

Themenbereich	
Integralrechnung	
Ziele	vorhandene Ausarbeitungen
• Numerische Integrationsverfahren	TI-92 (F0211a)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	F0210
Lehrplanbezug (Österreich):	8. Klasse
Quelle: Dr. Thomas Himmelbauer	

Numerische Integration

Angabe:

Gegeben ist die Funktion: $f(x) = \frac{x^4}{20} - \frac{x^3}{20} - \frac{9x^2}{2} + \frac{58x}{5} + 16$.

Fragen:

Berechne $\int_2^4 f(x) \cdot dx$ mit

- 1) Untersumme
- 2) Obersumme
- 3) Sekantenverfahren (Trapezverfahren)
- 4) Tangentenverfahren
- 5) Verfahren von Poncelet
- 6) Simpsonschem Verfahren

für eine Partition des Integrationsintervalles in 60 gleichgroße Teile. Alle Kommastellen der Ergebnisse sind anzugeben. Die entsprechenden Formeln sind für das Beispiel angepasst aufzuschreiben und die Bildungsgesetze der Teilungspunkte sind anzugeben.

Die Güte der einzelnen Verfahren ist zu bewerten und zu begründen.

Ausarbeitung (System: TI-92)**Formeln:**

$$\text{Obersumme: } \int_a^b f(x) \approx \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \quad (\text{Funktion fallend})$$

$$\text{Untersumme: } \int_a^b f(x) \approx \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f(x_i) \quad (\text{Funktion fallend})$$

$$\text{Trapezformel: } \int_a^b f(x) \approx \frac{b-a}{2n} \cdot \left(f(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right)$$

$$\text{Tangentenformel: } \int_a^b f(x) \approx \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f(x_i')$$

Poncelet: Mittelwert von Trapezformel und Tangentenformel:

$$\text{Simpsonsche Formel: } \int_a^b f(x) \approx \frac{b-a}{6n} \cdot \left(f(x_0) + 4 \cdot \sum_{i=1}^n f(x_i') + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right)$$

Dabei ist $a = 2$ die Untergrenze des Integrationsintervalles, $b = 4$ ist die Obergrenze des Integrationsintervalles, $n = 60$ ist die Anzahl der gleich großen Teile des Intervalles $[a, b]$.

Die x_i sind die Teilungspunkte des Intervalles $[a, b]$.

$$x_0 = 2, \quad x_1 = 2 + 1 \cdot \frac{2}{60}, \quad x_2 = 2 + 2 \cdot \frac{2}{60}, \quad \dots, \quad x_{60} = 4$$

Die x_i' sind die Halbierungspunkte der Teilintervalle.

$$x_1' = 2 + \frac{2}{120}, \quad x_2' = 2 + 3 \cdot \frac{2}{120}, \quad x_3' = 2 + 5 \cdot \frac{2}{120}, \quad \dots, \quad x_n' = 2 + 119 \cdot \frac{2}{120}$$

Daher müssen die Formeln auf folgende Weise angepasst werden:

$$O = \text{Obersumme: } \int_2^4 f(x) \approx \frac{2}{60} \cdot \sum_{i=0}^{59} f(x_i) \quad (\text{Funktion fallend})$$

$$U = \text{Untersumme: } \int_2^4 f(x) \approx \frac{2}{60} \cdot \sum_{i=1}^{60} f(x_i) \quad (\text{Funktion fallend})$$

$$Tr = \text{Trapezformel: } \int_2^4 f(x) \approx \frac{2}{120} \cdot \left(f(2) + \sum_{i=1}^{59} f(x_i) + f(4) \right)$$

$$Ta = \text{Tangentenformel: } \int_2^4 f(x) \approx \frac{2}{60} \cdot \sum_{i=1}^{60} f(x_i')$$

$$P = \frac{Tr + Ta}{2} \quad \text{Poncelet: Mittelwert von Trapezformel und Tangenteformel:}$$

$$S = \text{Simpsonsche Formel: } \int_2^4 f(x) \approx \frac{2}{360} \cdot \left(f(2) + 4 \cdot \sum_{i=1}^{60} f(x_i') + 2 \cdot \sum_{i=1}^{59} f(x_i) + f(4) \right)$$

Nun führen wir für die Summen $\sum_{i=1}^{59} f(x_i)$ und $\sum_{i=1}^{60} f(x_i')$ die Abkürzungen A und B ein.

Damit vereinfachen sich die Formeln zu:

$$O = \text{Obersumme: } \int_2^4 f(x) \approx \frac{2}{60} \cdot (f(2) + A) \quad (\text{Funktion fallend})$$

$$U = \text{Untersumme: } \int_2^4 f(x) \approx \frac{2}{60} \cdot (A + f(4)) \quad (\text{Funktion fallend})$$

$$Tr = \text{Trapezformel: } \int_2^4 f(x) \approx \frac{2}{120} \cdot (f(2) + 2A + f(4))$$

$$Ta = \text{Tangentenformel: } \int_2^4 f(x) \approx \frac{2}{60} \cdot B$$

$$P = \frac{Tr + Ta}{2} \quad \text{Poncelet: Mittelwert von Trapezformel und Tangenteformel:}$$

$$S = \text{Simpsonsche Formel: } \int_2^4 f(x) \approx \frac{2}{360} \cdot (f(2) + 4 \cdot B + 2 \cdot A + f(4))$$

Nun lassen sich die Formeln leicht berechnen und mit dem exakten Wert vergleichen.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
[940.445]					
sum(seq(y1(x), x, 2 + 2/60, 4 - 2/60, 2/60))					
					5870686499
					8100000
sum(seq(y1(x), x, 2 + 2/120, 4 - 2/120, 2/60))					
					47667654007
					64800000
sum(seq(y1(x), x, 2 + 2/120, 4 - 2/120, 2/60)) -> b					
MAIN RAD AUTO FUNC 14/30					

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
47667654007					
64800000					
2/60 * (y1(2) + a) -> o					24.8792036996
2/60 * (y1(4) + a) -> u					24.1592036996
2/120 * (y1(2) + 2 * a + y1(4)) -> tr					24.5192036996
2/60 * b + ta					24.5203981517
2/60 * b + ta					
MAIN RAD AUTO FUNC 18/30					

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
2/60 * b + ta					24.5203981517
(ta + tr) / 2 -> p					24.5198009257
2/360 * (y1(2) + 4 * b + 2 * a + y1(4)) -> s					24.5200000001
int_2^4 y1(x) dx					24.52
int(y1(x), x, 2, 4)					
MAIN RAD AUTO FUNC 21/30					