Themenbereich	
Mathematik und Sport	
Inhalte	**Ziele**
▹ Anwendungsorientierte Schularbeitsbeispiele für die Oberstufe ▹ Anwendungsorientierte Maturabeispiele ▹ Modellbilden aus dem Bereich des Sports	▹ Anregungen zur Erstellung eigener Beispiele aus verschiedenen Themenbereichen ▹ Schüler durch realitätsnahe Aufgabenstellungen zu motivieren ▹ Darstellendes-Interpretierendes Arbeiten ▹ Heuristisches und experimentelles Arbeiten ▹ Kritisch-argumentatives Arbeiten ▹ Vernetzung verschiedenster mathematischer Teilgebiete
Hilfsmittel: TI-92, DERIVE	

Schularbeits- und Maturabeispiele

aus dem Bereich des Sports

Diese Sammlung enthält Beispiele, die irgendeinen Bezug zu Sport und Freizeit haben. Sie wurden von mir in meiner bisher 18-jährigen Unterrichtstätigkeit am BG Amstetten bei Schularbeiten und Reifeprüfungen im Fach Mathematik gestellt. Die Gliederung erfolgt nach Klassen beginnend mit der 5. bis zur 8., dann folgen Maturaaufgaben, sowohl schriftliche als auch mündliche, wobei zu beachten ist, dass bei den mündlichen die Angabe nur als Grundlage dient, die anschließenden Fragen, die sich beim Prüfungsgespräch ergeben, sind nicht angeführt.
Im abschließenden Kapitel habe ich allgemein zu meinen Vorstellungen über fachübergreifende Beispiele von Mathematik auf Sport Stellung genommen, einige Beispiele genauer ausgeführt bzw. auch einen Weg zu beschreiben versucht, wie ich auf die Beispiele komme, welche Ideen ihnen zu Grunde liegen und wie ich im speziellen eine Angabe daraus konstruiere. Sie sollen nur als Anregung dienen, ich wäre auch über Rückmeldungen bzw. weiter Ideen dankbar.

Mag. Anton Spiegl
BG Amstetten
November 1998

5. Klasse:

1) Die Kosten bei der Produktion von Tennisbällen steigen linear mit der Anzahl der produzierten Bälle. 1000 Bälle kosten öS 7000.-, 5000 kosten 15000.-.

a) Berechne fixe und variable Kosten durch Lösen von 2 Gleichungen mit den Unbekannten k (variable) und d (fixe Kosten) mit dem TI92. Schreibe die Eingaben und Ausgaben im HOME-Fenster genau ab.
b) Die Erlösfunktion für x verkaufte Bälle ist zusammengesetzt aus $E_1(x) = 7500$ (für weniger als 3000 Bälle) und $E_2(x) = 10x - 25000$ (ab 3000 Bälle). Berechne den Schnittpunkt von $E_1(x)$ und $K(x)$ mit dem TI92 und kommentiere diesen auf deutsch.
c) Fertige eine Zeichnung der Kosten- und der Erlösfunktion mit Hilfe des TI92 an. Gib die Eingaben im HOME-, Y- und WINDOW-Fenster an. Zeichne das GRAPHIK-Fenster ab.
d) Lies aus der Zeichnung den Schnittpunkt von $K(x)$ und $E_2(x)$ ab und kommentiere die x-Werte zwischen den beiden Schnittpunkten auf deutsch.

---

2) Die Mobilkom-Austria bietet 3 Handy-Tarife an. Die Grundgebühren betragen bei den 3 Tarifen 180, 270 bzw. 510 S pro Monat, die Tagesgesprächsgebühr/Minute 7,90; 7,90 bzw. 5,20 S und die Nachtgesprächsgebühr/Minute 4,20; 2,90 bzw. 2,90 S. Der Grundgebührenvektor sei G, der Tagesgesprächsgebührenvektor T und der Nachtgesprächsgebührenvektor N.

a) Gib eine Formel für die Kosten für ein Monat bei je 3 Stunden Tages- und Nachtgesprächen an.
b) Speichere die Vektoren im TI92 ab und berechne den Kostenvektor von a). Schreibe Ein- und Ausgabezeilen ab.
c) Berechne die Kosten für eine Preissteigerung der Grundgebühren um 5% und bei einer Verbilligung der Tagesgesprächsgebühr von 0,20 S bei jedem Tarif bei gleichen Gesprächszeiten.

---

3) Bei einem Radrennen über 150 km haben die B-Fahrer (Durchschnittsgeschwindigkeit: 36 km/h) eine Zeitvorgabe von 10 min gegenüber den A-Fahrern (40 km/h).

a) Gib Terme an für die Funktionen A: $t \rightarrow s_A(t)$ sowie B: $t \rightarrow s_B(t)$. (Wähle für den Start der A-Fahrer den Zeitpunkt $t = 0$.)
b) Wann und wo werden die B-Fahrer eingeholt?
c) Wieviel Zeitvorsprung hat der Sieger, der 10 km vor dem Ziel aus der Gruppe der A-Fahrer ausreißt und mit 50 km/h weiter bis ins Ziel fährt?

---

4) 3 Freunde wetten, wer eine Strecke von 100 km schneller mit dem Rad zurücklegen kann. Jeder überlegt sich seine eigene Taktik: Fritz möchte konstant mit 20 km/h fahren. Alois möchte 25 km/h fahren und nach jeder Stunde eine 15-minütige Pause machen. Sepp möchte langsam beginnen und immer schneller werden. Die ersten 20 km wird er mit 15 km/h, die nächsten 30 km mit 20 km/h und die letzten 50 km gar mit 30 km/h fahren.
Fertige eine Zeichnung mit allen 3 Zeit-Ort-Funktionen an (Einheit: 1 h ≙ 3 cm, 10 km ≙ 1 cm) und beantworte folgende Fragen aus der Zeichnung:

a) Wer gewinnt und wann erreicht jeder das Ziel?
b) Wer trifft wen wann und wo?

