

# Anwenden von Formeln

$$(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$$

$$(u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$$

$$u^2 - v^2 = (u + v)(u - v)$$

für GeoGebraCAS

Letzte Änderung: 29/ März 2011

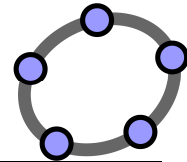
## Überblick

### 1.1 Zusammenfassung

In der dritten Klasse werden die drei oben angeführten Formeln hergeleitet und in unterschiedlichen Situationen angewendet. Meist werden eine geometrische Interpretation und algebraische Berechnungen den Lernprozess bestimmen. In der 4. Klasse werden diese drei Formeln vertieft und weitere Formeln erarbeitet. Dabei kann das CAS nicht nur als geeignetes Testinstrument eingesetzt werden. Durch die Möglichkeiten eines didaktischen CAS können auch Teilausdrücke bearbeitet werden und für Teilausdrücke andere Ausdrücke eingesetzt werden. Diese vielschichtigen Manipulationsmöglichkeiten auf Basis einer gesicherten Termstruktur eröffnet ein Feld von vielen Möglichkeiten den Lernprozess in der elementaren Algebra zu unterstützen.

### 1.2 Kurzinformation

<b>Schulstufe</b>	Vertiefung der Anwendung der bereits in der 7. Schulstufe gelernten drei Formeln und Anwendung bei komplexeren Aufgaben. Diese Materialien können jedoch auch jederzeit in der Sekundarstufe 2 zum Festigen der Möglichkeiten eines didaktischen CAS und zur nachhaltigen Sicherung elementarer algebraischer Umformungen eingesetzt werden.
<b>Geschätzte Dauer</b>	1-2 Unterrichtseinheiten



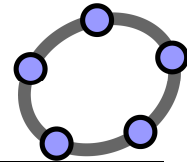
<b>Verwendete Materialien</b>	Arbeitsblätter
<b>Technische Voraussetzungen</b>	GeoGebraCAS an PC oder Notebook
<b>Schlagwörter Mathematik</b>	Binomische Formeln, Substituieren, Termstruktur
<b>Schlagwörter GeoGebraCAS</b>	Teilausdrücke bearbeiten, Substituieren, Expandieren, Faktorisieren, Termstrukturen verändern
<b>Autor/in</b>	Walter Klinger
<b>Download von Zusatzmaterialien</b>	-----

### 1.3 Vorwissen der Lernenden

<b>Mathematisches Vorwissen</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Grundlagen der Elementaren Algebra (Term, Rechnen mit Termen)</li> <li>• Potenzrechnen, Binome multiplizieren können</li> <li>• Bruchrechnen</li> <li>• Folgende Formeltypen kennen:  <math>(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2</math>  <math>(u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2</math>  <math>u^2 - v^2 = (u + v)(u - v)</math> </li> </ul>
<b>Technisches Vorwissen</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Elementare Bedienung von GeoGebraCAS und Kenntnisse über das Bearbeiten von Teilausdrücken und eventuell Techniken um Terme vergleichen zu können</li> </ul>

### 1.4 Lerninhalte und Lernziele

Lehrinhalt	Lernziel
Formeln anwenden können	Sicherung der Fertigkeiten bei der Anwendung von Formeln. Dabei werden folgende drei Formeltypen verwendet: $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$ $(u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$ $u^2 - v^2 = (u + v)(u - v)$



Lehrinhalt	Lernziel
Fehlende Teile erkennen, ergänzen und überprüfen können	Fehlende Teile, bei denen die drei angeführten Formelbeziehungen gelten, erkennen, angeben und einsetzen können. Techniken der Veränderung von Termen und Termstrukturen beherrschen und anwenden können. Eventuell Fehleranalyse auf Basis eines sicheren Termstruktursystems (CAS) durchführen können. Strategien und Vorgangsweisen verbalisieren können.
Komplexere Aufgaben im Kopf lösen können	Die Fertigkeiten auch in komplexeren Situationen erkennen, herleiten und dann auch im Kopf (händisch zu Fuß) anwenden können

