

# Lösen von linearen Gleichungssystemen in zwei Variablen

für GeoGebraCAS

Letzte Änderung: 29/ März 2011

---

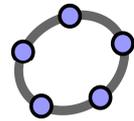
## 1 Überblick

### 1.1 Zusammenfassung

Mit Hilfe dieses Unterrichtsmaterials sollen die Verfahren der Gleichsetzungs-, Substitutions- und Additionsmethode zum Lösen eines Gleichungssystems unter Verwendung eines CAS vermittelt werden. Dabei sollen die Schüler/innen die Vorteile der einzelnen Verfahren beurteilen können und in einem konkreten Fall das jeweils am besten geeignete verwenden. Die auf rechnerischem Weg gefundene Lösung soll mit einer grafischen Lösung verglichen werden.

### 1.2 Kurzinformation

<b>Schulstufe</b>	8. oder 9. Schulstufe
<b>Geschätzte Dauer</b>	2 Unterrichtseinheiten
<b>Verwendete Materialien</b>	siehe Anhang: Arbeitsanleitung 1, Arbeitsanleitung 2, Arbeitsanleitung 3, Aufgabenstellung, Lösungen
<b>Technische Voraussetzungen</b>	GeoGebraCAS, Java
<b>Schlagwörter Mathematik</b>	Gleichungssystem, Gleichung, Gleichsetzungsmethode, Substitutionsmethode, Additionsmethode
<b>Schlagwörter GeoGebraCAS</b>	Löse (Solve), Ersetze (Substitute)



<b>Autor/in</b>	Andreas Lindner
<b>Download von Zusatzmaterialien</b>	

### 1.3 Vorwissen der Lernenden

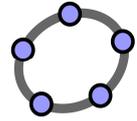
<b>Mathematisches Vorwissen</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Lösen einer linearen Gleichung mit einer Variablen</li> <li>• Ersetzen von Variablen in einem Term</li> <li>• Zusammenhang zwischen linearer Gleichung mit 2 Variablen und Geradengleichung kennen</li> </ul>
<b>Technisches Vorwissen</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Grundlegende Fertigkeiten in der Bedienung von GeoGebra</li> </ul>

### 1.4 Lerninhalte und Lernziele

<b>Lehrinhalt</b>	<b>Lernziel</b>
Lösen von linearen Gleichungssystemen in zwei Variablen	Die Schüler/innen sollen die verschiedenen Verfahren zur Lösung eines Gleichungssystems (Gleichsetzungs-, Substitutions- und Additionsmethode) beherrschen und in einem CAS anwenden können.
Geometrische Interpretation	Die Schüler/innen sollen ein Gleichungssystem grafisch lösen können und die Analogie zwischen der grafischen und der rechnerischen Lösung beschreiben können.

### 1.5 Lernzielkontrolle

Ein Vergleich der von den Schüler/innen ermittelten Lösungen mit dem Lösungsblatt ermöglicht eine rasche Kontrolle für die Lehrenden. Außerdem ist die Übereinstimmung der rechnerischen Lösung des Gleichungssystems mit der grafisch ermittelten Lösung eine unmittelbare Rückmeldung für alle Schüler/innen.



## 2 Vorbereitung der Lehrenden

### 2.1 Vorbereitung des Unterrichts

Vor Beginn der beiden Unterrichtseinheiten müssen Arbeitsanleitung und Aufgabenstellung (siehe Anhang) für jede/n Schüler/in kopiert werden.

### 2.2 Verwendung des GeoGebraCAS

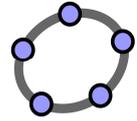
Lehrende sollten folgende Befehle und Funktionalitäten von GeoGebra beherrschen:

GeoGebra	GeoGebraCAS
Gerade erstellen	<b>Löse</b> [Gleichung, Var] bzw. 
Schnitt von Geraden durchführen	<b>Ersetze</b> [Ausdruck, Alt, Neu] bzw. Ersetzen - Dialog
Umschalten zwischen den Darstellungsformen einer Geradengleichung ( $y = kx + d$ bzw. $ax + by = c$ )	<b>LinkeSeite</b> [Gleichung] bzw. <b>RechteSeite</b> [Gleichung]
	<b>Leertaste</b> für die Übernahme der vorhergehenden Ausgabe; <b>)</b> für die vorhergehende Ausgabe in Klammern; <b>=</b> für die vorhergehende Eingabe.

