BspNr: D0416

Themenbereich	
Wachstumsprozesse	
Ziele	**vorhandene Ausarbeitungen**
• Das Wesen des beschränkten Wachstums kennen • Diskretes Modell und kontinuierliches Modell anwenden und vergleichen können	TI-92 (D0416a), DERIVE (D0416b), EXCEL (D0416c), Mathematica (D0416d)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	D0410 – D0420
Lehrplanbezug (Österreich):	6. Klasse
Quelle: Dr. Alfred Eisler, Sonja Reitner	

Beschränktes Wachstum

Eingangsvoraussetzungen

- Die Grenzen des exponentiellen Wachstums müssen erkannt worden sein – es kann nichts unendlich weit wachsen.

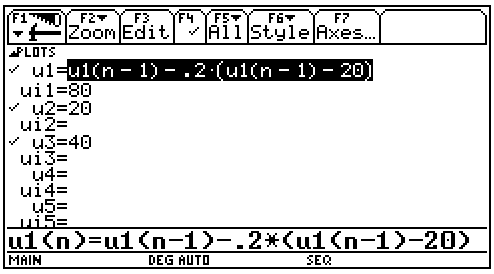
Angabe und Fragen:
Der Frühstückskaffee (80°) kühlt sich in der Tasse pro Minute um 20% der Differenz zur Raumtemperatur ab. Die Raumtemperatur beträgt 20°. Nach wie vielen Minuten hat der Kaffee eine Temperatur von 40°?

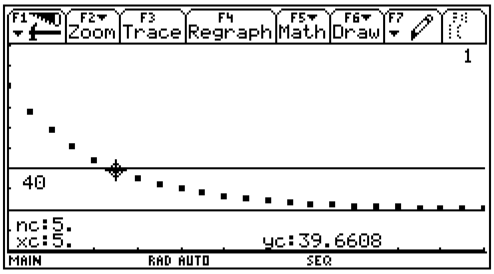
BspNr: D0416a

Ausarbeitung (System: TI-92)

Lösung mit dem diskreten Modell

Wir verwenden die rekursive Formel: $T(t) = T(t\text{-}1) - (T(t\text{-}1) - T_u) \cdot k$, wobei $k = 0{,}2$
Die rekursive Formel wird im `Sequence Mode` eingegeben und die Funktionen grafisch dargestellt.

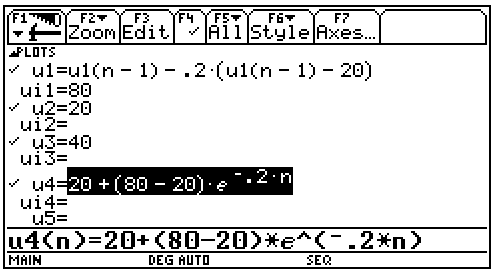




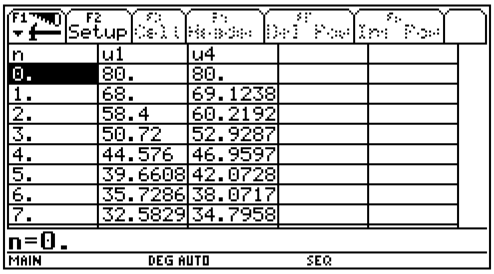
Die Lösung erfolgt grafisch. Durch Suchen des Schnittpunktes der Abkühlungskurve mit der 40° Geraden mit `F3/Trace` erhält man das Ergebnis von ca. 5 Minuten.

Lösung mit dem kontinuierlichen Modell

Die Formel lautet: $T(t) = T_U + (T_A - T_U) \cdot e^{-k.t}$ wobei $k = 0{,}2$

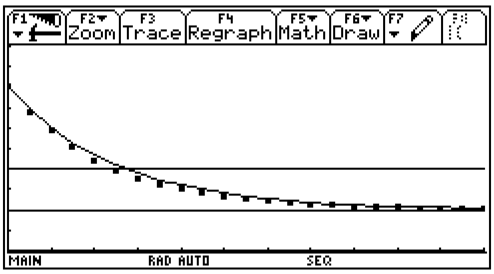


Die „kontinuierliche Formel“ geben wir als Funktion u4(n) ein.



n	u1	u4
0.	80.	80.
1.	68.	69.1238
2.	58.4	60.2192
3.	50.72	52.9287
4.	44.576	46.9597
5.	39.6608	42.0728
6.	35.7286	38.0717
7.	32.5829	34.7958

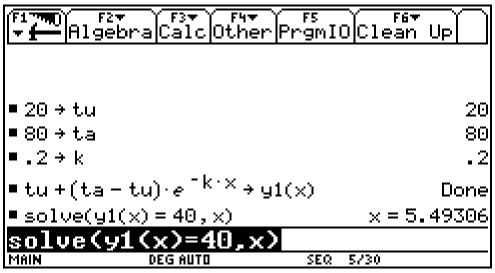
Die Tabelle liefert einen Vergleich zwischen diskretem und kontinuierlichem Modell.