6. Klasse:

1) Fritz hat mit der Schulmannschaft im Volleyball den Landesmeistertitel gewonnen. Er möchte dieses außergewöhnliche Ereignis möglichst schnell allen Bewohnern seiner Heimatstadt (25000) mitteilen. Nach einer Stunde wissen es alle Anwesenden in der Schule (600), nach 3 Stunden wissen es bereits 2000.

a) Wann wissen es alle, wenn sich die Neuigkeit exponentiell ausbreitet?
b) Berechne die Anzahl der Wissenden nach 8 Stunden, wenn man 7 Stunden lang exponentielles Wachstum annimmt, ab der 8. Stunde aber begrenztes Wachstum. Nur mehr 70% der Nicht-Wissenden sollen informiert werden. (Rechne das gesamte Beispiel mit DERIVE unter Verwendung von Kommentaren und Antworten.**)**

---

2) Der Direktor einer Schule vereinbart mit seinem Brandschutzexperten einen geheimen Feueralarm. Über diesen Alarm werden weiters die 3 Schulwarte sowie eine Bedienerin informiert. Nach einer Stunde wissen insgesamt 14 Leute in der Schule von diesem Alarm.

a) Wieviele wissen davon nach 5 Stunden unter der Annahme einer exponentiellen Ausbreitung dieser Botschaft?
b) Berechne die stündliche sowie die augenblickliche prozentuelle Ausbreitungsrate.
c) Ab der 6. Stunde erfahren nur mehr 60% der Nicht-Informierten von dem Alarm. Berechne die weitere Ausbreitung bis zur 10. Stunde, wenn 800 Leute (Lehrer, Schüler und Bedienstete) an der Schule beschäftigt sind..
BONUS) Wenn Du diese Berechnung mittels einer LOTUS-Tabelle durchführen kannst unter genauer Angabe der Formeln, bekommst Du 2 Zusatzpunkte.
d) Fertige *eine* Zeichnung von beiden Kurven an.
BONUS) Die Ausbreitung erfolgt exponentiell wie bei a), allerdings vergessen 3 Leute pro Stunde wieder, daß dieser Feueralarm stattfindet. Wenn Du eine Formel für die Anzahl der Informierten nach n Stunden erstellen kannst, erhältst Du 3 Zusatzpunkte.

---

7. Klasse:

1) Eine Turnerin wirft bei einer Übung in der rhythmischen Sportgymnastik einen Ball senkrecht nach oben. Die Höhe des Balles ist durch die Formel $h(t) = 1 + 20t - 4{,}9t^2$ (h in m, t in sec) gegeben.

a) Wann kommt der Ball am Boden auf?
b) Berechne die mittlere Geschwindigkeit in den ersten 2 Sekunden.
c) Berechne die Geschwindigkeit des Balles nach 2 Sekunden mit Hilfe des Grenzwertes der mittleren Änderungsrate.
Führe a) - c) mit DERIVE durch, fertige eine Skizze (ohne DERIVE) an und zeichne die Ergebnisse von a) - c) ein.

2) Zeichne zu folgenden Bewegungen passende Graphen:

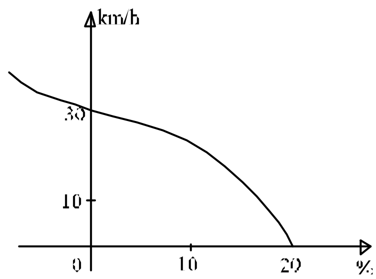
a) Ein Volleyball wird beim Smash aus 3m Höhe zu Boden geschlagen, springt 5m hoch, fällt wieder zu Boden, springt 2 m hoch und wird dann gefangen.
b) Ein Auto rollt auf eine Kreuzung zu und wird dabei langsamer, prallt wegen Glatteis mit geringer Geschwindigkeit gegen die Stoßstange des vor ihm stehenden Autos, schiebt einige Meter zurück und fährt dann mit steigender Geschwindigkeit über die Kreuzung.

3) Beim Volleyballservice trifft Philipp mit der Wahrscheinlichkeit 0,6 ins gegnerische Feld, Mario mit 0,7.
Berechne die Wahrscheinlichkeit, daß
a) beide bei je einem Versuch nicht treffen,
b) bei je einem Versuch genau ein Spieler trifft,
c) Philipp bei 5 Versuchen den ersten Fehler erst beim 5. Service macht.

4) Eure Klasse mit 30 Schüler(inne)n (18 weibliche und 12 männliche) hat beim Schulsportfest in einem Mannschaftsbewerb 2 Karten vom Finale der Fußballweltmeisterschaft in Frankreich gewonnen. Da alle Schüler(innen) fahren wollen, beschließt die Klasse, die beiden, die zur WM fahren sollen, per Los zu bestimmen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, daß
a) gerade Du zur WM fährst,
b) 2 Schülerinnen fahren dürfen,
c) ein Paar (weiblich/männlich) die Eintrittskarten gewinnt.

5) Die Geschwindigkeit v(t) (in km/h) eines Radfahrers bei einer bestimmten Steigung s (in %) sei ungefähr durch die nebenstehende Kurve dargestellt. Beantworte folgende Fragen:

a) Bei welcher Steigung muß er absitzen (v = 0)?
b) Wie schnell fährt er bei 10% Steigung?
c) Was kann man über die Steigung links von der v-Achse aussagen?
d) Wie groß ist die mittlere Änderungsrate in [10;20]? Gib eine passende Bezeichnung sowie eine sinnvolle Einheit an.
e) Wie groß ist v'(10) und welche Bedeutung hat sie?
f) Wo nimmt die Geschwindigkeit schneller ab, bei 0 % oder bei 20 % Steigung?



6) Die Zeit-Ort-Funktion eines 100m Läufers ist eine Polynomfunktion dritten Grades. Zum Zeitpunkt 0 sind Weg und Geschwindigkeit o, die Beschleunigung ist 3 m/s^2. Bei 8 s ist die Beschleunigung 0.

a) Gib eine Termdarstellung dieser Funktion s(t) an (t in Sekunden, s in Meter).
b) Die Laufzeit des Athleten für 100m liegt zwischen 11 und 11,5 s. Berechne sie auf Zehntelsekunden genau.
c) Berechne seine mittlere Geschwindigkeit.

