Mag. Christine PÖSCHL

DYNAMISCHE SYSTEME

Differenzengleichungen grafisch mit dem TI 92 lösen

<table>
<tr><th colspan="2">Themenbereich</th></tr>
<tr><td colspan="2">Differenzengleichungen grafisch lösen</td></tr>
<tr><th>Inhalte</th><th>Ziele</th></tr>
<tr><td>Lösen von Differenzengleichungen 1. Ordnung
Lösen von Systemen von Differenzengleichungen
Differenzengleichungen 2. Ordnung
Als Lösungsverfahren werden die Tabelle und die grafische Methode gewählt.</td><td>Einfache Differenzengleichungen sollen im Sequence-Mode eingegeben werden können.
Bei der Tabellendarstellung ist auf eine günstige Konfiguration zu achten.
Die WEB-Darstellung soll als probates Mittel zur Veranschaulichung eingesetzt werden.
Der Schüler soll erkennen, daß bei minimalen Änderungen von Parametern aus einem stabilen System ein chaotisches werden kann.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ausgehend vom Mathematiklehrbuch der 7. Klasse (Reichel) werden einige Beispiele mit Hilfe der Tabelle oder durch grafische Darstellung gelöst. Dieser Lösungsweg ist für die Schule insofern brauchbar bzw günstig, weil einerseits komplizierte Lösungsverfahren im Unterricht nicht besprochen werden können, andererseits sind aber Differenzengleichungen durchaus geeignet, um reale Strukturen und Zusammenhänge in mathematische Formen zu übersetzen.</td></tr>
</table>

DYNAMISCHE SYSTEME
DIFFERENZENGLEICHUNGEN GRAPHISCH MIT DEM TI 92 LÖSEN:

Dynamische Systeme und ihr mathematisches Modell - soweit sie in der AHS behandelt werden - Differenzengleichungen und Systeme von Differenzengleichungen eignen sich ob ihrer Anschaulichkeit sehr für einen anwendungsorientierten Mathematikunterricht, wie er im Lehrplan der Oberstufe gefordert wird.

Differenzengleichungen werden meist rekursiv aufgestellt, das "Lösen" der Gleichung bezieht sich somit auf die explizite Darstellung des n-ten Folgegliedes, soweit dies möglich ist.
Da man aber mathematisch gesehen, auch bei Beschränkung auf ein bis zwei Variable, sehr rasch auf sehr komplexe Darstellungen stösst, liegt es auf der Hand zu versuchen, die Gleichungen graphisch zu lösen und aus dieser graphischen Lösung Rückschlüsse auf das mögliche Langzeitverhalten des Systems, sowie etwaiger Grenzwerte oder Gleichgewichtszustände zu ziehen. Bei Systemen von Differenzengleichungen benötigt man überdies für die rechnerische Durchführung die Matrizenmultiplikation, die "händisch" ja nur sehr mühsam durchführbar ist.

Wie bei allen graphischen Darstellungen zeigt der TI 92 hier seine Stärken. Nach Eingabe der Gleichung in den Y-Editor können bereits beliebig viele Werte aus der Wertetabelle abgelesen werden und ein Langzeitverhalten des Systems bereits abgelesen werden. Die rechenaufwendige schrittweise Berechnung der ersten n Werte entfällt daher und es kann das Augenmerk auf mögliche Fragestellungen gelenkt werden.
Ein weiterer Vorteil bei Verwendung des TI 92 besteht darin, dass den Schülern sehr einfach gezeigt werden kann, dass ein vorerst stabiles System durch nur geringfügige Änderungen der Grundbedingungen in ein chaotisches System ausarten kann.

Alle hier in diesem Skriptum angeführten Beispiele beziehen sich auf das Buch : Reichel u.a., Lehrbuch der Mathematik 7 und wurden von mir im heurigen Schuljahr mit einer 7. Klasse durchgenommen.

1) Differenzengleichungen 1. Ordnung

Im **Buch**: allgemeine Form $\mathbf{x_{n+1} = ax_n + b; x_o}$

TI 92: Für die Darstellung am TI 92 ist der **Graph-Mode auf Sequence** umzustellen: <MODE>-Graph-Sequence-<ENTER>.
Anschließend ist Y-Editor aufzurufen: dieser erscheint im Sequence-Mode verändert: die Funktionen werden mit u1, u2, u3,....... bezeichnet, zusätzlich muß aber noch der Startwert eingegeben werden: ui1 ist z. Bsp der Startwert zu u1, ui2 zu u2 usw. .