### 1.5 Lernzielkontrolle

Bei ähnlichen Beispielen händisch lösen und mit GeoGebraCAS testen können und mündlich oder schriftlich Beschreibung der Vorgangsweise angeben können

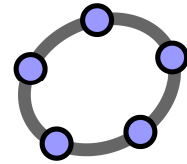
## Vorbereitung der Lehrenden

### 1.6 Vorbereitung des Unterrichts

Arbeitsblätter kopieren oder zum Download vorbereiten. Jede Schülerin/Jeder Schüler braucht ein eigenes Notebook oder einen Computer im EDV-Raum (es können auch zwei Schüler/innen zusammen an einem PC arbeiten).

### 1.7 Verwendung des GeoGebraCAS


Eingabe von Termen. Teilausdrücke bearbeiten, Teilausdrücke durch Ausdrücke ersetzen können, Faktorisieren und Expandieren. Veränderungen der Termstruktur durchführen können, Termstrukturen auf- und abbauen können, Veränderungen auch rückgängig machen können.



## Verwendete Befehle

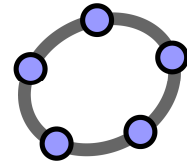
<b>Faktorisiere</b> [ Ausdruck ]	Terme als Produkte darstellen
<b>Multipliziere</b> [ Ausdruck ]	Terme ausrechnen
<b>Ersetze</b>	In (Teil-)Ausdrücke andere Ausdrücke einsetzen können
	Alle diese Befehle sollen auch auf Teilausdrücke angewendet werden können und eventuell zur Fehlerfindung dienen

## Verwendete Werkzeuge

Werkzeug


## Didaktischer Hintergrund

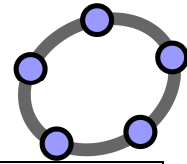
Durch diese Beispiele soll im Bereich der elementaren Algebra der Lernprozess der Schüler/innen beim Umgang mit Termen und Termstrukturen sowie Anwendung von Formeln in einer sehr frühen Phase unterstützt werden. Das CAS eignet sich neben der Verwendung als Testinstrument durch seine vielschichtigen Manipulationsmöglichkeiten besonders als Lernwerkzeug, das die Begriffsbildung unterstützt und den Umgang mit Termstrukturen festigt. Gleichzeitig kann in einem frühen Stadium ein Werkzeug zur Fehleranalyse, Überprüfung und Sicherung des Lernertrages verwendet werden. Die Selbständigkeit im Umgang mit Lerninhalten steht dabei im Zentrum. Weiters werden dadurch Strategien vorbereitet, die in späteren Lernphasen ein großes Repertoire von Vergleichsstrategien und ein flexibler Umgang mit eigenen und fremden Produkten im Bereich des Termrechnens ermöglichen. Das CAS dient dabei nicht nur als Feedbackinstrument, sondern wird zum integrierten Bestandteil des mathematischen Erfassens und Handelns.



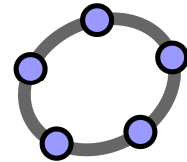
## Einsatz im Unterricht

### 1.8 Verlaufsplan

Phase	Inhalt	Sozial- / Aktionsform	Materialien
<b>Einführung</b>	Wiederholung der drei Formeln	Lehrer- /Schüler/inneng espräch	
<b>Erarbeitungsphase</b>	Teil 1) Fehlende Teile sollen eingesetzt werden und die Richtigkeit der Formeln mit dem CAS getestet werden. Teil 2) Vervollständigung der Formeln durchgeführt werden sowie fehlende Teile erkannt und/oder richtiggestellt sowie ist dem CAS getestet werden	Alleine Teilausdrücke bearbeiten und Tests durchführen können sowie Termstrukturen verändern und diese auch kommunizieren können	Arbeitsblatt - Formeln ergänzen (2 Seiten)  Arbeitsblatt - Welcher Term ist das Quadrat eines Binoms
<b>Zusammenfassung</b>	Es werden Strategien eingeübt, mit denen Schüler/innen elementare algebraische Umformungen durchführen und selbständig die Richtigkeit von selbsterzeugten Termen und Zusammenhängen testen können	Plenumsge- spräch und schriftliche Zusammen- fassung	
<b>Lernzielkontrolle</b>	Neuerliche Anwendung mit selbständiger Beschreibung der Vorgangsweise	Einzelarbeit – Partnerarbeit zum Vergleichen und Diskussion	



Phase	Inhalt	Sozial- / Aktionsform	Materialien
<b>Anwendung / Differenzierung / Übung / Vertiefung</b>	Ähnliche Beispiele werden in komplexeren Aufgabenstellungen angeboten und Strategien für die 'händische' Bearbeitung hergeleitet.	Gemeinsames Erarbeiten und Anwendung der Strategien für 'händische' Bearbeitung	Arbeitsblatt - Vertiefung der Anwendung von Formeln
<b>Hausübung</b>	Weitere Beispiele sollen bearbeitet werden und Fehler erkannt und ausgebessert werden	Einzelarbeit	Hü-Mappe bzw. -Heft



## 1.9 Unterrichtsablauf

### Einführung

Wiederholung der drei Formeln

$$(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$$

$$(u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$$

$$u^2 - v^2 = (u + v)(u - v)$$

### Erarbeitungsphase

Beim **Arbeitsblatt - Formel Ergänzen** – wird zuerst ein Beispiel vorgezeigt und Testverfahren/Nachweisstrategien für die richtige oder falsche Bearbeitung aufgezeigt. Die Vorgangsweise ist wie folgt auf dem Arbeitsblatt beschrieben.

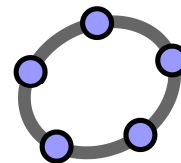
Alter Ausdruck	Neuer Ausdru...
a	20x
b	2x
c	5
x	

Gib danach die Gleichung in dein CAS Zeile 1 ein!

Ersetze wie in Abbildung 1 die Variablen a, b und c mit den vorgegebenen Werten a = 20x, b = 2x und c = 5

Alter Ausdruck	Neuer Ausdru...
a	20x
b	2x
c	5
x	

Abbildung 1 - Belege die Variablen a,b,c mit deinen Werten



=	≈	✓	15 3 · 5	2(a+b) 2a+2b	a ↘ 7	3x = 6 x = 2	∂	<b>Faktorisiere</b> Findet Faktoren
<b>CAS</b>								
1	$4x^2+a+25=(b+c)^2$ ✓ $4x^2 + a + 25 = (b + c)^2$							
2	$4x^2 + a + 25 = (b + c)^2$ Ersetze, a=20x, b=2x, c=5: $4x^2 + 20x + 25 = 4x^2 + 20x + 25$							
3	$4x^2 + 20x + 25 = 4x^2 + 20x + 25$ Faktorisiere: $(2x + 5)^2 = (2x + 5)^2$							

Zur weiteren Überprüfung kannst du die Gleichung in Zeile 3 faktorisieren oder von der linken Seite der Gleichung die rechte Seite (oder umgekehrt) subtrahieren - es entsteht 0.

Die Belegungen der gesuchten Variablen stimmen. Überprüfe das Beispiel 1. Wenn ein Fehler aufgetreten ist, dann mache zum falsch eingetragenen Wert ein Falschzeichen und schreibe darunter mit Farbstift die richtige Lösung. Schreibe die vollständige Formel in die Tabelle.

Danach werden die Beispiele 2 bis 6 selbständig händisch bearbeitet. Als Beispiel 7 soll ein selbst erzeugtes Beispiel erstellt werden und von einer Mitschülerin/einem Mitschüler bearbeitet werden. Die Kontrolle soll für alle Beispiele mit Hilfe des CAS erfolgen.

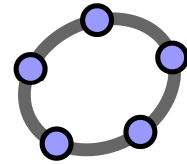
Danach wird das **Arbeitsblatt - Welcher Term ist das Quadrat eines Binoms** – bearbeitet werden. Dabei geht es um die Beantwortung der Frage:

Welcher der in der ersten Spalte gegebenen Terme ist das Quadrat eines Binoms (vollständiges Quadrat)? Ändere die Terme, die keine vollständigen Quadrate sind, so ab, dass Produkte und Quadrate von Binomen entstehen!

Es sollen auch die fehlenden Teile in den Angaben erklärt werden und Richtigstellungen durchgeführt werden!

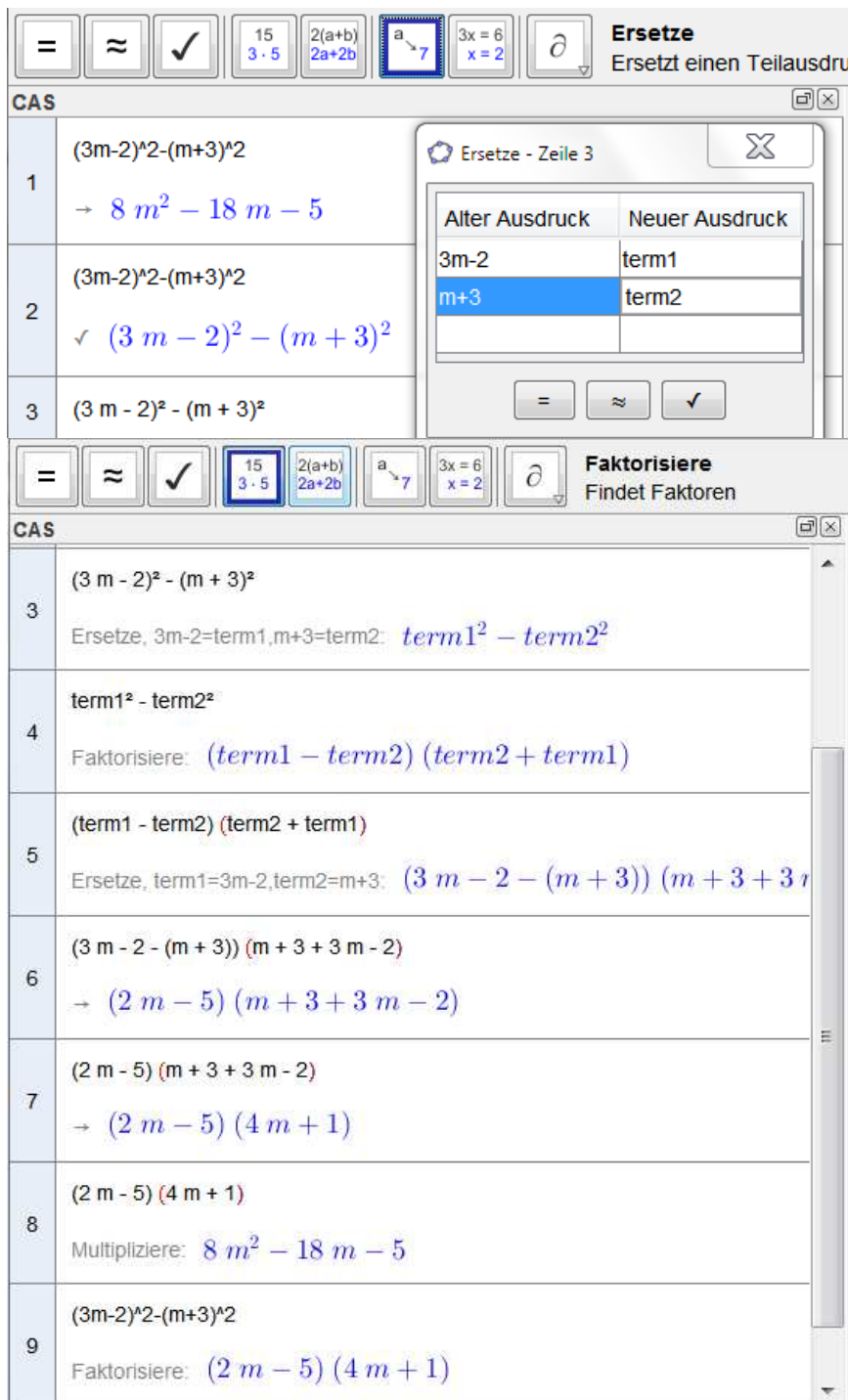
Anschließend wird ein komplexeres Beispiel, **Arbeitsblatt - Vertiefung der Anwendung von Formeln**, bearbeitet werden. Dabei steht die Aufforderung „Verwandle folgenden Term in ein Produkt“ im Zentrum der Bearbeitung:





