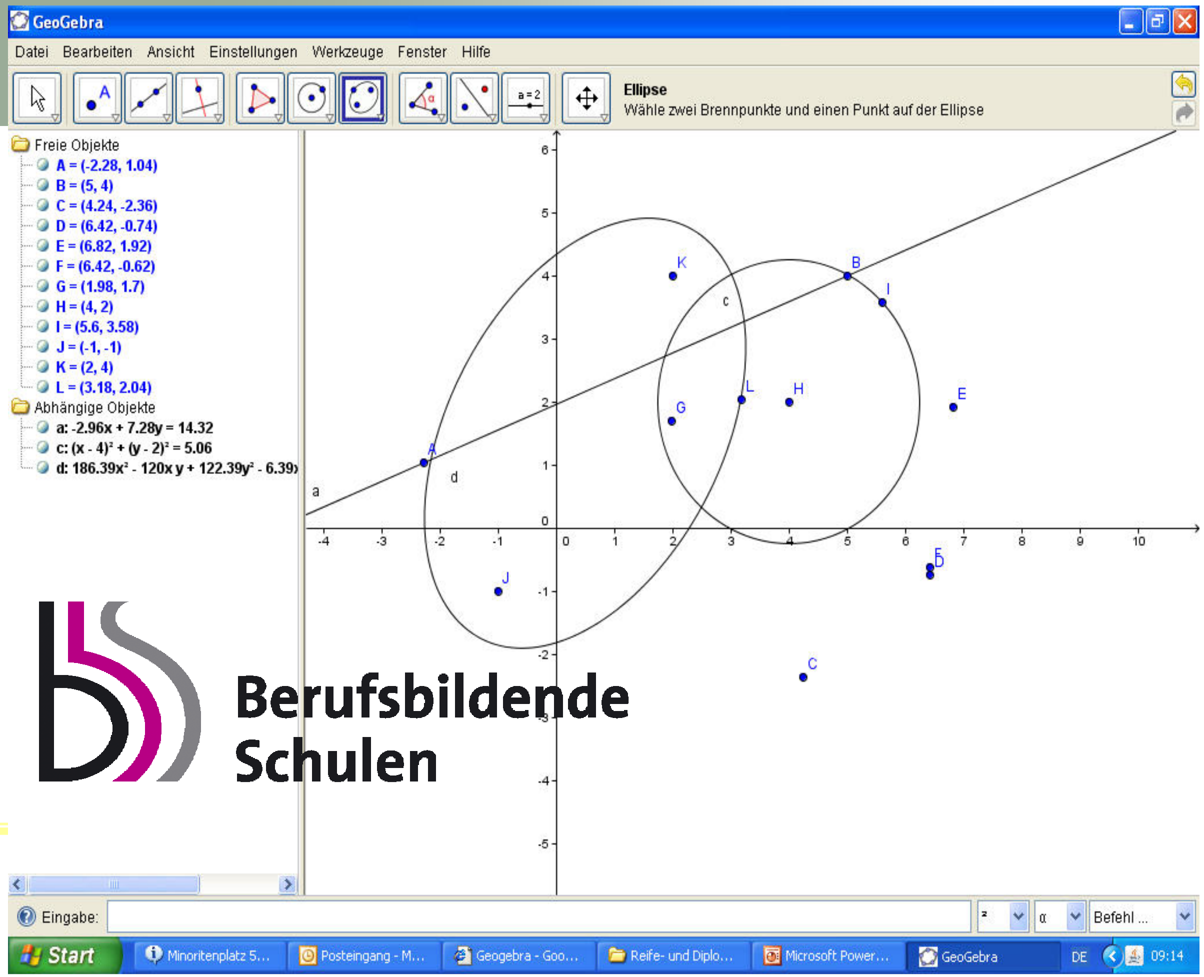
Bildungsstandards in der Sekundarstufe
(Angewandte) Mathematik

und GeoGebra



Geogebra – Konferenz
8.März 2010, Amstetten
Christian Dorninger

Berufsbildende Schulen

Bildungsstandards versus abschließende Prüfungen

Bildungsstandards	Abschließende Prüfungen
▪ zentral vorgegeben	▪ Schulspezifische Anforderungen
▪ Hauptziel ist Feedback über Unterrichtsertrag und Orientierung	▪ Hauptziel ist **Beurteilung** der Schüler/innen
▪ Überprüfung betrifft nur Stichprobe (z.B. 10% der Schüler/innen)	▪ alle Schüler/innen werden erfasst
▪ überprüft werden **kumulativ** und **nachhaltig** vorhandene **Kernkompetenzen** in ausgewählten Gegenständen/Schularten	▪ überprüft werden **festgelegte Prüfungsgebiete**, die speziell und aktuell erarbeitet wurden

