BspNr: B1310

Themenbereich	
Stetigkeit, Differenzierbarkeit	
Ziele	**vorhandene Ausarbeitungen**
• Vertiefung der Begriffe Stetigkeit und Differenzierbarkeit.	TI-92 (B1310a)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	B1311 bis B1314
Lehrplanbezug (Österreich):	7. Klasse
Quelle: Karl Weinstich, nach Maria Koth, Mathematik - 100 Maturaaufgaben mit vollständigen Lösungen, htp Wien 1993	

Trassierung 1

Angabe:

Gegeben ist die Funktion $f(x)=\begin{cases} -3: & x<-1 \\ f_2(x): & -1\le x\le 2 \\ -2x+7: & x>2 \end{cases}$.

Fragen:

Ermittle die Funktionsgleichung für f_2 so, dass $f(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist und dass

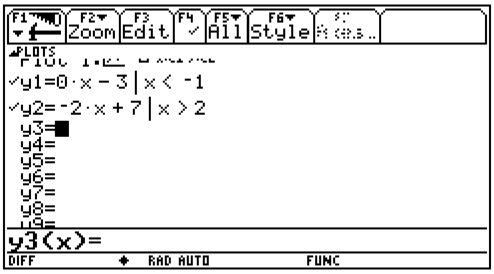
a) die Funktion f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist,
b) die Funktion f an den Stellen –1 und 2 unstetig ist, aber der Grenzwert von f an diesen Stellen existiert,
c) der Grenzwert der Funktion f an den Stellen –1 und 2 nicht existiert,
d) die Funktion f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.

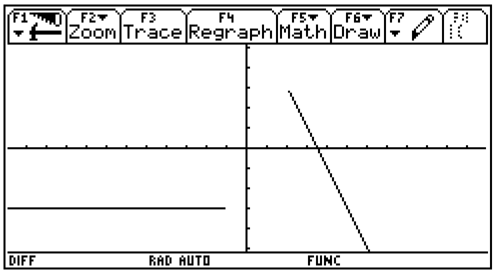
Gib jeweils ein Beispiel für die Funktionsgleichung einer geeigneten Funktion f_2 an und zeichne jeweils den Graphen der dadurch definierten Funktion f (die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sein soll) ins Heft.

BspNr: B1310a

Ausarbeitung (System: TI-92+)

Man verschafft sich zunächst einen Überblick, indem man die Funktion am TI-92 darstellt:

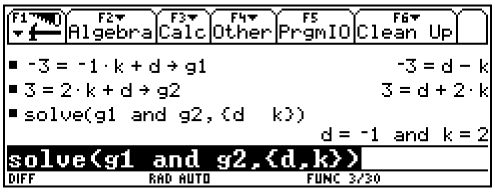


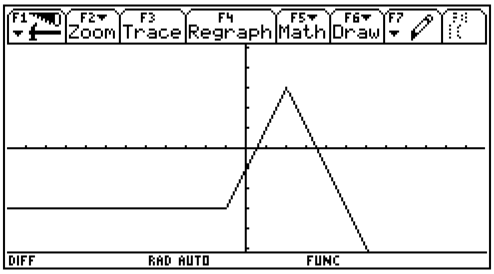


BEACHTE: Um konstante Funktionen auf einen Definitionsbereich einschränken zu können, muss auch die Variable im Funktionsterm vorkommen; d.h., statt $y2(x) = 2$ muss an $y2(x) = 0\cdot x + 2$ eingeben!

ad a)

Die einfachste stetige Funktion ist eine lineare Funktion, die folgende Bedingungen erfüllt: $f_2(-1) = f_1(-1) = -3$ und $f_2(2) = f_3(2) = 3 \Rightarrow$



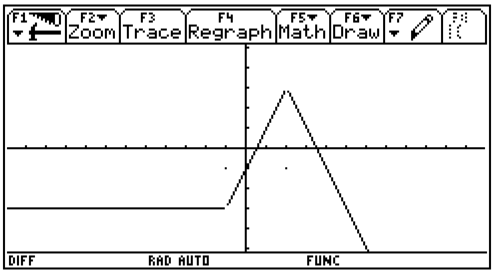


$$f_2(x) = 2x - 1 \quad (-1 \le x \le 2)$$

ad b)