7) Die Geschwindigkeit eines mittelmäßigen Sprinters (100 m) setzt sich aus 3 verschiedenen Phasen zusammen: Vom Start bis ca. 7 s nimmt sie zu, von 7 s - 10 s ist sie konstant und von 10 s bis ins Ziel nimmt sie etwas ab.

Skizziere einen möglichen Verlauf der Graphen von v(t) und s(t) in *eine* Zeichnung und beschreibe den Zusammenhang von Beschleunigung, Geschwindigkeit und Weg in den 3 Phasen.

8) Beim Speerwurf beschreibt der Speer ungefähr eine quadratische Funktion („Wurfparabel") h(x), wobei h die Höhe des Speeres über dem Boden nach x Metern waagrechter Entfernung vom Abwurfpunkt ist. Der Speer verläßt die Hand des Athleten in 2 Meter Höhe unter einem Abwurfwinkel von 45° und erreicht nach 34 Metern seinen höchsten Punkt.

a) Gib den Term der Funktion h(x) an.
b) Nach wieviel Metern und unter welchem Winkel kommt der Speer am Boden auf?

9) Eine Fußballmannschaft hat 2 Elfmeterschützen A und B, deren Trefferstatistik aus den letzten 5 Jahren, abhängig vom jeweiligen Spielstand, in untenstehender Tabelle gegeben ist.
(R . . . die eigene Mannschaft ist in Rückstand, F . . . Führung, U . . . unentschiedener Spielstand, + . . . Elfmeter verwertet, - . . . vergeben).

a) Welcher Spielstand begünstigt welchen Schützen?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit verwertet A von 3 Elfern genau 2 beim Spielstand von 0 : 1?
c) . . . vergibt A von 4 Elfern genau 2 (unabhängig vom Spielstand)?
d) . . . verwertet A von 4 Elfern mindestens 2?

	R		U		F	
	+	-	+	-	+	-
A	8	0	6	1	9	3
B	6	2	7	1	5	1

8. Klasse:

1) Trifft im Tennis ein Spieler beim Service nicht im 1. Versuch ins Aufschlagfeld, so hat er einen 2. Versuch, trifft er wieder nicht, so begeht er einen Doppelfehler. die Treffersstatistik der Aufschläge vom Finale in der Wiener Stadthalle Muster gegen Skoff ist in folgender Tabelle gegeben:

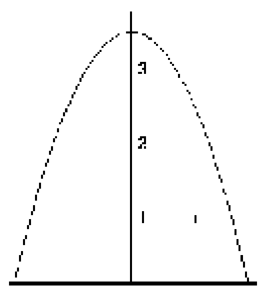
Aufschlag	1	2
Muster	71 %	95 %
Skoff	65 %	98 %

a) Die Aufschlagleistung der beiden soll nicht wie üblich nach Assen und Doppelfehlern beurteilt werden, sondern nach folgenden Kriterien: Trifft ein Spieler beim 1. Aufschlag, erhält er 3 Punkte, trifft er beim 2., erhält er 2. Welcher Spieler war in diesem Match der nach diesen Kriterien bessere Aufschläger (Hinweis: Berechne den Erwartungswert der erreichten Punkte für jeden Spieler auf 1. Dez. genau.).
b) Wer von beiden Spielern machte eher einen Doppelfehler? (Hinweis: Berechne die Wahrscheinlichkeit eines Doppelfehlers für beide Spieler).
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit traf Skoff bei 10 ersten Aufschlägen mindestens 8 mal?

2) Ein Computer wird mit verschiedenen Daten von 2 Volleyballmannschaften gefüttert (Umfang und Qualität des Kaders, Größe und Wert der Einzelspieler, Heimvorteil, etc. . .). Er berechnet daraus die Wahrscheinlichkeit, daß die Mannschaft A gegen die Mannschaft B einen Satz gewinnt, mit 44,8 %. Das gesamte Spiel gewinnt jene Mannschaft, die zuerst 3 Sätze gewonnen hat.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt A das Spiel?
b) Ein Wettbüro bietet folgende Wette an: Für einen Einsatz von 200.- erhält man 800.-, wenn A das Match in 3 Sätzen gewinnt und 500.-, wenn A überhaupt gewinnt. Welcher Gewinn ist für den Kunden zu erwarten?

3) Eine Straßendurchfahrt durch eine Stadtmauer hat nebenstehende Form. die Querschnittsflächen sind Rechtecke mit der konstanten Länge 5 m (= Dicke der Stadtmauer), die Breite der Rechtecke nach oben hin nimmt mit der Formel b(x) $= \frac{4x - 14}{x - 4}$ ab, wobei x die Höhe der jeweiligen Querschnittsfläche in Meter vom Boden aus ist ($0 \leq x \leq 3{,}5$).



a) Berechne das Mauerwerk (in m^3), das notwendig wäre, um diese Durchfahrt zuzumauern.
b) Gib eine Formel für eine näherungsweise Berechnung mittels Ober- und Untersumme bei einer Zerlegung in n Teilintervalle an und berechne sie für = 10.
c) Zeichne die Funktion b(x) in eine Koordinatensystem, berechne die Asymptoten und schreibe dem Flächneinstück zwischen y-Achse, waagrechter Asymptote und rechtem Kurvenast ein umfangminimales Rechteck ein. Fertige davon eine Zeichnung an. Führe das gesamte Beispiel mit DERIVE aus.

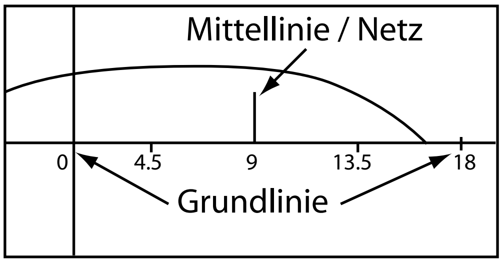
4) Eine Ortsdurchfahrt stößt auf 3 Kreuzungen, von denen jede durch eine Ampel geregelt ist. Die 3 Ampeln sind nicht aufeinanderabgestimmt. Die erste Ampel ist 45 sec grün und 15 sec rot, die zweite ist 40 sec grün und 20 sec rot, die dritte ist 30 sec grün und 30 sec rot. (Die Gelbphase wurde zu rot dazugerechnet.)