Kompetenzen ⟺ Fertigkeiten

Unter Kompetenzen versteht man die bei Individuen verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, um Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können

(Kompetenzdefinition von Weinert, 2001)

- **Kompetenz ist mehr als statisches Faktenwissen („traditioneller Mathematikunterricht“)**
- **Die mathematische „Handlung“, die an Inhalten ausgeführt wird, gewinnt an Bedeutung (Fertigkeiten - > Fähigkeiten)**
- **Nachhaltigkeitsaspekt !**

Handlungs- und Inhaltsdimension

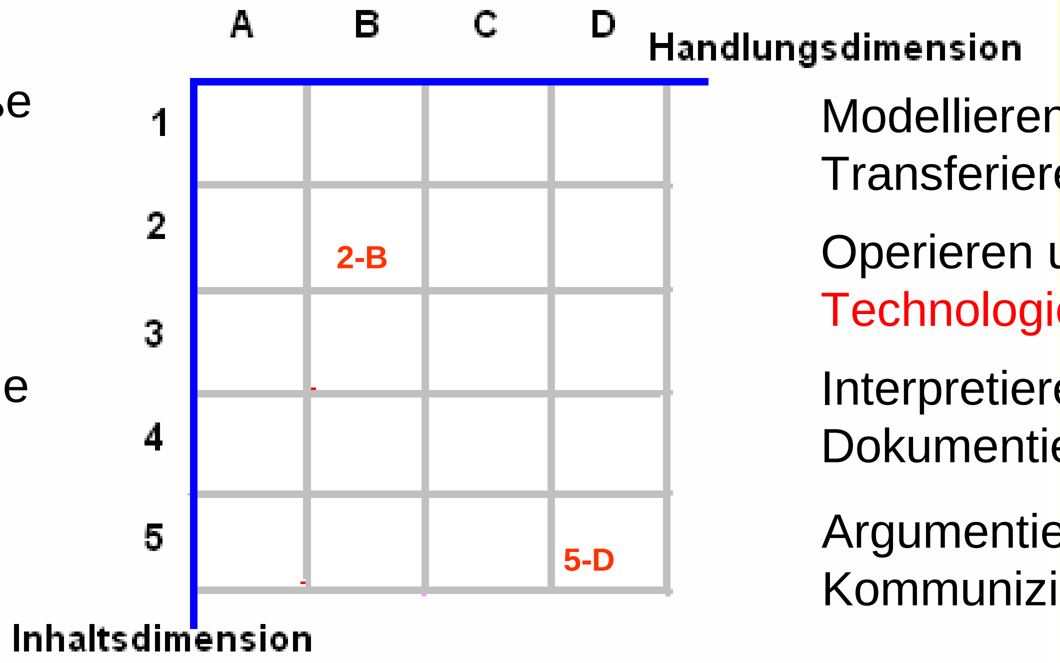
Zahlen und Maße

Algebra
und Geometrie

Funktionale
Zusammenhänge

Analysis

Stochastik



Modellieren u.
Transferieren

Operieren und
Technologieeinsatz

Interpretieren und
Dokumentieren

Argumentieren und
Kommunizieren

Die Kombination einer Handlungsdimension und einer Inhaltsdimension definiert einen **Deskriptor** des Standards.

Inhaltsdimension 1

1 Zahlen und Maße

- Zahlenmengen N, Z, Q, R, Zahlenstrahl
- Komplexe Zahlen, Gauß'sche Ebene
- Dezimal- und Gleitkommadarstellung
- Maßeinheiten
- Prozentrechnung
- Boole'sche Algebra

Inhaltsdimension 2

2 Algebra und Geometrie

- Variable, Terme und Formeln
- Gleichungen, Ungleichungen
- Gleichungssysteme
- Elementare Geometrie und Trigonometrie
- Vektoren (Vektorraum, linearer Raum, Anwnedungen)
- Matrizen, Determinanten

Inhaltsdimension 3

3 Funktionale Zusammenhänge

- empirische sowie diskrete/kontinuierliche mathematische Funktionen
- Definitions- und Wertemenge
- Darstellung von Funktionen in unterschiedlichen Formen, Skalierungen
- Eigenschaften von Funktionen
- Umkehrfunktionen
- Zahlenfolgen und Reihen
- Ausgleichsfunktionen
- Interpolation
- Komplexe Funktionen