Übung 1) Geben sie die Differenzengleichung $x_{n+1} = 0,5x_n + 5$; $x_o = 0$ in den Y-Editor ein !

Lösung: u1 = 0,5.u1(n-1) + 5 ; ui1 = 0,9 ; d.h. u1 entspricht dem x_{n+1} , weshalb x_n in der Gleichung mit u1(n-1) eingegeben werden muß. Achtung: kein Multiplikationszeichen zwischen u1 und (n-1) !

Anschließend sollte mit $\boxed{\blacklozenge}$-TblSet die Tabelle konfiguriert werden; dabei ist darauf zu achten, daß tblStart mit 0 beginnt und Δtbl (=Schrittweite) gleich 1 ist, da sonst die Numerierung nicht richtig durchgeführt wird.

Übung 2) Führen sie die Tabellenkonfiguration durch !

Nun kann die Tabelle bereits mit ◆ -TABLE aufgerufen werden:

n	u1
0.	.9
1.	5.45
2.	7.725
3.	8.8625
4.	9.4313
5.	9.7156
6.	9.8578
7.	9.9289

n=0.

MAIN RAD AUTO SEQ

Aus der Tabelle kann der Werteverlauf der Differenzengleichung entnommen werden, die mühsame schrittweise Berechnung entfällt ! Weiters kann aus dem Werteverlauf ein möglicher Grenzwert - hier liegt er bei 10 - bereits entnommen werden und in den Kontext des Systems übernommen werden.

Um einen Überblick über das Langzeitverhalten des Systems zu bekommen wird nun der Werteverlauf des Systems graphisch dargestellt. Davon sind besonders zwei Arten interessant: das (n,x_n) - und das (x_n,x_{n+1}) - Koordinatensystem. Beide Arten können mit dem TI 92 dargestellt werden ! Dazu wählt man im Y-Editor mit F7 die Option Axes und wählt TIME für das (n,x_n) und WEB für das (x_n,x_{n+1}) - Koordinatensystem.

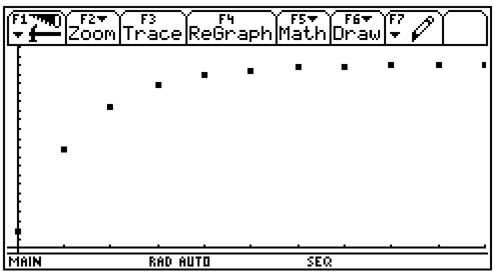
Übung 4: Bevor nun endgültig die graphische Darstellung aufgerufen werden kann muß ein entsprechender Ausschnitt aus dem Koordinatensystem mit ◆-WINDOW eingestellt werden: die entsprechenden Optionen für das obige Beispiel sind:

```
F1 F2 Zoom
nmin=0.
nmax=10.
plotstrt=1.
plotstep=1.
xmin=-.2
xmax=10.
xscl=1.
ymin=-.2
ymax=11.
yscl=.5
MAIN RAD AUTO SEQ
```

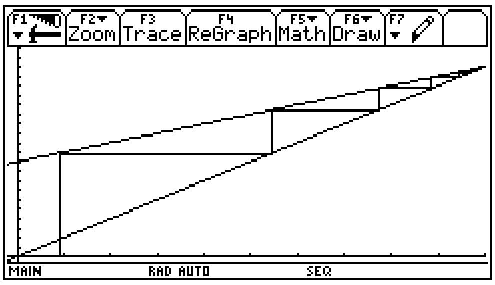
Bemerkungen:

nmin sollte 0 sein
nmax sollte auf einen geeigneten Wert eingestellt werden (aus der Tabelle entnehmen)
plotstart und **plotstep** sollten den Wert 1 haben
xmin: ich wähle **xmin** immer etwas kleiner als 0, um die x-Achse zu sehen, gleiches gilt für ymin.
xmax sollte den gleichen Wert wie nmax haben
xscl sollte 1 sein
yscl muß individuell an die Werte angepasst werden

Übung 5: Nach diesen Vorbereitungen kann mit ◆- GRAPH die Graphik aufgerufen werden:



Grafik mit TIME, entspricht (n,x_n) - Koordinatensystem



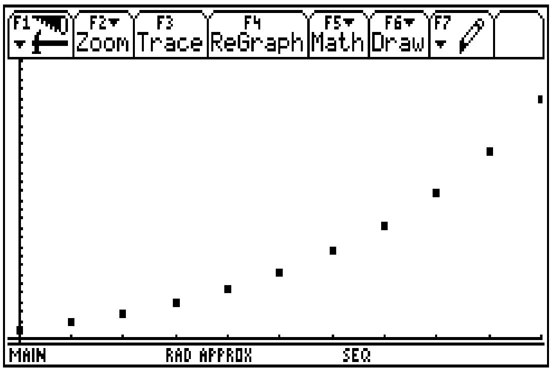
Grafik mit WEB, entspricht dem (x_n ,x_{n+1}) -Koordinatensystem

Wie bei jeder graphischen Darstellung mit dem TI 92 können mit F3 - Trace die genauen Koordinaten der einzelnen Punkte auch im Grafikbildschirm abgelesen werden.

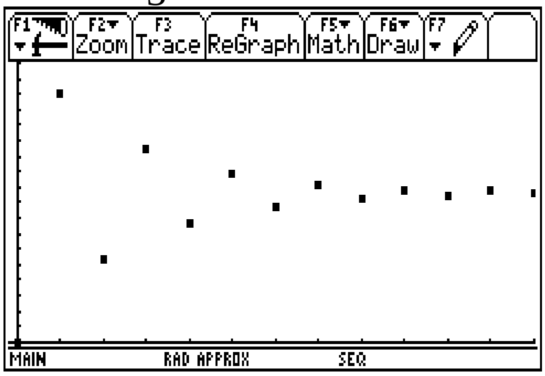
Um die Abhängigkeit des Kurvenverlaufes von den Koeffizienten zu zeigen, ist es möglich, die Schüler anhand verschiedener Beispiele experimentieren zu lassen: entweder gibt man die Gleichungen vor und läßt sie von den Schülern graphisch auswerten oder umgekehrt.

Übungen 6 - 9 : Stellen sie die angegebenen Gleichungen im (n,x_n) Koordinatensystem dar::

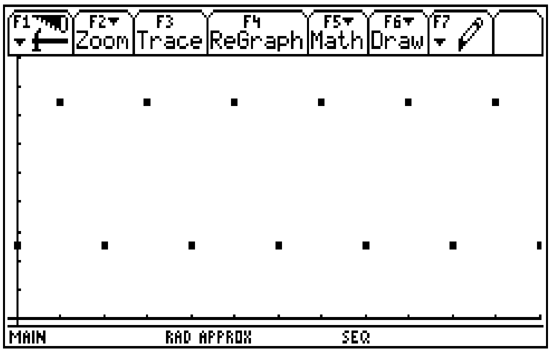
$x_{n+1} = 1{,}25x_n + 0{,}5$; $x_o = 1$



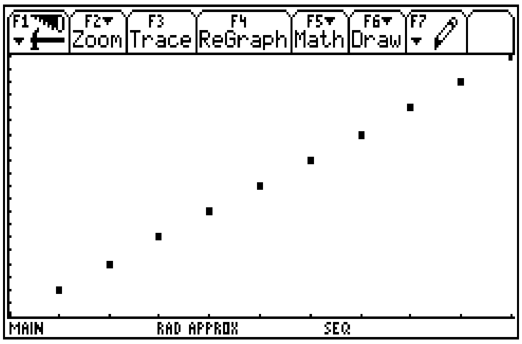
$$x_{n+1} = -\frac{2}{3}x_n + 16;\ x_0 = 0$$



$x_{n+1} = -x_n + 10$; $x_o = 2{,}5$



$$x_{n+1} = x_n + 2;\ x_o = 0$$



Die genauen Abhängigkeiten finden sie im Buch der 7. Klasse, S. 212 f.

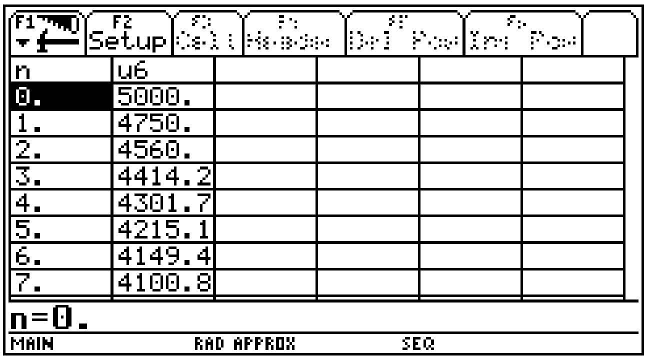
Differenzengleichungen 1.Ordnung , deren Koeffizienten a und b nicht konstant sind sondern ebenfalls von n abhängen (Allgemeine Form: $x_{n+1} = ax_n + b_n$ bzw. $x_{n+1} = a_nx_n + b_n$) lassen sich nur durch komplizierte Lösungsformeln in eine explizite Form bringen. Hier bietet sich der tabellarische bzw. graphische Lösungsweg um so mehr an.