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit muß ein Autofahrer, der durch diesen Ort fährt, (1) gar nie, (2) genau einmal stehenbleiben? (Hinweis: Er darf nur bei grün fahren.)
b) Er fährt im Jahr ca. 500 mal durch diesen Ort. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann er (1) öfter als 100 mal (2) zwischen 120 und 150 mal ohne Anhalten durchfahren? Führe die Rechnung von (2) auf 2 Arten (Normal- und Binomialverteilung) jeweils mit DERIVE durch und vergleiche die Ergebnisse.
c) Herr Einfalt muß auf seinem Weg zur Arbeit durch diesen Ort fahren. Er kommt häufig zu spät und erzählt seinem Chef, Herrn Weise, jedesmal, daß die Ampeln sooft auf rot stünden. Herr Weise glaubt ihm nicht und macht ihm folgendes Angebot, um ihn zu testen:"Haben Sie schon bei der ersten Ampel rot, können sie gleich wieder heimfahren; ich rechne Ihnen den Arbeitstag (8 h) trotzdem voll an. Haben Sie bei der zweiten und dritten Ampel rot, dürfen Sie 2 Stunden später, haben Sie bei einer von den beiden rot, dürfen sie 1 Stunde später beginnen. Der Tag wird in beiden Fällen wieder voll gerechnet. Haben Sie aber dreimal grün, müssen Sie rund um die Uhr (24 h) arbeiten. Dieses Angebot ist für Sie doch großartig, wenn Sie sooft rot haben, oder...?" Herr Einfalt nimmt begeistert an. Was hättest Du getan? (Hinweis: Berechne den Erwartungswert für die Länge eines Arbeitstages von Herrn Einfalt und interpretiere ihn)

Schriftliche Matura:

1) Gegeben ist die Funktion f(x) = $\frac{x+a}{b}\cdot\sqrt{(x-c)(d-x)}+e$

a) Berechne b und d, wenn a = c = e = 0 und wenn der Graph durch die Punkte P(5/0) und Q(1/$\frac{2}{5}$) geht. Gib den Definitionsbereich, den Hochpunkt (o. DERIVE) und den Wendepunkt an.
b) Für eine geeignete Wahl der Koeffizienten a bis e bewegt sich ein Volleyball beim Service ungefähr nach dieser Kurve. Sei a = 32, b = 100, c = 18, d = -32 und e = -5. Lege das Volleyballfeld so ins Koordinatensystem, daß der Boden die x-Achse darstellt, daß die Grundlinie des Aufschlägers beim Nullpunkt, die Mittellinie bei (9/0) und die gegnerische Grundlinie bei (18/0) ist (siehe Skizze).



Wie hoch fliegt der Ball über das Netz? (Hinweis: Netzhöhe = 2,43 m)

Wie weit vor der gegnerischen Grundlinie und unter welchem Winkel würde der Ball am Boden auftreffen?

Wie weit vor der eigenen Grundlinie muß der Spieler den Ball treffen, wenn seine Reichhöhe 2,20 m beträgt?

2) **Die Füße eines Weitspringers beschreiben während der Flugphase eine Kurve der Form f(x) =** $\frac{1}{5}x\sqrt{b-x}$ **(x . . . waagrechte Entfernung vom Absprung, f(x) . . . Flughöhe).**

a) Gib den Term der Kurve für einen Athleten an, dessen Sprungweite 6 m beträgt.
b)Gib einen mathematischen sowie einen sinnvollen Definitionsbereich an und begründe diesen.
c)Wo erreicht der Athlet den höchsten Punkt und wie hoch ist dieser? Zeige weiters, daß die Sprungkurve vorher steigt und nachher abfällt.
d)Berechne den Absprungwinkel.
e)Von Untersuchungen solcher Sprungkurven weiß man, daß für eine maximale Sprungweite nicht die größte Höhe der Sprungkurve entscheidend ist sondern ein Punkt vorher, der sich aus dem Produkt der Höhe dieses Punktes vom Boden und der waagrechten Entfernung dieses Punktes vom Aufsprung (= 6m) ergibt. Dieses Produkt soll maximal werden. Wie weit vom Absprung entfernt und wie hoch muß man eine Schnur spannen, um diesen Punkt zu kennzeichnen? (**Hinweis**: Schreibe der Fläche zwischen Kurve und x-Achse das flächengrößte rechtwinklige Dreieck ein, wobei der gesuchte Punkt auf der Kurve liegt, ein zweiter Eckpunkt im Aufsprung und eine Kathete auf der x-Achse.) Begründe, warum der gesuchte Punkt nicht weiter vom Absprung entfernt sein kann als der Hochpunkt der Kurve.

3) Eine Aufschlagstatistik bei einem Tennismatch von Thomas Muster schaut auszugsweise folgendermaßen aus:

Asse: 5 %
1. Aufschlag: 62 %

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit machte Thomas Muster in diesem Match einen Doppelfehler? (Erklärung: Er traf weder den 1. noch den 2. Aufschlag ins Feld).
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit traf Muster von 10 ersten Aufschlägen mindestens 6 ins Feld?
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit traf Muster von 100 ersten Aufschlägen zwischen 60 und 80 ins Feld? Führe die Berechnung sowohl mit Normalverteilung als auch mit Binomialverteilung durch, indem Du eine allgemeine Summenformel mit n, p, u, v angibst und dann die notwendigen Werte definierst (mit DERIVE).
d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Muster in diesem Match sein eigenes Aufschlaggame bei höchstens einem Gegenpunkt? (Erklärung: Ein Spiel ist gewonnen, wenn man zuerst 4 Punkte macht)
e) Die Zufallsvariable A sei die Anzahl der notwendigen Aufschläge, bis ihm ein As gelingt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist A höchstens 10? Berechne E(A) durch eine Grenzwertberechnung mit DERIVE. Finde eine praktische Erklärung für diesen Wert.