Inhaltsdimension 4

4 Analysis

- Grenzwertbegriff
- Stetigkeit und Grenzverhalten
- Differenzen- / Differentialquotient, Differenzierbarkeit, Ableitungsfunktion
- Ableitungsregeln
- Bestimmtes Integral und Stammfunktion
- Integrationsregeln
- Differenzengleichungen (Prinzip)
- Reihenentwicklungen
- Fehlerrechnung
- Spezielle Differentialgleichungen, Intergraltransformationen

Inhaltsdimension 5

5 Stochastik

- Beschreibende Statistik
- Regression und Korrelation
- Wahrscheinlichkeitsbegriff und –rechnung
- Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- Beurteilende Statistik
- Statistische Analysemethoden

Handlungsdimension A

A Modellieren und Transferieren

Modellieren erfordert, dass man in einem gegebenen Sachverhalt die relevanten mathematischen Beziehungen erkennt und diese dann in mathematischer Form darstellt, allenfalls Annahmen trifft und Vereinfachungen bzw. Idealisierungen vornimmt (offene Formulierungen!)

Transferieren erfordert ein adäquates Nutzen oder Übertragen fachlicher Kompetenzen in den Alltag sowie in berufsfeldspezifische Bereiche.

Charakteristische Tätigkeiten für Modellieren und Transferieren sind:

- Aufgabenstellung auf das Wesentliche zusammenfassen / präzisieren.
- Mathematische Formeln finden und für das Problem adaptieren.
- Ein geeignetes Modell für gestelltes Problem finden / erklären
- Alltagssprachliche / berufsspezifische Formulierungen übersetzen
- Für Vorgangsweise entscheiden und Lösungsabläufe planen.
- Verschiedene Darstellungsformen verwenden / wechseln
- Zusammenhang zwischen mathematischen Modellen und der Problemstellung aus Alltag und Wissenschaft herstellen.
- mathematisches Wissen fächerübergreifend anwenden.
- selbständig math. Konzepte ins berufliche Umfeld umsetzen.

Handlungsdimension B

B Operieren und Technologieeinsatz

Operieren meint die Planung sowie die korrekte, sinnvolle und effiziente Durchführung von Rechen- oder Konstruktionsabläufen und schließt geometrisches Konstruieren oder das Arbeiten mit Tabellen und Grafiken mit ein und beinhaltet immer auch die zweckmäßige Auslagerung operativer Tätigkeiten an die verfügbare Technologie.

Technologieeinsatz: Mathematisches Tun wird heute in vielen Bereichen durch die permanente Verfügbarkeit und Verwendung elektronischer Werkzeuge unterstützt oder überhaupt erst ermöglicht. Dies gilt für nahezu alle Ebenen mathematischen Arbeitens. Eine entsprechende „Werkzeugkompetenz“ ist daher integraler Bestandteil mathematischer Kompetenzen.

Charakteristische Tätigkeiten für Operieren und Technologieeinsatz sind:

- Einfache Berechnungen im Kopf durchführen.
- Ergebnisse in geeigneter Genauigkeit abschätzen, mit Näherungswerten rechnen.
- Geometrisches Grundlagenwissen einsetzen
- Numerische und symbolische Methoden unterscheiden und situationsgerecht einsetzen
- Software passend auswählen und nutzen
- „Händisches" Rechnen und Arbeiten mit Hilfsmitteln (insbesondere elektronischer Rechenhilfen) hinsichtlich ihrer Vor- und Nachteile klassifizieren und situationsgerecht einsetzen

Graphische Veranschaulichung

Summe der Quadrate

Eine kleine Anleihe aus der Mechanik ...

Üblicherweise beweist man Formeln wie jene für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen mit vollständiger Induktion. Umso schöner ist es, wenn man statt dieser klassischen Beweismethode einen unorthodoxen Beweis findet, der zugleich eine Herleitung ist.

Ein schönes Beispiel dafür ist die Summe der Quadrate der ersten n Zahlen. Die Formel dafür lautet:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

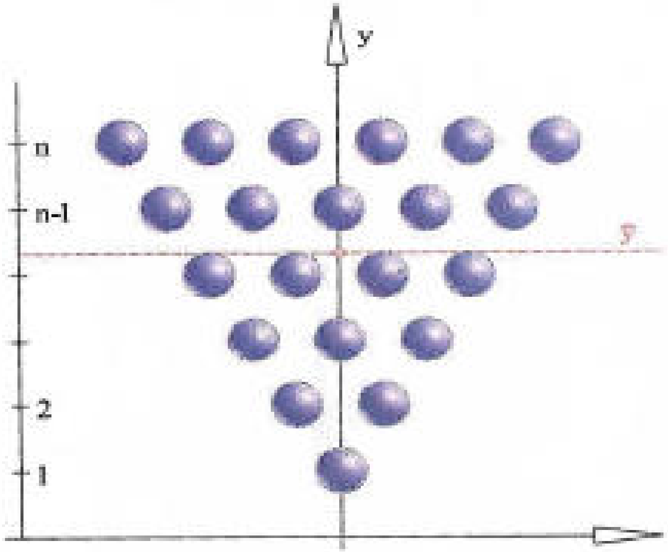
Betrachten wir die nebenstehende Anordnung von