Übung 10: (Bsp. 829 im Buch) :
Eine Krankheit verbreitet sich wie folgt: die Anzahl der neu infizierten Individuen sinkt - von 100 beginnend jedes Jahr um 5 %, 25% der zu Beginn infizierten Personen sterben vor Jahresende des 1. Jahres; dieser Prozentsatz sinkt in den darauffolgenden Jahren jeweils um 1%. Wie entwickeln sich die Krankenzahlen, wenn zu Beginn 5000 Personen erkrankt waren ? Wird die Anzahl der Kranken einen bestimmten Wert nicht unter/überschreiten ? Wieviele Kranke wird es in 20 Jahren geben ? (Hinweise auf die Schwächen des Modells, wie z. Bsp. Nichtberücksichtigung des medizinischen Fortschritts u.s.w. sollten gegeben werden)

Die entsprechende Gleichung zur Beschreibung des Modells lautet:

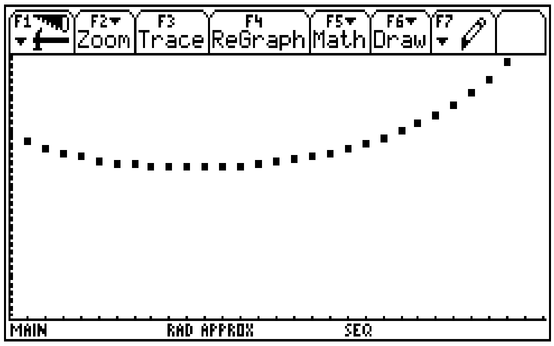
$$x_{n+1} = (0{,}75 + 0{,}01 \cdot n)x_n + 1000 \cdot 0{,}95^n;\ x_o = 5000;$$

Die Tabelle:



n	u6
0.	5000.
1.	4750.
2.	4560.
3.	4414.2
4.	4301.7
5.	4215.1
6.	4149.4
7.	4100.8

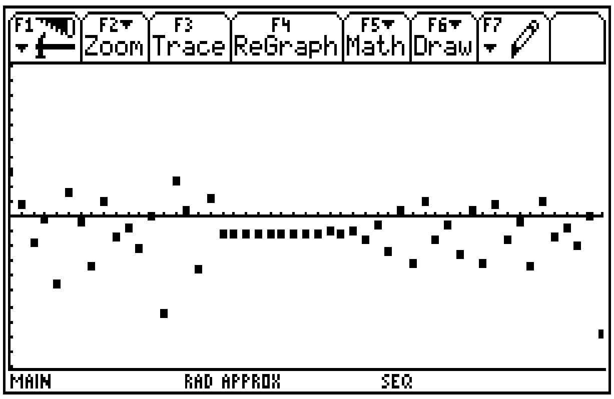
Die Grafik: (n=30)



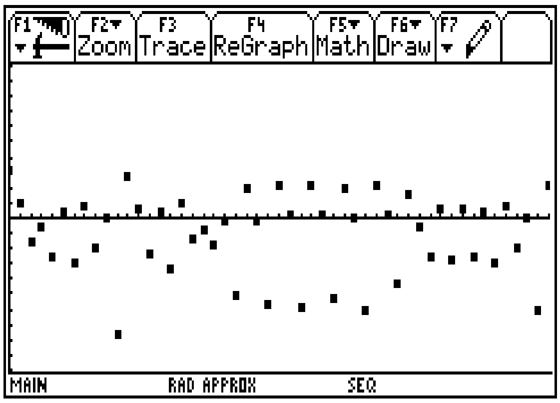
Das heißt, nachdem die Anzahl der Kranken 11 Jahre lang sinkt, steigt sie ab dem 12. Jahr wieder relativ rasch an. Ohne Rechner hätte man sich wahrscheinlich - wie im Buch vorgeschlagen - mit den Werten aus den ersten 10 Jahren begnügt und hätte daraus den Schluß ziehen können, daß die Anzahl der Kranken stetig sinken würde bzw., sich bei einem konstanten Wert um die 4000 einpendelt! So aber erhalten wird diese überraschende Ergebnis .