4) Ein Radfahrer fährt auf ebener Straße mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 40 km/h. Nimmt die Steigung zu, so fällt seine Durchschnittsgeschwindigkeit exponentiell ab. Bei einer Steigung von 10 % kann er nur mehr 20 km/h fahren.

a) Gib eine Formel an, die jeder Steigung x eine Durchschnittsgeschwindigkeit v(x) zuordnet.
b) Gib einen sinnvollen Definitionsbereich an und zeichne die Kurve in diesem Bereich.
c) Welche Bedeutung haben negative x-Werte und deren zugehörige Funktionswerte? Beschreibe den Verlauf der Kurve für sehr große x-Werte und übersetze dies in die Praxis.
d) Berechne die mittlere Änderungsrate zwischen 10 % und 20 % sowie die Änderungsrate bei 10 %. Vergleiche beide Werte aus der Sicht der Praxis und bezeichne sie sinnvoll.

5) Der Besitzer eines Motocrossgeländes möchte einen Beobachtungspunkt (P) so einrichten, daß er 3 markante Geländepunkte A, B, C gut einsehen kann. Die Lage der Punkte ist bekannt: A(0/0), B(180/0), AC = 120, $\triangle$(BAC) = 55°. (Maße in m).

a) Der Beobachtungspunkt soll auf der Strecke AB dort errichtet werden, wo die Entfernung zu C am geringsten ist. Berechne die Summe der Abstände von H zu A, B und C.
b) Unter welchem Blickwinkel sieht er von der Spitze des 20 m über dem Boden liegenden Beobachtungspunkt aus die Strecke BC?

c) Genau nördlich von A möchte er einen zweiten Beobachtungspunkt einrichten. Wie weit muß dieser Punkt P genau nördlich von A liegen, damit die Summe der Entfernungen dieses Punktes von B und C (PB + PC) minimal wird? Löse die Gleichung mittels Näherungsverfahrens mit Hilfe des Befehls „MAN SUB“.

6) Der Weg eines Fußballes bei einem Freistoß wird ungefähr durch eine Polynomfunktion 3. Grades beschrieben: x ➜ h(x), wobei x die waagrechte Entfernung des Balles vom Ausgangspunkt in m, h(x) die Höhe des Balles in m ist. Nach 12 m hat der Ball die maximale Höhe von 3 m erreicht, bei 0 m hat er die Höhe 0 und seinen Tiefpunkt (Ausgangspunkt).

a) Ermittle den Term der Funktion h(x) und zeichne den Graphen in [0;18].
b) Wie hoch dürfte eine aus Spielern gebildete „Mauer“ sein, die 9 m vom Ausgangspunkt des Balles entfernt steht, damit der Ball gerade noch darübergeht?
c) Der Ball senkt sich in einer Höhe von 2 m ins Tor. Wie weit war der Freistoß vom Tor entfernt?
d) Wo und unter welchem Winkel würde der Ball wieder am Boden aufkommen (wenn er nicht ins Tor ginge)?
e) Beweise die Monotonie dieser Kurve in [0;18].

7) Die Route eines Geländelaufes führt von A nach B zu C und wieder zurück zu A. Auf einer Skizze sind die Cartesischen Koordinaten der 3 Orte in km eingetragen: A(0/0), B(4,7/-0,9), C(2,1/3,6). A, B und C liegen in einer Horizontalebene.

a) Berechne die Länge der Route und die Winkel, die die Wege in den einzelnen Punkten miteinander einschließen.
b) Für eine kleine Gruppe von Wettkampfläufern wird die Runde ausgedehnt und zwar von B genau nach Norden (in Richtung positiver y-Achse) zu D und dann erst weiter zu C, wobei aus der Skizze die Länge von CD = 2,8 km zu entnehmen ist. Berechne den kürzeren Weg von B nach D.
c) In Wirklichkeit liegt D um 250 m höher als die Ebene ABC. Berechne die tatsächliche Weglänge ABDCA.
d) Berechne die durchschnittliche Steigung des Weges von B nach D in %.

8) In der österreichischen Eishockeyliga 1990/91 lautet das Finale KAC gegen VSV. Aufgrund der bisherigen Spiele gegeneinander beträgt die Wahrscheinlichkeit, daß der VSV ein Spiel gewinnt, 60 %.

a) Das Finale wird auf „best of five“ gespielt, d.h. Sieger ist jene Mannschaft, die zuerst 3 Partien gewonnen hat; jede Partie wird bis zur Entscheidung gespielt, es gibt kein Unentschieden).
(1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt der VSV das Finale?
(2) Beim Wettbüro wird folgende Wette angeboten: Für einen Einsatz von 50 S erhält man 100 S,

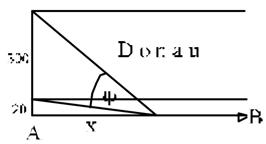
wenn KAC Meister wird und sogar 300 S, wenn KAC gleich die ersten 3 Partien gewinnt. Berechne den Erwartungswert für den Gewinn des Wettbüros.
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit würde der VSV von 10 Spielen mindestens 7 gewinnen?
c) Beide Mannschaften tragen 100 Spiele gegeneinander aus.
(1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt der VSV davon mehr als die Hälfte?
(2) In welchem symmetrischen Bereich vom Erwartungswert liegen die vom VSV gewonnen Spiele mit 95 %-iger Wahrscheinlichkeit?

9) Ein Tennisball beschreibt beim Topspinlob ungefähr eine Kurve der Form y = $ax\sqrt{b-x^2}$, wobei x die waagrechte Entfernung des Balles in Meter von 0, y die Höhe des Balles nach x Meter ist. Der Ball hat nach 15 m und nach 20 m jeweils eine Höhe von 3 m.

a) Berechne a, b und zeichne die Kurve.
b) Weise nach, in welchem Bereich der Ball steigt bzw. fällt.
c) In der Praxis beginnt der Ball nicht vom Boden wegzufliegen, sondern dort, wo er vom Schläger getroffen wird. angenommen, der Spieler, der den Ball spielt, steht auf der Grundlinie und trifft den Ball in einer Höhe von 50 cm, d.h. die Grundlinie des Tennisplatzes ist daher nicht beim Nullpunkt, sondern dort, wo die Flugbahn des Balles eine Höhe von 50 cm erreicht. Wieviel m vor der gegnerischen Grundlinie kommt der Ball wieder am Boden auf, wenn man die Länge des Tennisfeldes mit 23,8 m annimmt?
d) Unter welchem Winkel zur Waagrechten steigt bzw. fällt der Ball in einer Höhe von 3 m?