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

„Einheitskugeln" mit der Masse $m_i = 1$ und y-Koordinaten y_i, die ein gleichseitiges Dreieck bilden (die Summenformel dafür haben wir auf der vorangehenden Seite bewiesen). Der Schwerpunkt dieses Dreiecks, der aus Symmetriegründen mit dem Schwerpunkt der Kugelanordnung zusammenfällt, hat in unserem angedeuteten Koordinatensystem die Ordinate

$$\overline{y} = 1 + \frac{2}{3}(n-1) = \frac{2n+1}{3}$$

(die Schwerlinien werden vom Schwerpunkt im Verhältnis 2:1 geteilt). Anderseits ergibt sich nach dem Hebelgesetz von *Archimedes*, dass sich alle Hebelkräfte das Gleichgewicht halten, wenn man den Schwerpunkt als Lagerpunkt verwendet.



Daraus folgt für die y-Koordinaten:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (y_i - \overline{y}) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i y_i = \overline{y} \sum_{i=1}^{n} m_i$$

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \cdots n \cdot n =$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2n+1}{3} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

Visual Thinking

bm:uk

Prototypische Unterrichtsaufgabe 1

1.AM-SA, 2009/10, V.E **Beispiel 1 ist Pflicht - Beispiel 2 oder 3 auswählen:**

1) Verarbeitung von Messdaten ("Glühbirne")

Die nebenstehenden Daten gehen aus einer Messung von Strom und Spannung an einer Glühlampe hervor.

Anmerkung: Betrachte die Spannung in Abhängigkeit vom Stromfluß!

$$I := \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.19 \\ 0.27 \\ 0.35 \end{pmatrix} A \qquad U := \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \\ 150 \\ 200 \end{pmatrix} V$$

A. Regression 1: Die Daten erscheinen ungefähr linear zu sein. Bestimme die Regressionsgerade durch diese Daten.
Stelle die Messdaten und die Regressionsgerade graphisch dar.
Welche Bedeutung hat die Steigung der Gerade ?
Welchen Wert sollte d haben, wenn das Ohmsche Gesetz gilt ?
Diskutiere kurz die Sinnhaftigkeit dieses ersten Ansatzes.

B. Regression 2: Aus theoretischen Überlegungen erscheint der Ansatz eines Regressionspolynoms der Form $y = a \cdot x + b \cdot x^3$ sinnvoll. Bestimme die Koeffizienten a und b durch Regressionsrechnung.
Stelle Regressionskurve und Daten graphisch dar.

C. Interpolation: Als Alternative zur Regression könnte man die Messpunkte durch ein Interpolationspolynom verbinden. Bestimme dieses Interpolationspolynom und stelle das Polynom und die Messdaten ebenfalls graphisch dar.

D. Vergleich: Diskutiere kurz Vor- und Nachteile der verwendeten Methoden.
Zeichne die Lösungen A,B,C für $0 < I < 1$ A in **ein** Diagramm. Überlege bei welchen Varianten eine Extrapolation physikalisch sinnvoll erscheint.

Prototypische Unterrichtsaufgabe 2

Exercise 2:
In recent years the technical development of golf clubs has gone through tremendous changes. New clubs allow drives up to 300 meters. In the following table you can find the latest data:

Distance (m)	Height (m)
0	0
100	14.3
250	9.5

a) Find the parameters of the quadratic equation $y= ax^2+bx+c$, which describes the path of the ball, where x represents the distance in meters and y the height of the ball in meters. Use the matrix function of Microsoft Excel to solve the system of equations.
b) Explain how matrices can be used to solve systems of equations.
c) Where will the ball land on the ground again?

Exercise 3:
During the US Open golf tournament, four golfers scored a hole in one on the sixth hole. The probability for a professional golfer making a hole in one is estimated to be 1/3709. There were 155 golfers participating in the second round that day. Calculate the probability that four golfers would score a hole in one on the sixth hole. Explain the probability concept that is involved in this exercise.