1. Schularbeit (6R) 24. Okt. 1997

1. Vereinfache und stelle das Ergebnis mit positiven Hochzahlen dar. Es sind dabei alle Rechenschritte anzugeben:
$$\left(\frac{27^{-1}\cdot x^{-2}\cdot y}{4\cdot x}\right)^{-2}:\left(-\frac{8^{-1}\cdot x^{2}}{x^{-1}\cdot y^{3}}\right)^{3}=$$ 6 P.

2. Löse die folgende Wurzelgleichung ohne Verwendung des TI-92 über der Grundmenge R. Bestimme die Definitions- und Lösungsmenge und vergiß nicht auf die Probe!
$$2\cdot\sqrt{x-2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x-5}$$ 6 P.

3a) Bringe den folgenden Ausdruck unter eine Wurzel und gib dabei alle Rechenschritte an:
$$\frac{2\cdot\sqrt[3]{2\cdot a^{2}}}{\sqrt[4]{2^{3}\cdot a}}=$$ 3 P.

3b) Beweise die folgende Rechenregel:
$\sqrt[r]{a}\cdot\sqrt[s]{a}=\sqrt[rs]{a^{r+s}}$ $a\geq 0,\ r,s\in N^*$ 2 P.

3c) Skizziere die folgenden Funktionen im Heft und gib jeweils die Definitions- und Wertemenge sowie die Art der Symmetrie an:
$y=x^{-3},\quad y=-x^{4}$ 4 P.

4a) Ergänze die folgende Tabelle, indem du für den Winkel α jeweils <u>alle</u> Lösungen im Intervall [0°;360°] angibst:

	a
tan a = 1,3	
sin a = 0,2	

3 P.

4b) Gib alle möglichen Winkel α an, für die die folgende Bedingung gilt:
(Beachte dabei die Periodizität der Funktion!)
sin(137°) = cos a 2 P.

5. Von einem gleichschenkeligen Dreieck kennt man die Höhe $h_a = 28{,}5$ und den Basiswinkel $\alpha = 56{,}23°$.
Erstelle eine Skizze, berechne die Seiten, die Höhe, den fehlenden Winkel und den Flächeninhalt des Dreiecks. Gib alle dabei verwendeten Formeln an. 6 P.

Zusatzaufgabe (3 P.):

Beweise die folgende Regel: $(a^{n}-b^{n}):(a-b)$ ist $\forall n\in N$ ohne Rest teilbar.

2. Schularbeit (6R) 15. Dez. 1997

1. Von einem Viereck kennt man die Seitenlängen AB = 8,0 m, BC = 6,0 m und AD = 7,0m sowie die Winkelmaße $\alpha = \angle DAB = 75°$ und $\beta = \angle ABC = 60°$.
Berechne Umfang und Flächeninhalt des Vierecks. 8 P.

2. Von einer Bergspitze S sieht man zwei Schiffe auf dem Meer. Das Schiff A sieht man unter dem Tiefenwinkel $\alpha = 17{,}3°$ und das Schiff B nach Schwenken um den Horizontalwinkel $\varepsilon = 107{,}4°$ unter dem Tiefenwinkel $\beta = 12{,}1°$. Die Bergspitze befindet sich in der Höhe h = 435 m über dem Meer.
   a) Wie weit sind die beiden Schiffe voneinander entfernt?
   b) Welchen Winkel bilden die beiden Sehstrahlen SA und SB?
   Berechne dazu zunächst die Längen der beiden Sehstrahlen SA und SB. 8 P.

3a) Löse die folgende goniometrische Gleichung graphisch mittels TI-92, indem du alle Schnittpunkte der beiden Funktionen bezüglich der Grundmenge R angibst.
Dokumentiere den Lösungsweg ausführlich auch durch eine Skizze.
cos(x) = tan(2x) 6 P.

3b) Ermittle rechnerisch die Lösungsmenge der folgenden goniometrischen Gleichung
cos(2x) = sin(x)
über der Grundmenge G = [0°;360°] bzw. G = [0;2π].
Der Rechengang ist genau anzugeben. 6 P.

