BUCHSTABEN- UND ZAHLENSALAT

Was hat Pascal mit den Binomialkoeffizienten zu tun?

Aufgabe 1 – Von der Anordnung der Variablen a und b

Das Anwenden von binomischen Formeln entspricht dem Ausmultiplizieren von Binomen. D.h.

$(a + b)^0 = 1$	weil $x^0=1$
$(a + b)^1 = a + b$	es gibt ein a und ein b

$(a + b)^2 = (a + b)(a +b) = a^2 + 2ab + b^2$

1. Wie viele Möglichkeiten gibt es, mit den Variablen a und b zwei leere Plätze zu füllen? Gib alle Möglichkeiten mit unterschiedlichen Reihenfolgen von a und b an!

2. Drücke diese Ergebnisse mit Hochzahlen aus!

3. Gib die verschiedenen Terme an!
Wie oft tritt jeder dieser Terme auf?

$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

1. Wie viele Möglichkeiten gibt es, mit den Variable a und b drei leere Plätze zu füllen? Gib alle Möglichkeiten mit unterschiedlichen Reihenfolgen von a und b an!

2. Drücke diese Ergebnisse mit Hochzahlen aus!

3. Gib die verschiedenen Terme an!
Wie oft tritt jeder dieser Terme auf?

$(a + b)^4 = (a + b)(a + b)(a + b)(a + b)$

1. Wie viele Möglichkeiten gibt es, mit den Variable a und b vier leere Plätze zu füllen? Gib alle Möglichkeiten mit unterschiedlichen Reihenfolgen von a und b an!

2. Drücke diese Ergebnisse mit Hochzahlen aus!

3. Gib die verschiedenen Terme an!
Wie oft tritt jeder dieser Terme auf?

4. Ergänze nun $(a + b)^4 = (a + b)(a + b)(a + b)(a + b) =$

Aufgabe 2 – Wiederholung Pascal’sches Dreieck

1. Gib in GeoGebraCAS den Ausdruck $(a + b)^n$ ein und berechne ihn für n = 0, 1, 2, 3, 4, 5 und 6. Verwende den Befehl `Multipliziere` bzw. das Werkzeug 2(a+b) 2a+2b

2. Trage die Koeffizienten in das Dreieck ein!

n=0 1
n=1 1 1
n=2 1 2 1
n=3 1 3 3 1
n=4 1 4 _ _ _
n=5 1 _ _ _ _ _
n=6 1 _ _ _ _ _ _
n=7 1 _ _ _ _ _ _ _

3. Vergleiche die Koeffizienten des Pascal’schen Dreiecks mit den Koeffizienten der Ausdrücke $(a + b)^n$. Was erkennst du?

4. Was kannst du bei den Exponenten der Variablen erkennen?

5. Berechne nun händisch $(a + b)^7$ und $(a + b)^8$ und vergleiche dein Ergebnis mit den entsprechenden Ausgaben von GeoGebraCAS.

$(a + b)^7$ = ____

$(a + b)^8$ = ____

Aufgabe 3 – Rechnen mit dem Binomialkoeffizienten

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ wird berechnet mit $\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$. Du kannst in GeoGebraCAS den Bruch genau in dieser Schreibweise eingeben.

1. Berechne mit GeoGebraCAS die Binomialkoeffizienten
$\binom{2}{0}$ = ____, $\binom{2}{1}$ = ____ und $\binom{2}{2}$ = ____.
Vergleiche die errechneten Binomialkoeffizienten mit den Koeffizienten von $(a + b)^2$.
Was fällt dir auf?

2. Berechne mit GeoGebraCAS die Binomialkoeffizienten
$\binom{3}{0}$ = ____, $\binom{3}{1}$ = ____, $\binom{3}{2}$ = ____ und $\binom{3}{3}$.
Vergleiche die errechneten Binomialkoeffizienten mit den Koeffizienten von $(a + b)^3$.
Was fällt dir auf?