Die Funktion u4 wurde als Linie dargestellt.

Im ersten Ansatz erfolgt die Lösungsfindung grafisch.
Durch Suchen des Schnittpunktes der beiden Kurven mit `F5/Intersection` erhält man als Ergebnis 5,49 Minuten.

Eine andere Variante wäre das Lösen der folgenden Gleichung im `HOME Screen`:



Nach 5,5 Minuten hat der Kaffee genau die richtige Temperatur.

BspNr: D0416b

Ausarbeitung (System: DERIVE)

ad a)
Lösung mit dem diskreten Modell:

Wir verwenden die rekursive Formel: $T(t) = T(t\text{-}1) - (T(t\text{-}1) - T_u) \cdot k$, wobei k = 0,2

Für die rekursive Eingabe in DERIVE haben wir zwei Möglichkeiten, nämlich die direkte Eingabe oder die Verwendung des Befehls `ITERATES`.

Direkte Variante:

```
T0 := 80

TR := 20

T(n) :=

IF(n = 0, T0, T(n - 1) - (T(n - 1) - TR)·k)

T(n) :=
  If n = 0
     T0
     T(n - 1) - (T(n - 1) - TR)·k
```

Der `IF-Befehl` unterscheidet zwischen n = 0 und den folgenden Werten. Für n = 0 wird der Startwert $T0$ genommen, für alle weiteren Werte von n ergibt sich die Temperatur aus der Formel.

Wir lassen nun die ersten 15 Werte berechnen.

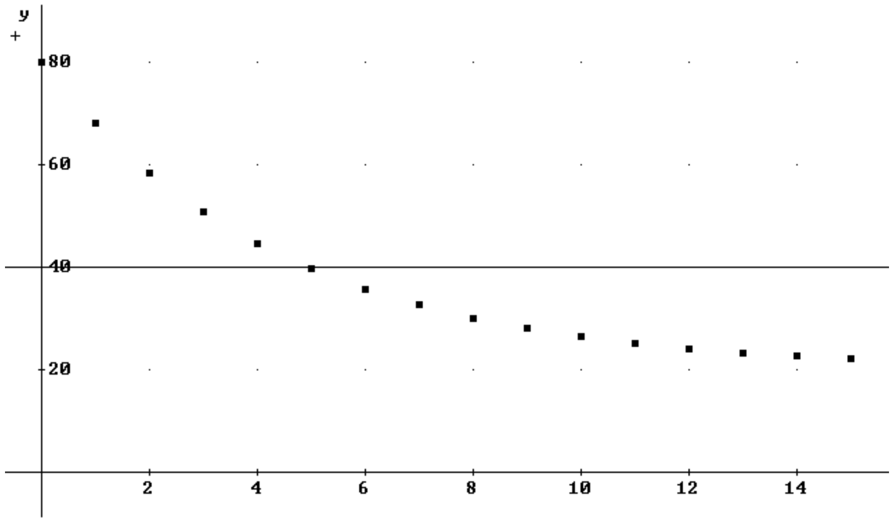
```
VECTOR([n, T(n)], n, 0, 15)
```

0	80
1	68
2	58.4
3	50.72
4	44.576
5	39.6608
6	35.72864
7	32.58291
8	30.06632
9	28.05306
10	26.44245
11	25.15396
12	24.12316
13	23.29853
14	22.63882
15	22.11106

Die Berechnung mit `ITERATES` müsste etwa so aussehen:

$$\text{ITERATES}\left(\left[x_1 + 1,\ x_2 - (x_2 - TR)\cdot k\right],\ x,\ [0,\ 80],\ 15\right)$$

Lässt man diese Zeile von DERIVE berechnen, so erhält man die gleiche Tabelle wie oben.
Diese Tabelle kann sofort in eine Grafik übernommen werden.