4a) Untersuche die gegenseitige Lage der beiden Geraden

$$g: X = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: X = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wird durch g und h eine Ebene aufgespannt? Stelle sie gegebenenfalls in Parameterform dar!
In welchen Fällen wird durch zwei Geraden im Raum keine Ebene festgelegt? 6 P.

4b) Eine Ebene ε ist durch die Punkte A(1/1/3), B(3/3/7) und C(5/0/8) festgelegt.
Stelle die Gleichung der Ebene in Parameterform, in Normalvektorform und in parameterfreier Form dar! 6 P.

5) Die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide liegt in der Ebene ε: 4x + y + z = 25.
Die Gleichungen der Trägergeraden zweier Seitenkanten lauten:

$$a: X = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b: X = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Die dritte Seitenkante steht auf die Grundfläche normal und geht durch den Schnittpunkt der beiden Geraden g und h. Berechne die Koordinaten der Eckpunkte der Pyramide. 8 P.

Zusatzaufgabe (3 P.):

Leite den Sinussatz anhand einer Skizze allgemein her!

3. Schularbeit (6R) 23. Feb. 1998

1. Berechne den Abstand des Punktes P(0/-1/2) von der Geraden g, die durch die beiden Punkte A(2/3/0) und B(0/4/1) bestimmt wird. 4 P.

2. Gegeben sind die beiden Geraden

$$g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: X = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 17 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Untersuche die gegenseitige Lage der beiden Geraden und bestimme gegebenenfalls deren Abstand. 8 P.

3a) Untersuche die Lage der folgenden Ebenen ohne Verwendung des TI-92, bestimme die Lösungsmenge und gib eine geometrische Deutung an.

ε_1: $2x - 4y - 3z = 1$
ε_2: $2x + 4y + z = 5$
ε_3: $-4x + 8y + 6z = -2$ 6 P.

3b) Bestimme die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems mittels TI-92:

$x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 0$
$-x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1$
$x_1 - 2x_2 - x_3 = 3$ 6 P.

4. Von einer geraden quadratischen Pyramide kennt man die Eckpunkte A(6/y/1), B(0/1/1), C(-2/-1/9), sowie die Spitze S(10/5/9).
   a) Berechne die fehlenden Koordinaten der Eckpunkte, sowie das Volumen der Pyramide.
   b) Ermittle den Winkel zwischen der Basisfläche und einer Seitenkante. 8 P.

Zusatzaufgabe (2 P.):

Berechne die Oberfläche der quadratischen Pyramide.

4. Schularbeit (6R) 21. April 1998

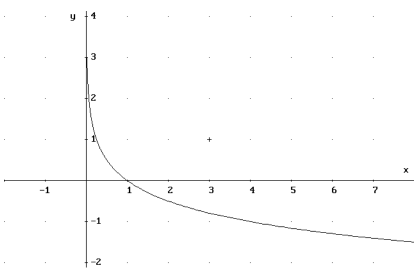
1. Ein Wald hatte 1988 einen Bestand von 48 000 m³. Im Verlauf der letzten 10 Jahre war kein Holz gefällt worden, sodass sich der Bestand seit 1988 um 40% erhöhen konnte.
   a) Beschreibe den Wachstumsprozess sowohl rekursiv als auch explizit, wenn exponentielles Wachstum angenommen werden kann.
   Hinweis: Nimm das Jahr 1988 mit n = 0 an!
   b) Wie groß war der Bestand 1995 und wie groß wird er im Jahr 2000 sein?
   c) Wann wird sich der Holzbestand von 1988 verdoppelt haben?
   Berechne durch Lösen der entsprechenden Exponentialgleichung. 8 P.