Übung 11:
Einen Ausflug in Chaotische kann man unternehmen, wenn man die linearen Differenzengleichungen kurz verlässt und z.B. anhand der Gleichung $x_{n+1} = \ln|x_n|; x_o = 1{,}5$ bzw. $x_o = 1{,}6$ den (chaotischen) Verlauf bei nur geringfügiger Abänderung des Anfangsgliedes darstellen läßt:

$x_{n+1} = \ln|x_n|; x_o = 1{,}5$ n = 50



$x_{n+1} = \ln|x_n|; x_o = 1{,}6$, n = 50



2) Systeme von Differenzengleichungen

Wenn in einem Prozeß zwei oder mehrere Größen mit- oder gegeneinander wirken wird als mathematisches Modell oft ein System von Differenzengleichungen herangezogen. Bei Beschränkung auf zwei Variable lassen sich mit dem TI 92 ebenfalls schöne Ergebnisse erzielen. Grundsätzlich geht es hier wieder darum, das Langzeitverhalten des Systems zu beobachten und etwaige Gleichgewichtszustände zu erkennen.

Allgemein wird ein solches System wie folgt beschrieben

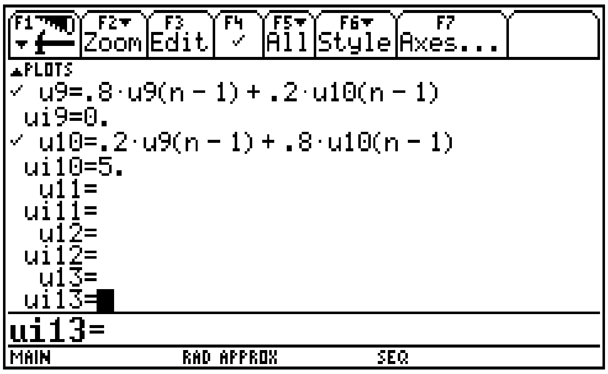
$\mathbf{x_{n+1} = a._n + b._n \,;\, x_o}$

$\mathbf{y_{n+1} = c._n + d.y_n \,;\, y_o}$

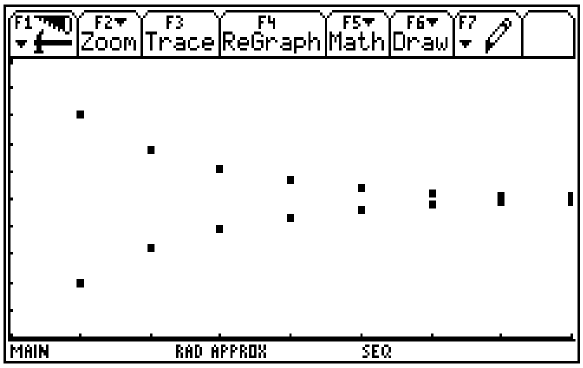
oder in Matrizenschreibweise: $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ Die Vektoren heißen die Zustandsvektoren, die Matrix die Übergangsmatrix A.

Übung 12:Geben Sie das folgende System in den Rechner ein : $\begin{matrix} x_{n+1} = 0{,}8 \cdot x_n + 0{,}2 \cdot y_n \;;\; x_0 = 0 \\ y_{n+1} = 0{,}2 \cdot x_n + 0{,}8 \cdot y_n \;;\; y_0 = 5 \end{matrix}$

Eingabe in den TI 92:



Grafische Darstellung:



Das heißt, das System pendelt sich bei einem Gleichgewichtszustand von jeweils $x_n = y_n = 2{,}5$ ein ! (was auch aus der Tabelle entnommen werden kann !)

Solche Systeme lassen sich aber mit dem TI 92 rechnerisch lösen: man erhält den n-ten Zustandsvektor wie folgt $\vec{z}_n = A^n \cdot \vec{z}_0$, d.h. durch n-faches Potenzieren der Übergangsmatrix und anschließendes Multiplizieren mit dem 0-ten Zustandsvektor.

Dazu gibt man die Matrix A mit Hilfe des Matrixeditors (<APPS>, 6, New, Type:Matrix, Variable: z. Bsp. A1 , Row dimesion: 2, Col dimension: 2) ein. Anschließend genügt es im HOME-Bildschirm $A1^n$ einzugeben und mit dem 0-ten Zustandsvektor .(als einspaltiger Vektor mit eckigen Klammern eingegeben, die Zahlen werden durch einen ; getrennt). zu multiplizieren.