10) Ein Radfahrer fährt am diesseitigen Donauradweg von Ardagger nach Ybbs genau in West - Ost - Richtung und sieht von einem Punkt A aus am gegenüberliegenden Ufer die Burg Grein in Richtung O 75° N unter einem Höhenwinkel von 3°. 1 min später sieht er vom Punkt B aus die Burg Grein in Richtung W 70° N. Weitere 5 min später erreicht er einen Punkt C. Die Geschwindigkeit des Radfahrers zwischen A und B ist konstant 9 m/s, zwischen B und C steigt sie nach der Formel v(t) = $-\frac{t^3}{13500000}+\frac{7t^2}{150000}-\frac{3t}{625}+\frac{1142}{125}$ in m/s.

(Beachte: Im Punkt B ist t = 60 sec.)
a) Berechne die Entfernungen zwischen A, B und C. Zeige mathematisch, daß sich die Geschwindigkeit in B nicht "plötzlich" ändert.
b) Um wieviel m liegt die Burg Grein höher als der Donauradweg? (Nimm an, daß die Punkte A, B und C auf einer horizontalen Geraden liegen.)
c) In welcher Richtung sieht der Radfahrer die Burg Grein im Punkt C?
d) Im Punkt A führt eine Brücke normal zum Radweg über die Donau. Sie beginnt 20 m von A entfernt (Donauufer) und ist 300 m lang (siehe Skizze). In welcher Entfernung von A sieht der Radfahrer diese Brücke unter einem optimalen (= maximalen) Blickwinkel. (Nimm an, daß die Donaubrücke in



derselben Horizontalebene liegt wie der Radweg.)
BONUS) Führe einen Maximumnachweis durch und diskutiere alle Lösungen sowie die Randstellen. *(2 Zusatzpunkte)*

Mündliche Matura:

1) Um bei Schirennen das optimale Material für bestimmte Schneebedingungen zu finden, werden sogenannte Gleittests durchgeführt. Der Testfahrer gleitet auf einer gleichmäßig abfallenden Strecke mit einer Geschwindigkeit $v(t) = \frac{30t^2}{t^2 + 30}$ (t in s, v in m/s).

a) Berechne die Beschleunigung nach 5 s.
b) Berechne den Weg, den er in den Zeitintervallen [0;10] bzw. [10;20] zurücklegt, mittels Ober- und Untersumme durch Zerlegung in 5 gleich große Teilintervalle und überprüfe die Ergebnisse durch eine Berechnung mit DERIVE. Vergleiche die Werte der beiden Intervalle und begründe deren Gleich- bzw. Ungleichheit.
c) Diskutiere den mathematischen Zusammenhang von Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung.

2) Der Aufschläger in einem Tennismatch trifft beim 1. Service mit p = 0,6, beim zweiten mit p = 0,9. Die Zufallsvariable X sei die anzahl der notwendigen zweiten Aufschläge (notwendig . . . wenn er im 1. Aufschlag nicht getroffen hat).

a) Berechne den Erwartungswert von X in einem Game, das 5 Punkte dauert und erkläre an Hand eines praktischen Beispiels, welche Bedeutung er hat.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit für einen Doppelfehler.
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit „kommen" von 10 ersten Aufschlägen mindestens 3? Gehe in der Diskussion genauer auf die anzahl der Möglichkeiten ein.

3) 100 Kinder eines Jahrganges nehmen am Ausdauerbewerb „Verdopple Dein Alter" (jeder muß doppelt so lang laufen, wie er alt ist) teil. Das Ergebnis sei normalverteilt mit μ = 3,6 km und s = 0,5 km.

a) Wieviele Schüler laufen mehr als 4 km?
b) In welchem symmetrischen Bereich von μ liegen 70 Schüler?
c) Wie hoch muß das Limit angesetzt werden, damit es nur 10 Schüler schaffen? Gib eine Berechnungsmethode mit DERIVE an, mit der Du keine Tabellen brauchst.

4) Bei der Aufnahmsprüfung für das Turnstudium beträgt das Limit im Schwimmen 2 min für 100 m Freistil. Es treten 100 Studenten zu dieser Prüfung an, das Ergebnis sei normalverteilt mit μ = 1,9 min und σ = 0,3 min.

a) Wieviele Schüler schaffen die Aufnahmsprüfung?
b) In welchem symmetrischen Bereich von μ liegen 90 Schüler?
c) Wie muß das Limit angesetzt werden, wenn nur 40 Studenten aufgenommen werden können?

5) Ein Basketballspieler trifft beim Freiwurf mit der Wahrscheinlichkeit von 70 %.

a) Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der Würfe die er benötigt, um zweimal zu treffen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit benötigt er weniger als 6 Würfe? Gib eine Formel für die Wahrscheinlichkeit von n Würfen an.
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er bei 100 Versuchen zwischen 68 und 75 mal?

6) Jemand möchte eine Spielzeugautobahn bauen. Sie soll ellipsenförmig sein, durch den Punkt P(5dm/3dm) gehen und möglichst wenig Platz brauchen.
a) Berechne ihre Maße (Hauptscheitel A, b und Nebenscheitel C, D der Ellipse).
b) Da ihm nach einer gewissen Zeit das “nur im Kreis Fahren” zu einfach geht, plant er eine weitere Ausbaustufe: Vom Punkt C zum Punkt A soll sie nach einer Polynomfunktion 3. Grades verlaufen, die in C ohne Knick von der Ellipse übergeht, in A ohne Knick in einen Halbkreis, an dessen Ende eine Parallele zur x-Achse anschließt, die zum Punkt D führt. Jetzt möchte der Bauherr wissen, um wieviel mehr Platz er braucht als bei seiner ersten Bahn. Führe diese Berechnung durch.

