BspNr: F0210

Themenbereich				
Integralrechnung				
Ziele	vorhandene Ausarbeitungen			
• Berechnung von Untersummen und Obersummen	TI-92 (F0210a)			
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	F0211			
Lehrplanbezug (Österreich):	8. Klasse			
Quelle: Dr. Thomas Himmelbauer				

Obersumme und Untersumme

Angabe und Fragen:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3$. Berechne für $\int_0^a f(x) \cdot dx$ zunächst eine Formel, die die Obersumme bzw. Untersumme in Abhängigkeit von der Obergrenze *a* und der Anzahl der Teilintervalle *n* berechnet. Danach ist $\int_0^a f(x) \cdot dx$ dadurch zu berechnen, dass für Obersumme und Untersumme der Grenzwert für $n \to \infty$ bestimmt wird.

Das Ergebnis ist durch direkte Berechnung von $\int_{0}^{a} f(x) \cdot dx$ zu überprüfen.

Beschreibe, wie Ober- und Untersumme für a = 2 und Teilungszahl n = 25 in der Graphik des CAS dargestellt werden können.

Ausarbeitung (System: TI-92)

Teil 1:

Zunächst definieren wir die Funktion. Dann berechnen wir die Rechtecksfläche mit der Breite $\frac{a}{n}$ und der Höhe gleich dem Funktionswert $f(i \cdot \frac{a}{n})$ am i-ten Teilungspunkt $i \cdot \frac{a}{n}$. Die Summe dieser Rechtecksflächen ergibt dann die Obersumme bzw. Untersumme.

 $\begin{array}{c} \hline f_{1} & \hline f_{2} & \hline f_{3} & \hline f_{3}$

Der Grenzwert liefert dann den Wert des Integrals.

F1 770 F2 ▼ ← Alge	braCalcOtherPi	rgmIOClean Up
∎Define u	$u(n) = \sum_{i=0}^{n} rf(i)$	Done
• o(n)		$\frac{a^4 \cdot (n+1)^2}{4 \cdot n^2}$
■u(n)		$\frac{a^4 \cdot \left(n^2 - 2 \cdot n + 1\right)}{4 \cdot n^2}$
սՀոշ		
MAIN	RAD AUTO	FUNC 6/30

F17700 F27 - Algebra Calc Other PrgmIO Clean	Up
• Define $rf(i) = f\left(\frac{i \cdot a}{n}\right) \cdot \frac{a}{n}$	Done
• Define $o(n) = \sum_{i=1}^{n} rf(i)$	Done
• Define $u(n) = \sum_{i=0}^{n-1} rf(i)$	Done
define u(n)=Σ(rf(i),i,0,n-	1)
MAIN RAD AUTO FUNC 4/30	

F1 770 ▼ ∰ A1	F2+ gebraCalcOthe	PrgmIOC1e	an Up
•		a ⁴ (n ²	-2·n+1)
- u(n)		4	n ²
■ lim o(n→∞	n)		<u>a</u> 4 4
■ lim u(n→∞	n)		<u>a</u> 4 4
limit	(u(n),n,∞)		
MAIN	RAD AUTO	FUNC 8/30	

Das kann mit der eingebauten Rechnerfunktion überprüft werden.

F1770 F2▼ ▼ ← Algebr	a Calc Ot	γ , her PrgmΙ(Clean	f
■ lim o(n) n→∞				a ⁴ 4
■ limu(n) n→∞				a ⁴ 4
•∫ ^a f(x)dx				a ⁴ 4
l(f(x),x	,0,a)			
MAIN	RAD AUTO	FUNC	9/30	

Teil 2:

Zunächst definieren wir die Funktion im [y=]-Editor. Danach eröffnen wir ein neues Blatt im Data-Matrix-Editor.





In die Spalte c1 geben wir die Intervalluntergrenze und die Teilungspunkte des Intervalles ein (Intervall [0,2], n = 25 Teilintervalle). Vor der Eingabe Cursor auf c1 stellen und ENTER drücken.