Definiert man f_2 wie in Beispiel a) und wählt für die Stellen –1 und 2 solche Werte, dass dadurch Lücken im Graph entstehen, erhält man die geforderte Funktion $\Rightarrow$

$$f_2(x) = \begin{cases} -1 & : \ x = -1 \\ 2x - 1 & : -1 < x < 2 \\ -1 & : \ x = 2 \end{cases}$$



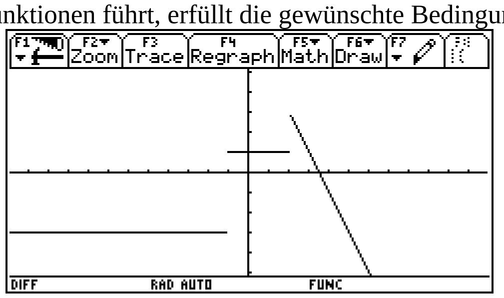
Durch diese Definition existieren zwar die Grenzwerte an den Stellen –1 und 2, sie stimmen aber mit den Funktionswerten nicht überein.

ad c)

Eine beliebige lineare Funktion, die nicht zu den gegebenen Funktionen führt, erfüllt die gewünschte Bedingung $\Rightarrow$

$$f_2(x) = 1 \quad (-1 \le x \le 2)$$

Da durch diese Definition Sprungstellen entstehen existiert der Grenzwert in den Stellen –2 und 1 nicht.

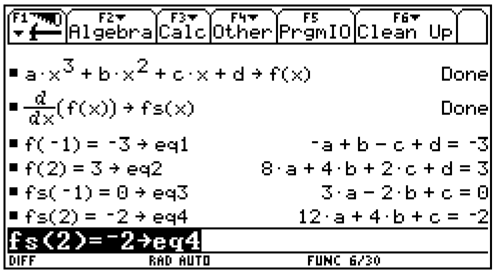


ad d)

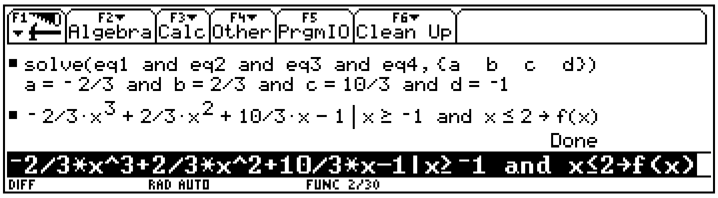
Gesucht ist eine differenzierbare Funktion, die an der Stelle $x = -1$ den gleichen Funktionswert und die gleiche 1. Ableitung wie $f_1(x) = -3$ und an der Stelle $x = 2$ den gleichen Funktionswert und die gleiche 1. Ableitung wie $f_3(x) = -2x + 7$ hat. Die gesuchte Funktion muss also bei $x = -1$ ein lokales Minimum besitzen, danach monoton wachsend und im Wert $x = 2$ monoton fallend sein. Die einfachste Funktion, die dies leistet, ist eine Polynomfunktion 3.Grades. $\Rightarrow$ $f_2(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Gleichungssystem ermitteln:

$$\left.\begin{aligned} f_2(-1)&=-3\\ f_2(2)&=3\\ f_2'(-1)&=0\\ f_2'(2)&=-2 \end{aligned}\right\}\Rightarrow \quad \begin{aligned} -a+b-c+d&=-3\\ 8a+4b+2c+d&=3\\ -a+b-c+d&=0\\ 12a+4b+c&=2 \end{aligned}$$



Lösungen berechnen:



$$\Rightarrow \; f_2(x)=\frac{1}{3}\left(-2x^3+2x^2+10x-3\right) \quad (-1\le x\le 2)$$

Kontrolle: