Merkwürdige Punkte

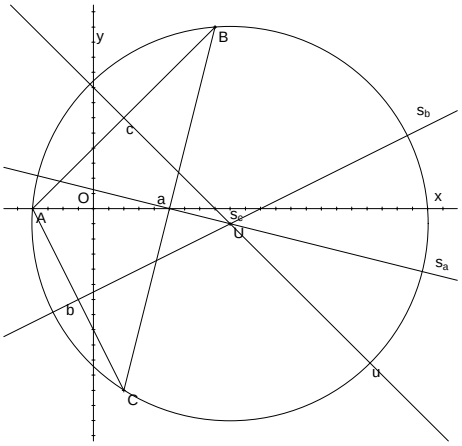
<table>
<tr><td colspan="2">Themenbereich</td></tr>
<tr><td colspan="2">Analytische Geometrie</td></tr>
<tr><td>Inhalte</td><td>Ziele</td></tr>
<tr><td>• Merkwürdige Punkte
• Umkreis- und Inkreisradius
• Eulersche Gerade
• Umfang und Flächeninhalt des Dreiecks</td><td>• Berechnung der merkwürdigen Punkte, des Um- und Inkreisradius, der Eulerschen Gerade und von Umfang und Flächeninhalt des Dreiecks
• Automatisierung bzw. Algorithmisierung der Berechnung durch ein Script</td></tr>
<tr><td colspan="2">Adressaten:
Ausgehend von einem konkreten Dreieck werden einfache analytischen Aufgaben zuerst schrittwiese gelöst und anschließend wird dieser Lösungsgang zu einem Script zusammengefaßt und damit automatisiert bzw. algorithmisiert. Es soll dabei ein Idee dessen vermittelt werden, was modulartiges Arbeiten ist.
Die Zusammenstellung richtet sich in erster Linie an SchülerInnen bzw. LehrerInnen der 9.Schulstufe</td></tr>
</table>

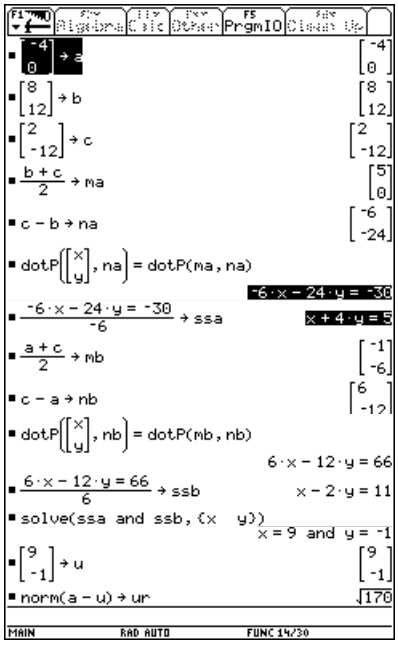
Gegeben ist ein Dreieck [A(-4/0), B(8/12), C(2/-12)].
a) Konstruiere die Eulersche Gerade!
b) Berechne den Umkreismittelpunkt und den Umkreisradius!
c) Berechne den Höhenschnittpunkt!
d) Berechne den Schwerpunkt!
e) Berechne die Eulersche Gerade!
f) Berechne den Inkreismittelpunkt und den Inkreisradius!
g) Berechne den Umfang des Dreiecks!
h) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks!

---

b) Umkreismittelpunkt und den Umkreisradius

Konstruktion:





Punkte definieren

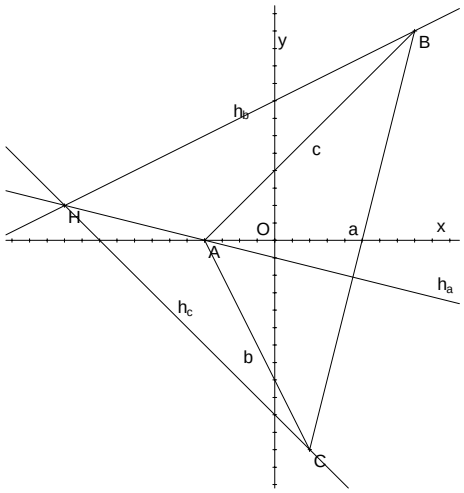
Berechnung des Seitenmittelpunktes
Normalvektor der Seitensymmetrale
Normalvektorform
Normalform

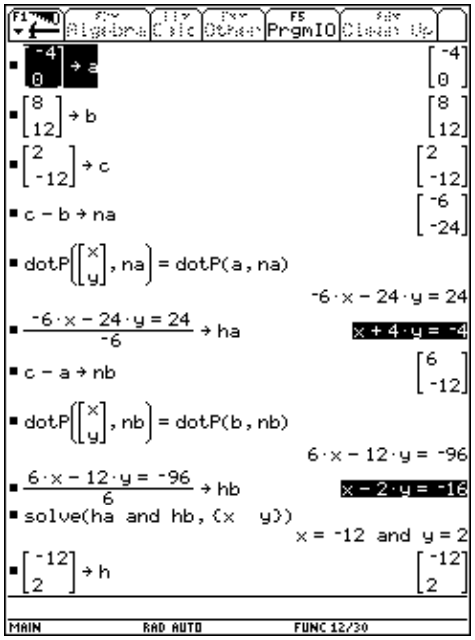
Lösen des Gleichungssystems
Umkreismittelpunkt
Umkreisradius

---

c) Höhenschnittpunkt

Konstruktion:





Normalvektor auf die Seite a
Normalvektorform für ha

Normalform für ha

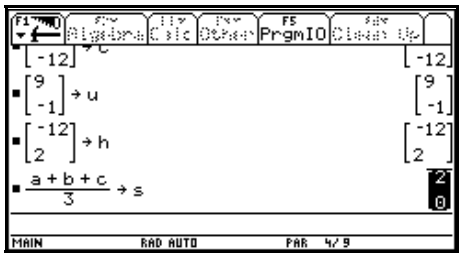
Normalvektorform für hb

Normalform für hb

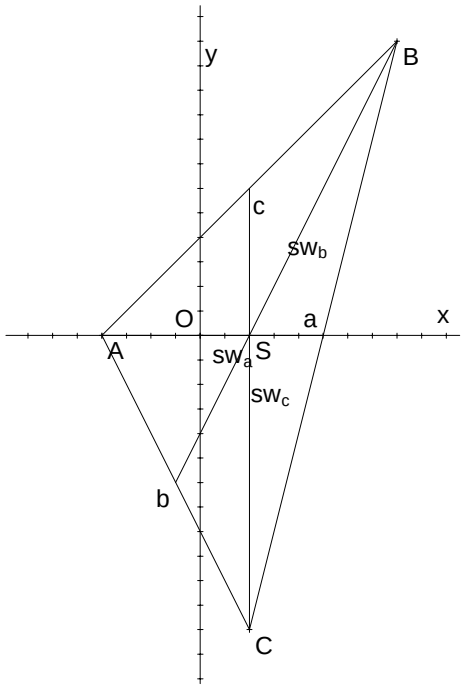
Höhenschnittpunkt

d) Schwerpunkt

mit Schwerpunktsformel



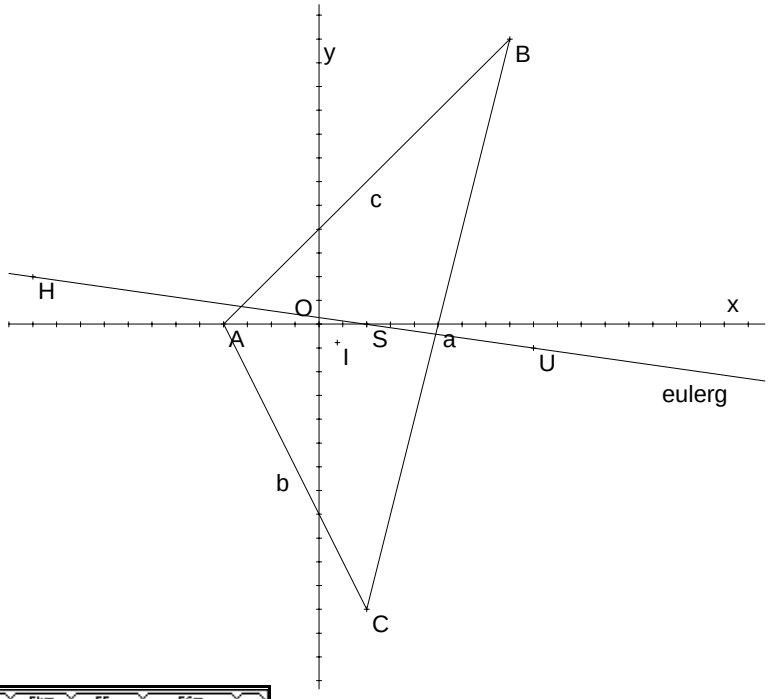
Konstruktion:

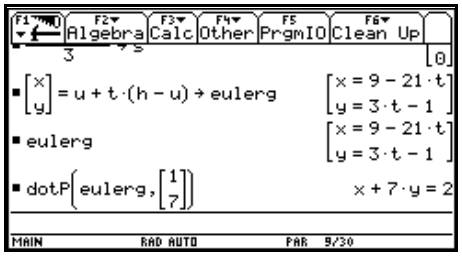


---

e) Eulersche Gerade

Konstruktion:



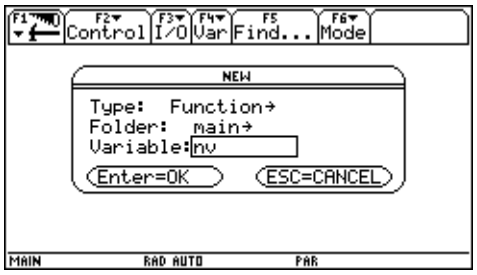


Eulersche Gerade in Parameterform

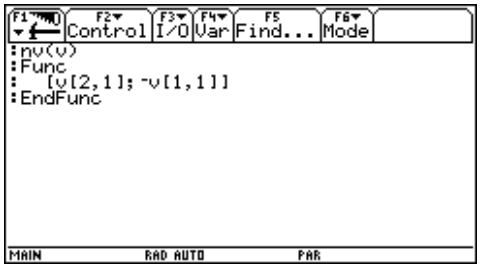
Umwandlung in die Normalform

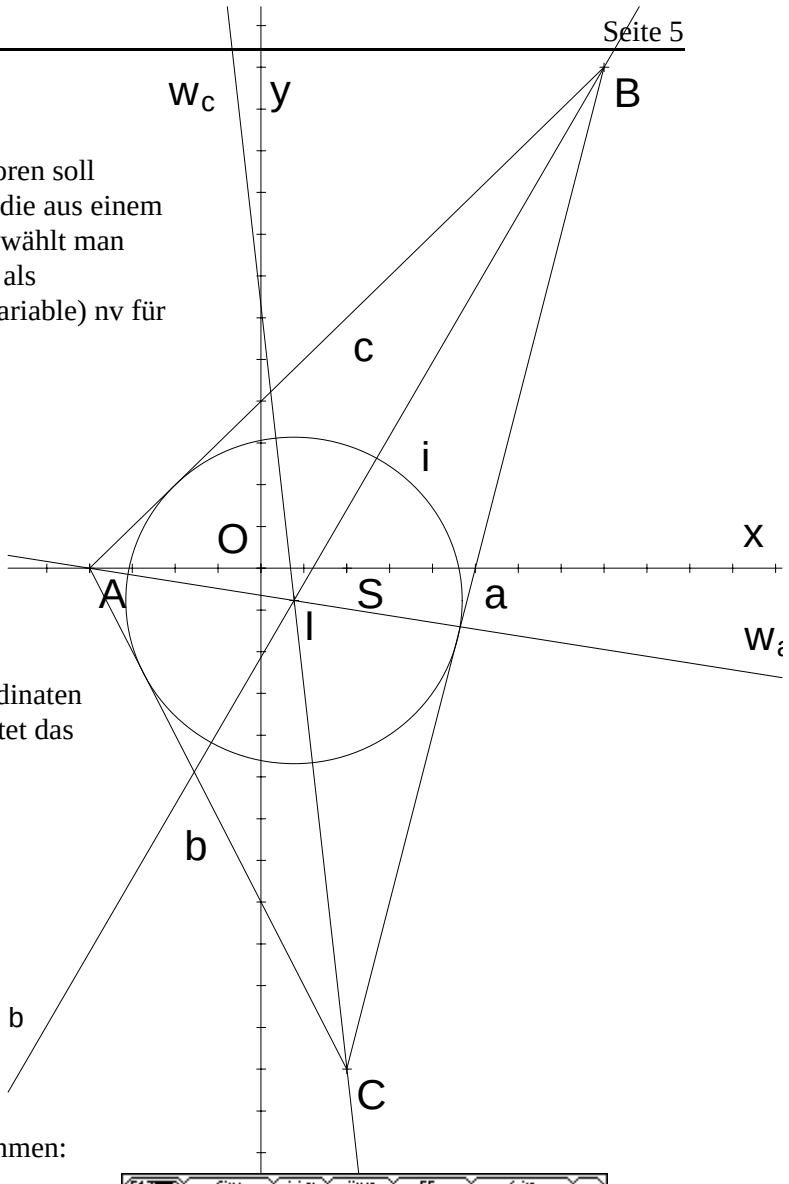
f) Inkreismittelpunkt und Inkreis

Zum bequemeren Umgang mit Normalvektoren soll zuerst eine kleine Funktion erstellt werden, die aus einem Vektor einen Normalvektor ermittelt. Dazu wählt man APPS/Program Editor/New und wählt dann als Type: Function und als Funktionsnamen (Variable) nv für Normalvektor.



Folgende Funktion (sie vertauscht die Koordinaten und setzt eine der Koordinaten negativ) leistet das Gewünschte:





Nun kann man die Ermittlung von Inkreismittelpunkt und Inkreisradius in Angriff nehmen:

Richtungsvektor der Winkelsymmetralen durch A