2. Ein zunächst weitgehend unbekannter Politiker kandidiert in einer Stadt mit 25 000 Wahlberechtigten für das Bürgermeisteramt. Zur Überprüfung der Wirkung der im Wahlkampf eingesetzten Werbemaßnahmen werden wöchentlich die Anzahl der Wahlberechtigten erhoben, denen der Politiker bereits bekannt ist. Dabei ergibt sich folgende Tabelle der ersten Wochen:
   a) Wähle einen geeigneten Modelltyp und begründe deine Wahl.
   b) Gib die rekursive Gleichung mit einer geeigneten Wachstumsrate (2 Dez.) an.
   c) Ergänze die Werte in der Tabelle.
   d) Der Kandidat möchte am Ende des Wahlkampfs mindestens 90% der Wahlberechtigten bekannt sein. In welcher Woche sollte dann frühestens die Wahl sein?
   e) Welche Wachstumsrate (2 Dez.) ist bei deinem Modell mindestens notwendig, um diesen Bekanntheitsgrad von 90% in Woche 13 zu erreichen? 8 P.

Woche	Anzahl
1	200
2	300
3	450
4	675
5	
6	
7	

3a) Berechne jeweils den Wert von x ohne Verwendung des TI-92:
$^{x}\log\frac{1}{16} = -2$ $\qquad$ $^{n}\log\sqrt[3]{\frac{1}{n}} = x$ 3 P.

3b) Gib aus dem Funktionsgraphen die Basis a der Funktion f_1: $y = {}^{a}\log x$ an.
Gib weiters die Gleichungen jener Funktionen an, deren Graph dadurch entsteht, indem f_1 an der x-Achse bzw. an der 1. Mediane gespiegelt wird.



3 P.

4. Gegeben ist das Dreieck ABC[A(-1/-3), B(11/6), C(-1/11)].
Ermittle die Koordinaten des Inkreismittelpunktes sowie die Größe des Inkreisradius. 10 P.

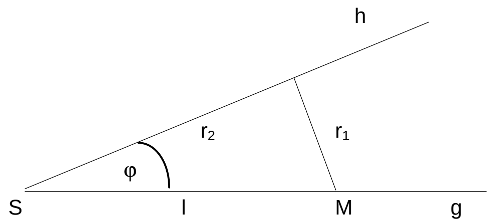
5. Schularbeit (6R) 28. Mai 1998

1) Gegeben ist die Folge $x_n = \frac{9n-7}{3+4n}$.

a) Bestimme die ersten fünf Folgenglieder, stelle eine Vermutung über die Art der Monotonie auf und beweise diese.

b) Ermittle den Grenzwert der Folge. Ab welchem Folgenglied liegen alle weiteren Folgenglieder innerhalb der ε-Umgebung ($\varepsilon = 0,01$) des Grenzwertes? 6 P.

2) Zwei Geraden g und h schneiden einander im Punkt S und schließen einen Winkel φ=30° ein. Auf g wird ein Punkt M als Mittelpunkt eines Halbkreises angenommen, der h berührt $(\overline{SM} = l)$. Ein zweiter Halbkreis mit dem Mittelpunkt auf g schließt daran so an, dass er h und den ersten Halbkreis berührt. In derselben Weise werden die weiteren Halbkreise angeschlossen.



a) Berechne die Summe der Umfänge der ersten 10 Halbkreise.

b) Berechne die Gesamtlänge aller so entstehenden Halbkreislinien. 8 P.

3a) Stelle den folgenden Ausdruck als Logarithmus eines einzigen Terms dar und vereinfache soweit möglich:

$\frac{1}{3}[\log(a+b) + \log(a-b) + 2\log(a)] - 2\log(a) - \frac{2}{3}\log(a+b) =$ 4 P.

3b) Ermittle die Lösungsmenge der folgenden Exponentialgleichung ohne Verwendung des TI-92:

$2 \cdot 3^x - 5 \cdot 2^{x-1} = 2^{x+1}$ 6 P.

3c) Löse die in b) angegebene Exponentialgleichung graphisch mittels TI-92.
Dokumentiere den Lösungsweg und gib die Koordinaten des Schnittpunkts an. Erstelle eine Skizze des Graphen. 4 P.

4. Von einer arithmetischen Folge kennt man die Glieder $a_4 = 16$ und $a_7 = 37$.
Ermittle die explizite und rekursive Beschreibung der Folge.
Gib weiters die Summenformel für die arithmetische Reihe an. 4 P.

Zusatzaufgabe (2P.):

Leite den Zusammenhang zwischen dem natürlichen Logarithmus und Logarithmen beliebiger Basis her.