Übung 13: Berechnen Sie $\vec{z}_5$ für das obige System !
Lösung: <APPS>, 6 , New, Matrix, A1,2 ,2; anschließend Eingabe von 0,8 0,2 0,8 0,2 ; Enter;

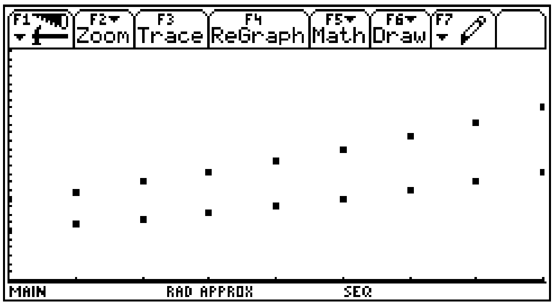
Im HOME- Bildschirm: Eingabe von $A1^5 \cdot [0\,;\,5]$, Enter. Ergebnis: $\begin{bmatrix} 2{,}3056 \\ 2{,}6944 \end{bmatrix}$.

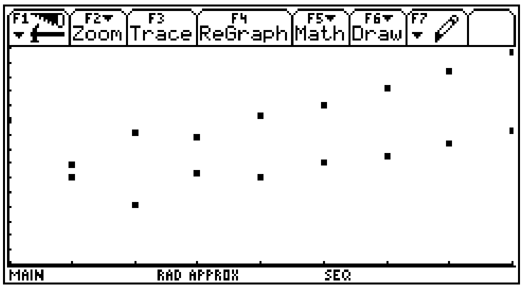
Übung 14: (839 im Buch, carabus mathematicus)
Stellen sie das System von Differenzengleichungen:

$$x_{n+1} = \frac{3}{5}x_n + \frac{4}{5}y_n$$
$$y_{n+1} = \frac{11}{16}x_n$$

mit den Anfangswerten (1) $x_o = 100$, $y_o = 60$, bzw. (2) $x_o = 100$, $y_o = 0$ graphisch dar .

Lösung: (1) (2)





3) Differenzengleichungen 2. Ordnung mit einer Variablen

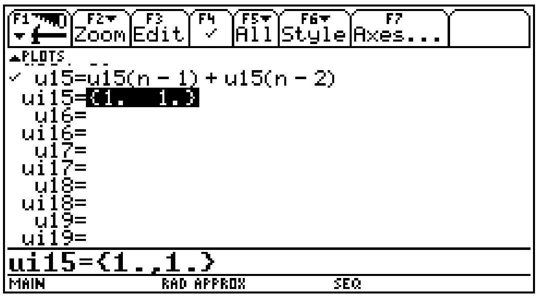
Wenn der Zustand eines Systems nicht nur vom vorigen, sondern auch vom vor-vorigen Zustand abhängt so erhält man als mathematisches Modell des Systems eine Differenzengleichung 2. Ordnung.

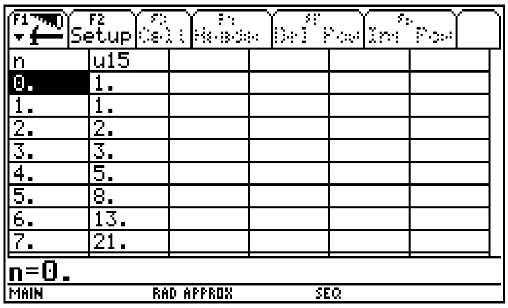
Allgemeine Form: $\mathbf{x_{n+2} = a.x_{n+1} + b.x_n}$. $\mathbf{x_o; x_1}$ **;**

Eines der berühmtesten Beispiele dazu (und historisch gesehen das erste Modell für ein Populationswachtum) führt zur s.g. FIBONACCI-Folge. (vg. Bsp. 853 im Buch)

Die Gleichung dazu lautet : $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$; $x_o = 1$, $x_1 = 1$

Die beiden Startwerte werden dabei als Liste mit geschwungenen Klammern eingegeben:





Als Ergebnis erhält man in der Tabelle (beliebig viele) Werte der FIBONACCI-Folge .

Übung 15: (Bsp. 846 im Buch)

Ermitteln Sie mit Hilfe der Tabelle die Lösungen x_2, x_3, x_4, ...x_7 der Differenzengleichung
$x_{n+2} + 2.x_{n+1} - 15.\ x_n = 0$; $x_o = 0$, $x_1 = -6$

Achtung: als erster Startwert muß in die geschwungene Klammer -6 eingegeben werden !

Lösung: $x_0 = 0$, $x_1 = -6$, $x_2 = 12$, $x_3 = -114$ ....$x_7 = -60000$.