Parameterform der Winkelsymmetralen durch A

Normalvektorform der Winkelsymmetralen durch A
Normalform der Winkelsymmetralen durch A

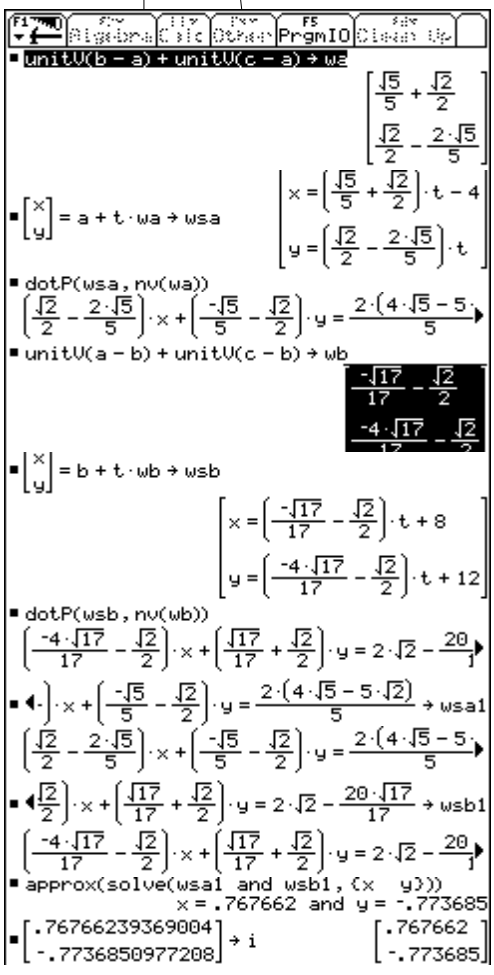
Richtungsvektor der Winkelsymmetralen durch B

Parameterform der Winkelsymmetralen durch B

Normalvektorform der Winkelsymmetralen durch B
Normalform der Winkelsymmetralen durch B

Die beiden Winkelsymmetralen werden benannt.

Schnitt der beiden Winkelsymmetralen (numerisch)
(Auch algebraisch(exakt) möglich, dauert aber ...)



Ermittlung des Inkreisradius:

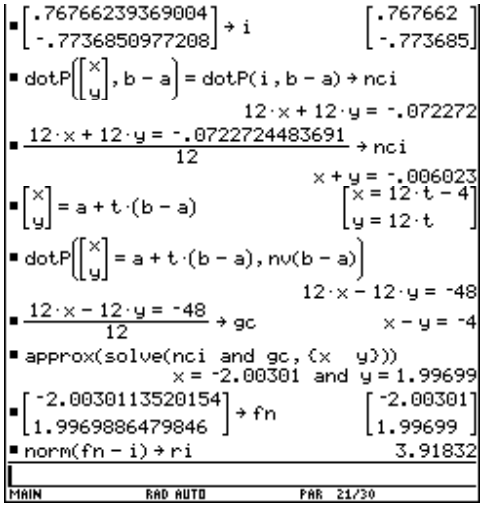
Normalvektorform der Normalen auf die Seite c durch I

Normalform der Normalen auf die Seite c durch I
Parameterform der Trägergeraden der Seite c

Skalare Multiplikation mit dem Normalvektor

Schnitt von der Normal auf c durch I mit der Trägergeraden von c, liefert den Punkt F_n.