Ti Ti	Pior?	California (5845 (-58) - 5845 (-58) -) Å	f7 tat
DATA						
	c1	c2	сЗ	c4	c5	
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
c1=	seq(x	,x,0,	2-2/2	25,2/2	257	
MAIN		RAD AUTO		FUNC		

(F1	Plot ⁵²	5etup Ce	73 F4 211 Hea	der Cal	Utils	F7 tat
DATA						
	c1	c2	сЗ	c4	c5	
1	Θ					
2	2/25					
3	4/25					
4	6/25					
5	8/25					
6	2/5					
7	12/25					
8r1	c1=0					
MAIN		RAD AUTO		FUNC		

In der Spalte c2 berechnen wir die Funktionswerte von c1. Das sind die Werte, die wir zur Darstellung der Untersumme benötigen. Vor der Eingabe Cursor auf c2 stellen und ENTER drücken.

F 1 7	Pro 1	California (e ti i Here	see ale) Šis	F7 tat
DATA						
	c1	c2	сЗ	c4	c5	
1	0					
2	2/25					
3	4/25					
4	6/25					
5	8/25					
6	2/5					
7	12/25]
c2=	f(c1)					
MAIN		RAD AUTO		FUNC		

Plot Setup Cell Header Calc Util St							
DATA							
	c1	c2	сЗ	c4	c5	1	
1	0	Θ				1	
2	2/25	8/156				1	
3	4/25	64/15				1	
4	6/25	216/1					
5	8/25	512/1					
6	2/5	8/125					
7	12/25	1728/					
8r1	c2=0	-					
MAIN		DOD OUTD		FUNC			

In der Spalte c3 berechnen wir die Funktionswerte von c1 jeweils um 2/25 erhöht. Das sind die Werte, die wir zur Darstellung der Obersumme benötigen. Vor der Eingabe Cursor auf c3 stellen und ENTER drücken.

F1 77	1 01013	Sal tar 🕯	e ti Hers	see Cale) Å Å Å	F7 itat
DATA						
	c1	c2	сЗ	c4	c5	
1	0	0				
2	2/25	8/156				
3	4/25	64/15				1
4	6/25	216/1				1
5	8/25	512/1				
6	2/5	8/125]
7	12/25	1728/				1
c3=	f(c1+	2/25)				
MAIN		RAD AUTO		FUNC		

F1 777	Plot S	Setup C	3 ell Head	der Cal	-Utils	F7 tat
DATA						
	c1	c2	сЗ	c4	c5]
1	0	0	8/156]
2	2/25	8/156	64/15			
3	4/25	64/15	216/1			
4	6/25	216/1	512/1			
5	8/25	512/1	8/125			
6	2/5	8/125	1728/			
7	12/25	1728/	2744/			
8r1	c3=8/	15625				<u> </u>
MAIN		RAD AUTO		FUNC		

Dann definieren wir Plot1 für die Untersumme und Plot2 für die Obersummen.

	main\ousumme	t)
DA1	DefineCopyClear /	Ľ
_	Plot 1:	
1	Plot 2:	
2	Plot 3:	
3	Plot. 5:	
4	Plot 6	
5	Plot 7:	
6	Plot 8:	
<u> </u>	<u>F10C 3.</u>	
8	1c3=8/15625	
Mé	N BAD AUTO FUNC	_

	<u> </u>
Plot Type Histogram→	
Nøtterreere <u>0</u> ***	_
×	
9	
Hist. Bucket Width 2/25	
Use Freq and Categories? YES+	_
Category	-
Include Categories (3	-
(Est-could) (Esc-could	1

F1 main\ousumme	main\ousumme Plot 2
DefineCopyClear	Plot Type Histogram→ Marit
	×c1
2 Plot 39	9
3 Plot 4	Hist. Bucket Width 2/25
4 Plot 5:	Use Freq and Categories? YES+
5 Plot 7:	Catagony
6 Plot 8:	Include Categories ()
	(Enten=SALE) (ESC=CANCEL
Gr1c3=8/15625	
MAIN RAD AUTO FUNC	MAIN RAD AUTO FUNC

Damit ergibt sich mit entsprechenden Windowvariablen folgendes Bild. (xmin muss ein Vielfaches der Länge der Teilintervalle 2/25 sein, sonst wird das Histogramm verschoben angezeigt)



