

# BUCHSTABEN- UND ZAHLENSALAT

Was hat Pascal mit den Binomialkoeffizienten zu tun?

## Aufgabe 1 – Von der Anordnung der Variablen a und b

Das Anwenden von binomischen Formeln entspricht dem Ausmultiplizieren von Binomen.

D.h.

$$(a + b)^0 = 1$$

weil  $x^0=1$

$$(a + b)^1 = a + b$$

es gibt ein a und ein b

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

1. Wie viele Möglichkeiten gibt es, mit den Variablen a und b zwei leere Plätze zu füllen?  
Gib alle Möglichkeiten mit unterschiedlichen Reihenfolgen von a und b an!

--	--	--	--	--	--

2. Drücke diese Ergebnisse mit Hochzahlen aus!

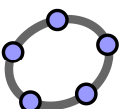
3. Gib die verschiedenen Terme an!  
Wie oft tritt jeder dieser Terme auf?

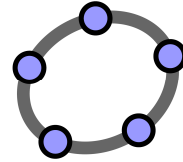
$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

1. Wie viele Möglichkeiten gibt es, mit den Variable a und b drei leere Plätze zu füllen?  
Gib alle Möglichkeiten mit unterschiedlichen Reihenfolgen von a und b an!


2. Drücke diese  
Ergebnisse mit  
Hochzahlen aus!

3. Gib die verschiedenen Terme an!  
Wie oft tritt jeder dieser Terme auf?





$$(a + b)^4 = (a + b)(a + b)(a + b)(a + b)$$

1. Wie viele Möglichkeiten gibt es, mit den Variable a und b vier leere Plätze zu füllen?  
Gib alle Möglichkeiten mit unterschiedlichen Reihenfolgen von a und b an!

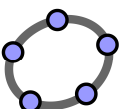




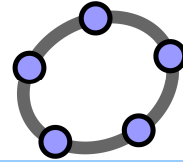
2. Drücke diese Ergebnisse mit Hochzahlen aus!

3. Gib die verschiedenen Terme an!  
Wie oft tritt jeder dieser Terme auf?

4. Ergänze nun  $(a + b)^4 = (a + b)(a + b)(a + b)(a + b) =$







### Aufgabe 3 – Rechnen mit dem Binomialkoeffizienten

Der Binomialkoeffizient  $\binom{n}{k}$  wird berechnet mit  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ . Du kannst in GeoGebraCAS den Bruch genau in dieser Schreibweise eingeben.

1. Berechne mit GeoGebraCAS die Binomialkoeffizienten

$$\binom{2}{0} = \text{---}, \binom{2}{1} = \text{---} \text{ und } \binom{2}{2} = \text{---}.$$

Vergleiche die errechneten Binomialkoeffizienten mit den Koeffizienten von  $(a + b)^2$ . Was fällt dir auf?

2. Berechne mit GeoGebraCAS die Binomialkoeffizienten

$$\binom{3}{0} = \text{---}, \binom{3}{1} = \text{---}, \binom{3}{2} = \text{---} \text{ und } \binom{3}{3} = \text{---}.$$

Vergleiche die errechneten Binomialkoeffizienten mit den Koeffizienten von  $(a + b)^3$ . Was fällt dir auf?

3. Berechne mit GeoGebraCAS die Binomialkoeffizienten

$$\binom{4}{0} = \text{---}, \binom{4}{1} = \text{---}, \binom{4}{2} = \text{---}, \binom{4}{3} = \text{---} \text{ und } \binom{4}{4} = \text{---}.$$

Vergleiche die errechneten Binomialkoeffizienten mit den Koeffizienten von  $(a + b)^4$ . Was fällt dir auf?

4. Gib  $(a + b)^5$ ,  $(a + b)^6$  und  $(a + b)^7$  mithilfe der entsprechenden Binomialkoeffizienten an!

$$(a + b)^5 = \text{-----}$$

$$(a + b)^6 = \text{-----}$$

$$(a + b)^7 = \text{-----}$$

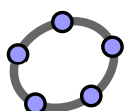
5. Gib  $(a + b)^n$  mithilfe der entsprechenden Binomialkoeffizienten an!