Betrag des Vektors $\overrightarrow{IF}_n$ = Inkreisradius.



Einige Bemerkungen zum folgenden Script:

- Das folgende Script ist bereits für den TI92+ bzw. den TI89 entwickelt. Für den TI92 sind beim Befehl zeros() einige Abänderungen notwendig (statt das Gleichungssystem in einem Schritt zu lösen, ist die Substitutionsmethode erforderlich).
- Es empfiehlt sich - je nach Wahl der Eckpunkte - den TR auf Approx-Mode umzustellen.
- Für der Ablauf wird empfohlen: Im Texteditor F3/Script View einzustellen und anschließend das Script mit F4(Execute) abzuarbeiten.

```
 :Mit diesem Skript soll
 :1) der Umkreismittelpunkt und -radius
 :2) der HÖhenschnittpunkt
 :3) der Schwerpunkt
 :4) der Inkreismittelpunkt und -radiu
 :5) die Eulersche Gerade
 :6) der Umfang und
 :7) der Flächeninhalt
 :ermittelt werden
 :**********************************
C:ClrHome:ClrIO
 :
 :Eingabe des Ausgangsdreiecks
C:input a
 :Bitte den Eckpunkt A eingeben!
C:input b
 :Bitte den Eckpunkt B eingeben!
C:input c
 :Bitte den Eckpunkt C eingeben!
 :
 :1) Umkreismittelpunkt
C:(b+c)/2→ma
C:c-b→na
C:dotp([x;y],na)=dotp(ma,na)→ssa
C:(a+c)/2→mb
C:c-a→nb
C:dotp([x;y],nb)=dotp(mb,nb)→ssb
 :Umkreismittelpunkt
C:zeros({left(ssa)-right(ssa),left(ssb)-right(ssb)},{x,y})ᵀ→u
 :
 :Umkreisradius
C:norm(u-a)→ur
 :
 :2) HÖhenschnittpunkt
C:dotp([x;y],na)=dotp(a,na)→ha
C:dotp([x;y],nb)=dotp(b,nb)→hb
 :HÖhenschnittpunkt
C:zeros({left(ha)-right(ha),left(hb)-right(hb)},{x,y})ᵀ→h
 :
 :3) Schwerpunkt
C:(a+b+c)/3→s
 :
 :4) Inkreis
C:unitv(b-a)+unitv(c-a)→wa
C:dotp([x;y]=a+t*wa,nv(wa))→wsa
C:unitv(a-b)+unitv(c-b)→wb
C:dotp([x;y]=b+t*wb,nv(wb))→wsb
 :Inkreismittelpunkt
C:zeros({left(wsa)-right(wsa),left(wsb)-right(wsb)},{x,y})ᵀ→i
 :
 :Inkreisradius
C:dotp([x;y],b-a)=dotp(i,b-a)→nci
C:[x;y]=a+t*(b-a)→gc
C:dotp(gc,[(b-a)[2,1];-(b-a)[1,1]])→gc
C:zeros({left(gc)-right(gc),left(nci)-right(nci)},{x,y})ᵀ→fn
 :Inkreisradius
C:norm(i-fn)→ir
 :
 :5) Eulersche Gerade
C:[x;y]=u+t*(u-i)→eg
C:dotp(eg,[(u-i)[2,1];-(u-i)[1,1]])→eg
 :
 :6) Umfang
C:norm(a-b)+norm(b-c)+norm(c-a)→umf
 :
 :7) Flächeninhalt
C:[x;y]=c+t*(b-c)→ga
C:dotp(ga,[(b-c)[2,1];-(b-c)[1,1]])→ga
C:zeros({left(ga)-right(ga),left(ha)-right(ha)},{x,y})ᵀ→fha
C:norm(fha-c)→hoehe
 :Flächeninhalt
C:hoehe*norm(c-b)/2→fl
```