3. Berechne mit GeoGebraCAS die Binomialkoeffizienten
$\binom{4}{0}$ = ____, $\binom{4}{1}$ = ____, $\binom{4}{2}$ = ____, $\binom{4}{3}$ = ____ und $\binom{4}{4}$.
Vergleiche die errechneten Binomialkoeffizienten mit den Koeffizienten von $(a + b)^4$.
Was fällt dir auf?

4. Gib $(a + b)^5$, $(a + b)^6$ und $(a + b)^7$ mithilfe der entsprechenden Binomialkoeffizienten an!

$(a + b)^5$ = ____

$(a + b)^6$ = ____

$(a + b)^7$ = ____

5. Gib $(a + b)^n$ mithilfe der entsprechenden Binomialkoeffizienten an!

$(a + b)^n$ = ____

Kannst du jetzt auch die Exponenten in Abhängigkeit von n angeben?

$(a + b)^n$ = ____

Diese Formel zur Berechnung von $(a + b)^n$ wird binomischer Lehrsatz genannt!

6. Für große n ist die Berechnung der einzelnen Binomialkoeffizienten auch mit einem CAS aufwendig.
Du kannst dir jedoch auf folgende Weise eine Liste der Binomialkoeffizienten abhängig von der Wahl deines Wertes für n erzeugen.

Zur Berechnung der Liste der Binomialkoeffizienten gehst du so vor:

a. Definiere n. z. B.: `n:=10`

b. Definiere eine Funktion zur Berechnung des Binomialkoeffizienten.
z. B.: `bk(k):=` $\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

c. Mit dem Befehl `Folge(bk(i),i,0,n,1)`[1] erhältst du die Liste der Binomialkoeffizienten $\binom{10}{k}$ für k = 0, 1, 2, …, 10

d. Gib mithilfe dieser Liste $(a + b)^{10}$ an und überprüfe dein Ergebnis durch Berechnung von $(a + b)^{10}$ mit GeoGebraCAS!

$(a + b)^{10}$ = ____

7. Berechne mit GeoGebraCAS die Liste der Binomialkoeffizienten für n = 15.

Gib $(a + b)^{15}$ mithilfe der errechneten Binomialkoeffizienten an und überprüfe dein Ergebnis durch Berechnung von $(a + b)^{15}$ mit GeoGebraCAS!

[1] `Folge(Term, Variable, Startwert, Endwert, Schrittweite)`

Aufgabe 4 – Zusammenhang zwischen der Anordnung der Variablen a und b und dem Binomialkoeffizienten

1. In der *Aufgabe 1* hast du untersucht, auf wie viele Arten die zwei Variablen a und b auf zwei leeren Plätzen angeordnet werden können.

   Gib die auftretenden Möglichkeiten und die Anzahl ihres Auftretens an!

   Berechne analog zur *Aufgabe 3* die Liste der Binomialkoeffizienten für n = 2.
   Vergleiche die Ergebnisse mit den gezählten Anordnungen der Variablen a und b.
   Was fällt dir auf?

2. In der *Aufgabe 1* hast du auch untersucht, auf wie viele Arten die zwei Variablen a und b auf drei leeren Plätzen angeordnet werden können.

   Gib die auftretenden Möglichkeiten und die Anzahl ihres Auftretens an!

   Berechne analog zur *Aufgabe 3* die Liste der Binomialkoeffizienten für n = 3.
   Vergleiche die Ergebnisse mit den gezählten Anordnungen der Variablen a und b.
   Was fällt dir auf?

3. In der *Aufgabe 1* hast du auch untersucht, auf wie viele Arten die zwei Variablen a und b auf vier leeren Plätzen angeordnet werden können.

   Gib die auftretenden Möglichkeiten und die Anzahl ihres Auftretens an!

   Berechne analog zur *Aufgabe 3* die Liste der Binomialkoeffizienten für n = 4.
   Vergleiche die Ergebnisse mit den gezählten Anordnungen der Variablen a und b.
   Was fällt dir auf?

4. Formuliere eine allgemeine Vorschrift, mit der du berechnen kannst, auf wie viele Arten k Variablen auf n leeren Plätzen angeordnet werden können!