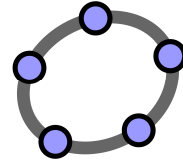
$$(a + b)^n = \text{-----}$$

Kannst du jetzt auch die Exponenten in Abhängigkeit von n angeben?

$$(a + b)^n = \text{-----}$$

**Diese Formel zur Berechnung von  $(a + b)^n$  wird binomischer Lehrsatz genannt!**





6. Für große  $n$  ist die Berechnung der einzelnen Binomialkoeffizienten auch mit einem CAS aufwendig.  
Du kannst dir jedoch auf folgende Weise eine Liste der Binomialkoeffizienten abhängig von der Wahl deines Wertes für  $n$  erzeugen.

Zur Berechnung der Liste der Binomialkoeffizienten gehst du so vor:

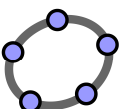
- Definiere  $n$ . z. B.:  $n := 10$
- Definiere eine Funktion zur Berechnung des Binomialkoeffizienten.  
z. B.:  $bk(k) := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$
- Mit dem Befehl `Folge(bk(i), i, 0, n, 1)`<sup>1</sup> erhältst du die Liste der Binomialkoeffizienten  $\binom{10}{k}$  für  $k = 0, 1, 2, \dots, 10$
- Gib mithilfe dieser Liste  $(a + b)^{10}$  an und überprüfe dein Ergebnis durch Berechnung von  $(a + b)^{10}$  mit GeoGebraCAS!

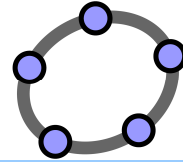
$$(a + b)^{10} = \underline{\hspace{15cm}}$$

7. Berechne mit GeoGebraCAS die Liste der Binomialkoeffizienten für  $n = 15$ .

Gib  $(a + b)^{15}$  mithilfe der errechneten Binomialkoeffizienten an und überprüfe dein Ergebnis durch Berechnung von  $(a + b)^{15}$  mit GeoGebraCAS!

<sup>1</sup> Folge(Term, Variable, Startwert, Endwert, Schrittweite)





## Aufgabe 4 – Zusammenhang zwischen der Anordnung der Variablen a und b und dem Binomialkoeffizienten

1. In der *Aufgabe 1* hast du untersucht, auf wie viele Arten die zwei Variablen a und b auf zwei leeren Plätzen angeordnet werden können.

Gib die auftretenden Möglichkeiten und die Anzahl ihres Auftretens an!

Berechne analog zur *Aufgabe 3* die Liste der Binomialkoeffizienten für  $n = 2$ .  
Vergleiche die Ergebnisse mit den gezählten Anordnungen der Variablen a und b.  
Was fällt dir auf?

2. In der *Aufgabe 1* hast du auch untersucht, auf wie viele Arten die zwei Variablen a und b auf drei leeren Plätzen angeordnet werden können.

Gib die auftretenden Möglichkeiten und die Anzahl ihres Auftretens an!

Berechne analog zur *Aufgabe 3* die Liste der Binomialkoeffizienten für  $n = 3$ .  
Vergleiche die Ergebnisse mit den gezählten Anordnungen der Variablen a und b.  
Was fällt dir auf?

3. In der *Aufgabe 1* hast du auch untersucht, auf wie viele Arten die zwei Variablen a und b auf vier leeren Plätzen angeordnet werden können.

Gib die auftretenden Möglichkeiten und die Anzahl ihres Auftretens an!

Berechne analog zur *Aufgabe 3* die Liste der Binomialkoeffizienten für  $n = 4$ .  
Vergleiche die Ergebnisse mit den gezählten Anordnungen der Variablen a und b.  
Was fällt dir auf?

4. Formuliere eine allgemeine Vorschrift, mit der du berechnen kannst, auf wie viele Arten k Variablen auf n leeren Plätzen angeordnet werden können!