Kommentar zu fachübergreifendem Unterricht Mathematik - Sport:

Wenn ich 2 verschiedene Fächer im Unterricht verbinde, so gehe ich von einem Fach A aus, wo eine Aufgabe gestellt wird und löse diese Aufgabe mit Hilfe des Faches B. Ich sehe immer ein Fach A als Ausgangspunkt für ein Problem, eine Aufgabenstellung, ein Fach B als Hilfsfach, das mir die Inhalte und Mittel zum Lösen der Aufgabe aus dem Fach A zur Verfügung stellt.

Wenn ich etwa im Fach Informatik ein Spiel programmieren möchte, das Fragen stellt, Antworten mit richtig und falsch beurteilt und dann eine Bewertung ausgibt, so stellt sich das Problem „Programmieren eines Frage- und Antwortspiels" in der Informatik und ich nehme mir etwa das Fach Geographie als Datenlieferer für meine Fragen. Ich könnte genauso mathe-matische Fragen, vielleicht gegliedert nach verschiedenen Klassen als Inhalte verwenden.

Umgekehrt könnte sich das Problem im Fach Geographie stellen, die Einwohnerzahlen aller Staaten der Erde statistisch auszuwerten, eine Reihung der Länder graphisch darzustellen und vielleicht noch einen Bezug zur Größe des Landes herzustellen, so kann die Informatik, im speziellen Fall ein Tabellenkalkulationsprogramm, eine große Hilfe sein, diese Aufgabe zu bewältigen.

Genauso verhält es sich mit den Fächern **Mathematik und Sport**, wobei in den meisten Fällen der Ausgangspunkt das Fach Mathematik ist, in dem ich passende und interessante Beispiele suche und als Inhalt das Fach Sport wähle, das mir die dazu passenden Daten liefert. Es kann aber auch umgekehrt sein, wenn etwa in der Turnstunde die Disziplin „Weitsprung" am Programm steht, wenn jeder Schüler eine bestimmte Weite gesprungen ist und dann von sehr vielen die Frage kommt, ist meine Leistung jetzt gut oder schlecht, wenn sie ihre Leistung vergleichen und nach objektiven Kriterien werten wollen. Dann könnte sich die logische Aufgabe ergeben, aus allen Leistungen den Mittelwert zu berechnen, diesen mit der eigenen Leistung zu vergleichen und vielleicht noch zu berechnen, um wie viel Prozent die persönliche Weite über bzw.. unter dem Mittelwert liegt. Hier liegt die Problemstellung im Sport und als Hilfsfach wird die Mathematik verwendet.

Ich möchte mich aber bei meinen weiteren Ausführungen auf die **Mathematik** beschränken, die als Datenlieferer den Sport verwendet. Mir ist dabei in den letzten Jahren aufgefallen, dass für die Mehrzahl der Schüler einer Klasse, sicher nicht für alle, der sportliche Faktor in einem Beispiel, und sei er noch so trivial, motivierend wirkt, noch dazu, wenn ein Bezug zu einem wirklichen Ereignis hergestellt wird.

Ein einfaches Beispiel: Ich habe öfters das Glück, die gleichen Schülerinnen und Schüler in Mathematik und im Freifach Volleyball zu unterrichten. Hier bietet sich an, in der Wahrscheinlichkeit Berechnungen anstellen zu lassen, wie sicher das nächste Turnier gewonnen wird, welcher Schüler ein wirkungsvolleres Service hat oder wie groß die Chance ist, ein Match auf 3, 4 oder 5 Sätze zu gewinnen. Es ist dabei die Möglichkeit gegeben, dass Schüler, die mit der Materie Volleyball gut vertraut sind, dabei einen Vorteil haben, weil sie sich davon bessere Vorstellungen machen können. Es ist daher wichtig, Fachausdrücke genau zu erklären bzw. wenn möglich nicht zu verwenden. Es müssen die Voraussetzungen für alle Schüler die gleichen sein. Ein typisches Beispiel dafür ist etwa der Begriff „Zweiter Aufschlag" beim Tennis, der einem Tennisspieler völlig geläufig ist, wo einem Tennislaien aber nicht klar ist, dass dieser nur unter der Voraussetzung, dass der erste Aufschlag nicht getroffen wird, eintritt.

Beim Thema **Wahrscheinlichkeit** bieten sich die verschiedensten Bereiche des Sports an, aus denen man statistische Daten als Grundlage für vielseitige Berechnungen verwenden kann. Ob es die Anzahl der Treffer von einigen Schülern beim Servicetraining in der letzten Volleyballeinheit ist oder eine Statistik von einem Tennisfinale, wo es um die Aufschlagsicherheit der einzelnen Spieler geht oder eine langjährige Beobachtung über verschossene bzw. verwandelte Elfmeter von bekannten Fußballgrößen, je mehr persönlichen Bezug je mehr Schüler einer Klasse haben, sei es durch persönliches Erleben oder durch passives Beobachten im Fernsehen oder auch in der Turnstunde, desto motivierender ist dieser für sie die Bewältigung des mathematischen Problems. Wenn dann auch noch die Zeit und Gelegenheit ist, die Rechenergebnisse in der Praxis auszuprobieren, wäre das natürlich ein Idealfall.

Ein Beispiel: Durch längere Beobachtung ist bekannt, dass der Spieler A bei jedem 3., der Schüler B bei jedem 4. Volleyballservice einen Fehler macht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide zusammen in einem Match, in dem sie eine bestimmte Anzahl von Servicechancen haben, keinen Servicefehler machen? Ein Ergebnis von angenommen 10 % würde heißen, dass dieses Ereignis in den nächsten 10 Spielen einmal eintreten müsste.

Ein weiteres Thema ist die **Differentialrechnung**, für das der Bereich Sport viele Daten und Grundlagen liefert. Es wird hier vor allem das Lehrziel „Interpretation und Diskussion von Ergebnissen" sehr deutlich angesprochen, etwa bei der Diskussion von Kurvenverläufen.