Daraus lässt sich leicht ablesen, dass eine Temperatur von 40° nach ca. 5 Minuten erreicht wird.

ad b)
Lösung mit dem kontinuierlichen Modell

Die Formel lautet: $T(t) = T_U + (T_A - T_U) \cdot e^{-k.t}$ wobei k = 0,2

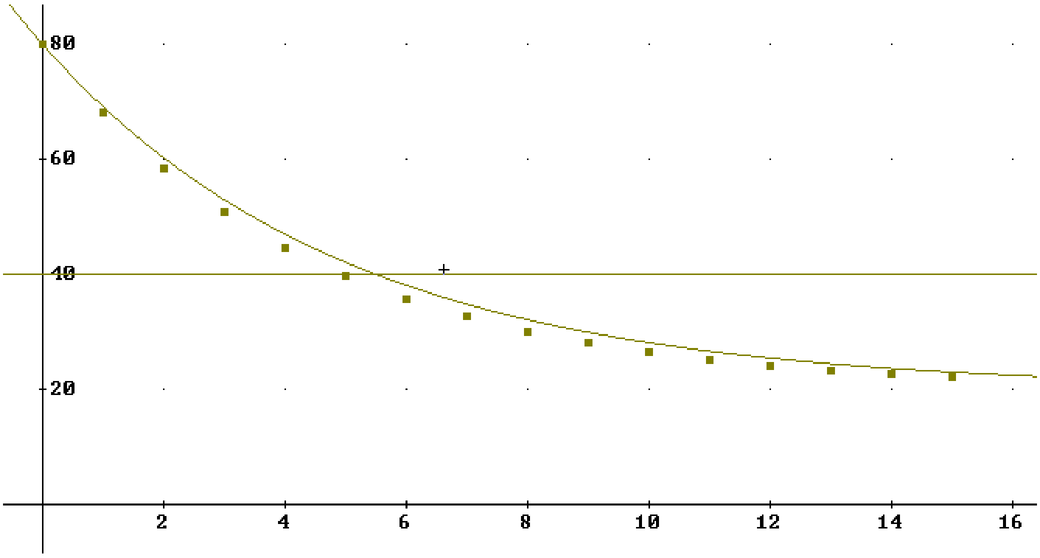
$$\text{Tc(n) := TR + (T0 - TR)} \cdot \hat{e}^{-0.2 \cdot n}$$

Die Funktion wird eingegeben, mit dem VECTOR-Befehl lässt sich eine Tabelle darstellen.

```
VECTOR([n, T(n), Tc(n)], n, 0, 12)
```

0	80	80
1	68	69.12384
2	58.4	60.2192
3	50.72	52.92869
4	44.576	46.95973
5	39.6608	42.07276
6	35.72864	38.07165
7	32.58291	34.79581
8	30.06632	32.11379
9	28.05306	29.91793
10	26.44245	28.12011
11	25.15396	26.64818
12	24.12316	25.44307

Hier wurden die Ergebnisse des diskreten Modells dem kontinuierlichen Modell gegenübergestellt.



(diskretes Modell: Punkte, kontinuierliches Modell: Linie)

Durch Suchen des Schnittpunktes der beiden Kurven erhält man als Ergebnis ca. 5 Minuten.

Eine andere Lösungsvariante ergibt sich im `Ausdrucks-Fenster` durch:

```
SOLVE(Tc(n) = 40, n, Real)

n = 5.493061
```

Nach ca. 5,5 Minuten hat der Kaffee genau die richtige Temperatur!

Ausarbeitung (System: EXCEL)

TA	80
TU	20
k	0,2

t	T	k*dT	TU	T1
0	80,00	12,00	20	40
1	68,00	9,60	20	40
2	58,40	7,68	20	40
3	50,72	6,14	20	40
4	44,58	4,92	20	40
5	39,66	3,93	20	40
6	35,73	3,15	20	40
7	32,58	2,52	20	40
8	30,07	2,01	20	40
9	28,05	1,61	20	40
10	26,44	1,29	20	40
11	25,15	1,03	20	40
12	24,12	0,82	20	40
13	23,30	0,66	20	40
14	22,64	0,53	20	40
15	22,11	0,42	20	40
16	21,69	0,34	20	40
17	21,35	0,27	20	40
18	21,08	0,22	20	40
19	20,86	0,17	20	40
20	20,69	0,14	20	40