$$(3m - 2)^2 - (m + 3)^2 =$$

Zuerst wird die Grundstruktur des Ausdrucks anschaulich gemacht (für  $3m-2$  wird term1 und für  $m+3$  wird term2 eingesetzt), diese ist bekannt:  $a^2 - b^2$  (Zeile 3).



**Ersetze**  
Ersetzt einen Teilausdruck

**CAS**

1  $(3m-2)^2 - (m+3)^2$   
→  $8m^2 - 18m - 5$

2  $(3m-2)^2 - (m+3)^2$   
✓  $(3m-2)^2 - (m+3)^2$

3  $(3m-2)^2 - (m+3)^2$

**Ersetze - Zeile 3**

Alter Ausdruck	Neuer Ausdruck
3m-2	term1
m+3	term2

**Faktorisiere**  
Findet Faktoren

**CAS**

3  $(3m-2)^2 - (m+3)^2$   
Ersetze, 3m-2=term1, m+3=term2:  $term1^2 - term2^2$

4  $term1^2 - term2^2$   
Faktorisiere:  $(term1 - term2)(term2 + term1)$

5  $(term1 - term2)(term2 + term1)$   
Ersetze, term1=3m-2, term2=m+3:  $(3m-2 - (m+3))(m+3 + 3m-2)$

6  $(3m-2 - (m+3))(m+3 + 3m-2)$   
→  $(2m-5)(m+3+3m-2)$

7  $(2m-5)(m+3+3m-2)$   
→  $(2m-5)(4m+1)$

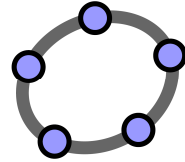
8  $(2m-5)(4m+1)$   
Multipliziere:  $8m^2 - 18m - 5$

9  $(3m-2)^2 - (m+3)^2$   
Faktorisiere:  $(2m-5)(4m+1)$

Danach wird der Term faktorisiert (Zeile 4). Dann wird der Ausdruck wieder zurückeingesetzt (für  $term1=3m-2$  und  $term2=m+3$  - Zeile 5) Es werden dann die Teilfaktoren unterlegt und mit = bearbeitet, dann entsteht der Ausdruck von Zeile 7.

Wir können also auch im Kopf die Formel anwenden, also faktorisieren.

Ein weiteres Beispiel soll 'händisch' gelöst und dann getestet werden.



## Zusammenfassung

Diese Vorgangsweise soll neben den benannten Lerninhalten und Lernzielen auch als Vorbereitung für weitere Bearbeitungen von Termen, Vergleichen von Termen und Fehleranalyse verstanden werden.

## Anhang

Arbeitsblätter

**Arbeitsblatt - Formel Ergänzen**

**Arbeitsblatt - Welcher Term ist das Quadrat eines Binoms**

**Arbeitsblatt - Vertiefung der Anwendung von Formeln**