Ich möchte hier das Beispiel 9) aus dem Kapitel Schriftliche Matura, den „**Topspinlob**" etwas genauer erläutern.
Mein Ausgangspunkt ist, dass ich ein Beispiel für eine Untersuchung einer Wurzelfunktion suche, bei dem der Schüler die Kurve selber aufsuchen soll. Es soll sich aber um eine Kurve handeln, die irgendeinen praktischen Verlauf darstellt. Als Tennisspieler weiß ich, dass beim Topspinlob der Ball eine flachere Kurve beim Aufsteigen, eine steilere beim Herunterfallen beschreibt. Dieser Verlauf passt genau zur Wurzelfunktion, die auch nicht symmetrisch verläuft, sondern wo der Hochpunkt nicht

zwischen den beiden Nullstellen liegt. Ich nehme die Musterfunktion $f(x)= ax\sqrt{b-x^2}$, die durch den Nullpunkt geht, irgendwo zwischen 0 und b einen Hochpunkt und bei b wieder eine Nullstelle hat, ändere durch Probieren die Koeffizienten a und b so ab, dass die Horizontalebene des Tennisplatzes mit der x-Achse zusammenfällt und die Kurve etwa in die Länge eines Tennisfeldes hineinpasst. Weiters soll der höchste Punkt nicht im eigenen Feld, sondern im gegnerischen dort liegen, wo der gegnerische Spieler, der nach einem Angriff in der Nähe des Netzes steht, sich befindet und er soll über der möglichen Reichweite, wenn man den Tennisschläger sowie eine kleine Sprunghöhe dazurechnet, also auf jeden Fall über 3 Meter liegen. Mit einigen dieser Bedingungen versuche ich dann, halbwegs brauchbare Zahlen für a und b zu bekommen.

Ganz ähnlich sind die Kurven für den **Freistoß beim Fußball**, für den **Weitspringer** sowie für das **Volleyballservice** entstanden. Auch das Trigonometriebeispiel, das erst angegangen werden kann, wenn man aus der Geschwindigkeitsfunktion den Weg berechnen konnte, hat als sportlichen Hintergrund, dass durch einen Radwandertag diese Strecke schon etwas bekannt war. Die komplizierte Geschwindigkeitsfunktion entsteht dadurch, dass auch hier gewisse Bedingungen erfüllt werden müssen, die die Natur des Radfahrers vorgibt, etwa, dass er zu Beginn 9 m/s fahren muss, dass nur eine geringe Geschwindigkeitssteigerung realistisch ist, weil der Weg neben der Donau eben ist, dass diese in eine Höchstgeschwindigkeit überführt und dann wieder weniger wird.
Auf dieselbe Weise entstehen andere Zeit-Ort-Funktionen, etwa die des **100m - Läufers**. Auch hier ist es wichtig, eine mögliche praxisnahe Geschwindigkeitskurve zu finden, die eine Steigerungsphase vom Start weg, eine längere Höchstgeschwindigkeitsphase und eine Auslaufphase enthält. Mir ist dabei auch immer nicht nur die mathematische Ausführbarkeit der Beispiele wichtig, bei der der Schüler mit den gelernten Werkzeugen auskommen muss, sondern auch die praxisnahe Durchführbarkeit. Schüler legen sehr viel Wert darauf, sich bei anwendungs-orientierten Aufgaben die tatsächliche Durchführbarkeit wirklich vorstellen zu können oder wenn sie mit der Materie vertraut, es sogar nachvollziehen zu können. Der Motivationsfaktor ist ein nicht zu unterschätzender. Die Aussage eines Schülers der 8. Klasse, der immer um das mathematische Überleben kämpft aber „trotzdem“ ein guter Tennisspieler ist, kommt mir immer in den Sinn: „Wann‘s woll‘n, dass i bei der nächsten Schularbeit positiv bin, gebn‘s uns a Tennisbeispiel, denn a wann i‘s mathematisch net versteh‘, beim Tennisspüln kenn‘ i mi aus und dann kriag i irgendwos z‘samm.“

Außer zur Beschreibung von Kurven bewegter Sportgegenstände eignen sich Funkionen auch zur **Beschreibung anderer Zusammenhänge**. Ein typisches Beispiel wurde schon erwähnt, nämlich **Zeit und Weg** bzw. **Geschwindigkeit und Weg**.
Im Bsp. 5) bei der 7. Klasse wird durch einen gegeben Graphen der Zusammenhang der **Steigung einer Straße und der Geschwindigkeit** des sich darauf bewegenden Radfahrers beschrieben. Hier bieten sich Interpretationsfragen geradezu an. Würde man diese Kurve durch einen Funktionsterm beschreiben, würde sie wahrscheinlich bei 20 die x-Achse schneiden und dann negativ sein. Auch wenn es nicht wehr realistisch ist, dass der Radfahrer nicht den Berg bewältigt, zumindest schiebend hinauf und dann auf der anderen Seite hinunterfährt, wäre als sinnvolle Interpretation auch denkbar, dass es ihm zu steil geworden ist, dass er stehen bleibt und dann wieder zurück hinunter fährt.

Eine in der Praxis sehr häufig vorkommende Abhängigkeit ist die von **Warenmenge und Preis**, die auch schon in der 5. Klasse bei linearen Funktionen in Form von Kostenfunktionen Anwendung findet. Erwähnen möchte ich bei Kostenfunktionen auch noch andere mögliche Komponenten, die man hier berücksichtigen kann, wie Nachfrage, Produktionskosten, die von der Menge, von der Anzahl der notwendigen Arbeitkräfte usw. abhängig sein.

Weitere durch Größen erfassbare Abhängigkeiten wären etwa die Größe eines **Blickwinkels** unter dem ich einen Gegenstand sehe und die **Entfernung** des Gegenstandes vom Auge, die **Schrittlänge**, die zu einem **schnelleren oder langsameren Bewältigen** einer vorgegebenen Strecke führt, die **Temperatur in einer Sauna und die Länge des Aufenthaltes** in der Saunakammer usw.
Die Schwierigkeit bei solchen Abhängigkeiten liegt sehr oft darin, dass man sie nicht mit mathematischen Größen erfassen kann. Wenn ich etwa den Zusammenhang zwischen der Sympathie eines Schülers für einen Lehrer und dem Lernerfolg in diesem Fach durch eine Kurve beschreiben möchte, könnte man den Lernerfolg vielleicht noch durch Noten oder Punkte erfassen, bei der Sympathie wird es allerdings schon schwieriger.

Viel Spass bei der Erarbeitung neuer Aufgaben.