Lehrende sollten über die Möglichkeit und die Möglichkeit des Befehls `Löse[{Gleichung1, Gleichung2}, {var1, var2}]` Bescheid wissen, auch wenn dieser Befehl in den Aufgabenstellungen keine Verwendung findet.

#### Verwendete Befehle

Befehl	Erklärung des Befehls
<b>Ersetze</b> [Ausdruck, Alt, Neu]	Ersetzt in einem Ausdruck die Variable (Ausdruck) Alt durch einen Ausdruck Neu



<b>Löse</b> [Gleichung, Var]	Löst die Gleichung nach der Variablen Var
<b>LinkeSeite</b> [Gleichung] bzw. <b>RechteSeite</b> [Gleichung]	Gibt die linke bzw. rechte Seite einer Gleichung an.

### Verwendete Werkzeuge

Werkzeug	Name des Werkzeugs (siehe Beispiel unten)
	Bewege
	Schneide zwei Objekte
	Vergrößere, Verkleinere
	Verschiebe Zeichenblatt
	Löse
	Ersetzen-Dialog

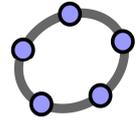
## 3 Didaktischer Hintergrund

Durch das Kennenlernen mehrerer Lösungsmethoden sollen die Schüler/innen Strategien entwickeln, welches Lösungsverfahren in welcher Situation, d. h. bei welchem Gleichungssystem, am besten angewendet werden kann.

Durch die Verwendung eines CAS werden Rechenfehler (nahezu) ausgeschlossen, wodurch die eigentliche Konzentration den angewandten Methoden gelten kann.

Ziel dieser beider Unterrichtseinheiten ist das Kennenlernen unterschiedlicher Lösungsmethoden für das Lösen eines Gleichungssystems, deshalb sollte der Befehl `solve2[...]`, der ein Gleichungssystem von 2 Gleichungen mit 2 Variablen löst, nicht verwendet werden. Die Verwendung dieses Befehls als Black Box kann eventuell in einer späteren Phase von Nutzen sein.

Mögliche Fehlerquellen beim Einsatz von Technologie sollten im Unterricht auch thematisiert werden.



Als Beispiel sei das im Aufgabenteil zu lösende Gleichungssystem genannt:

$$x + 3y = 52$$

$$4x - y = 78$$

Beim grafischen Lösen dieses Gleichungssystems erscheinen beide Geraden in der Standardeinstellung der Zeichenfläche nicht im sichtbaren Bereich. Erst ein gezieltes Zoomen auf einen größeren Bereich zeigt die Geraden und ihren Schnittpunkt mit den Koordinaten (22 | 10).

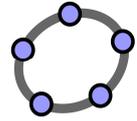
Ohne ein grundsätzliches Wissen über die Lage von Geraden ist ein sinnvolles Lösen einer Aufgabe manchmal nicht möglich.

Ein kritisches Hinterfragen der Fehlermöglichkeiten beim Einsatz eines Mathematikprogramms sollte immer auch Bestandteil des Unterrichts sein.

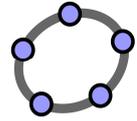
## 4 Einsatz im Unterricht

### 4.1 Verlaufsplan

Phase	Inhalt	Sozial- / Aktionsform	Materialien
<b>Einführung</b>	Aufgabenstellung durch den Lehrer/die Lehrerin	Lehrervortrag	
<b>Erarbeitungsphase</b>	Erstellen des Arbeitsblattes 1	Einzelarbeit	Arbeitsanleitung 1 (siehe Anhang)
	Erstellen des Arbeitsblattes 2	Einzelarbeit	Arbeitsanleitung 2 (siehe Anhang)
	Erstellen des Arbeitsblattes 3	Einzelarbeit	Arbeitsanleitung 3 (siehe Anhang)
<b>Zusammenfassung</b>	Bearbeiten der Aufgabenstellung	Partnerarbeit	Aufgabenstellung
<b>Lernzielkontrolle</b>	Kontrolle der ausgefüllten Aufgabenstellungen	Lehrer/in und Selbstkontrolle	



Phase	Inhalt	Sozial- / Aktionsform	Materialien
<b>Anwendung / Differenzierung / Übung / Vertiefung</b>	Vorschläge zur Differenzierung siehe unten	Einzel- oder Partnerarbeit	
<b>Hausübung</b>	Vorschläge zur HÜ siehe unten	Einzelarbeit	



## 4.2 Unterrichtsablauf

### Einführung

Der Lehrende erklärt die Aufgabenstellung. Dazu kann eventuell ein fertiges Arbeitsblatt präsentiert werden, um eine genaue Zielvorgabe geben zu können.

### Erarbeitungsphase

1. Unterrichtseinheit:

Die Schüler/innen erstellen in Einzelarbeit am PC nach der schriftlichen **Arbeitsanleitung 1, 2 und 3** (auf Papier, siehe Anhang) das jeweilige Arbeitsblatt. Die Lehrkraft gibt bei Bedarf Hilfestellung und unterstützt bei Problemen mit dem Handling des Programms.

### Zusammenfassung

2. Unterrichtseinheit:

In der 2. Unterrichtseinheit bearbeiten die Schüler/innen in Partnerarbeit die Aufgaben, die im Arbeitsblatt **Aufgabenstellungen** (auf Papier, siehe Anhang) angegeben sind.

### Anwendung / Differenzierung / Übung / Vertiefung

Schüler/innen, die in der vorgegebenen Zeit bereits alle gestellten Aufgaben positiv erledigt haben, können zusätzliche Aufgaben bearbeiten.

### Zusätzliche Aufgaben

Löse die folgenden Gleichungssysteme mit einer geeigneten Methode und stelle die Geraden mit ihrem Schnittpunkt grafisch dar.

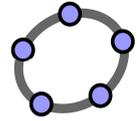
$$(1) \quad \begin{array}{l} 1,5x + 6y = 16,5 \\ x - y = 1 \end{array} \quad (2) \quad \begin{array}{l} 0,8x + 2y = 4 \\ -1,2x + 2,4y = 0,48 \end{array} \quad (3) \quad \begin{array}{l} 4,5 = 2x + 3 \\ 5,6y = 13 - 1,8 \end{array}$$

(Lösungen: (1)  $L = \{(3 | 2)\}$ ; (2)  $L = \{(2 | 1,2)\}$ ; (3)  $L = \{(0,75 | 2)\}$  )

Als Alternative bietet sich auch ein **Tutorensystem** an, bei dem sehr gute Schüler/innen lernschwächere Klassenkollegen/innen unterstützen und ihnen bei ihrer Arbeit helfen.

### Hausübung

Vorschläge zur Hausübung sind im Anhang unter „Hausübung“ angeführt.



## 5 Anhang

Folgende Materialien stehen für die Schüler/innen bzw. Lehrer/innen zur Verfügung.

- 1) **Arbeitsanleitung 1** zum Erstellen eines Arbeitsblatts „Lösen eines Gleichungssystems mit der Gleichsetzungsmethode“
- 2) **Arbeitsanleitung 2** zum Erstellen eines Arbeitsblatts „Lösen eines Gleichungssystems mit der Einsetzungsmethode (Substitutionsmethode)“
- 3) **Arbeitsanleitung 3** zum Erstellen eines Arbeitsblatts „Lösen eines Gleichungssystems mit der Additionsmethode“
- 4) **Aufgabenstellung** zu „Lösen eines Gleichungssystems“
- 5) **Hausübungen**
- 6) **Lösungen**