<table>
<tr><th colspan="2">Themenbereich:</th></tr>
<tr><td colspan="2">Extremwertbeispiele mit der Geometrieanwendung des TI-92</td></tr>
<tr><th>Inhalte</th><th>Ziele</th></tr>
<tr><td>Arbeiten mit der Geometrie-Anwendung und dem Data/Matrix-Editor des TI-92.

Geometrische Ermittlung einer Extremstelle in verschiedenen Problemstellungen.</td><td>Zusammenspiel der Geometrieanwendung mit anderen Anwendung des TI-92

Verschiedene Zugänge zum Lösen eines Extremwertbeispiels</td></tr>
<tr><td colspan="2">In den TI-Nachrichten 2/1999 erklärt Gregor Noll in seinem Artikel „Funktionale Zusammenhänge mit Cabri Geometrie II“, wie man Zielfunktionen von Extremwertbeispielen graphisch darstellen und damit das Extremum finden kann. Dies wird auf den TI-92 übertragen. Damit soll auch gezeigt werden, wie sich der Mathematikunterricht durch den Einsatz des TI-92 ändern kann.</td></tr>
</table>

Einleitung

In den TI-Nachrichten 2/1999 erklärt Gregor Noll in seinem Artikel „Funktionale Zusammenhänge mit Cabri Geometrie II“, wie man Zielfunktionen von Extremwertbeispielen graphisch darstellen und damit das Extremum finden kann. Er benutzt dabei die Eigenschaft des Programms, aus der Bewegung eines Objekts eine „Ortskurve“ abzuleiten.

Auf dem TI-92 kann man mit Hilfe der Geometrieanwendung Ähnliches veranschaulichen. Eine Methode funktioniert mit Hilfe des Befehls „Locus“, sie kann am Taschenrechner (fast) analog zum oben erwähnten Artikel durchgeführt werden, ein etwas anderer Zugang kann mit dem Befehl „Collect Data“ erfolgen. Damit will ich mich hauptsächlich beschäftigen.

Übertragen der Daten in den Data/Matrix Editor („Collect Data“)

Folgendes Beispiel soll gerechnet werden:

Ein rechtwinkeliges Dreieck wird einem Kreis (Radius 1,5 cm) so eingeschrieben, dass die Hypotenuse des Dreiecks ein Kreisdurchmesser ist. Welche Länge müssen die Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks haben, damit der Flächeninhalt maximal wird?

Zuerst soll ein von der im Artikel vorgestellten Methode etwas abweichender Zugang dargestellt werden. Mit der Geometrieanwendung werden ein Kreis und ein Dreieck gezeichnet (Abb.1). Es ist günstig, bei der Konstruktion mit eingeschaltetem Gitter zu arbeiten, um die Länge des Durchmessers exakt festlegen zu können. Die Gitterpunkte haben den Abstand 0,5 cm.

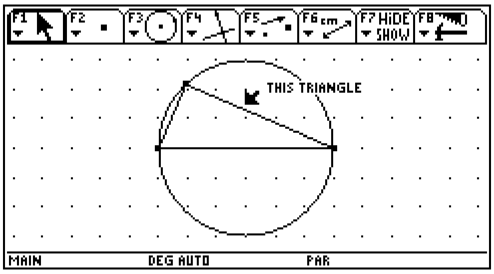


Abb.1

Mit dem Menüpunkt F6-2 („Area“) kann man nun die Fläche des Dreiecks messen, F6-1 („Distance and Length“, „from this point“ „to that point“) liefert den Abstand. Für eine bessere Übersichtlichkeit sind beide Zahlen an den Rand der Zeichenfläche gezogen. (Abb.2)

Mit einer Animation kann man nun einen ersten Überblick gewinnen, wie sich Seitenlänge und Fläche des Dreiecks ändern. Um die Animation auszuführen, wählt man F7-3 („Animation“), geht mit den Pfeilcursor zum Punkt C, hält die „Hand“-Taste gedrückt und zieht mit der Cursortaste nach rechts. Dabei wird eine „Feder" gespannt (Abb.2) und nach dem Loslassen der „Hand“-Taste beginnt die Animation zu laufen. Es ändern sich die Zeichnung sowie die Länge der Seite und der Flächeninhalt (Abb.3).

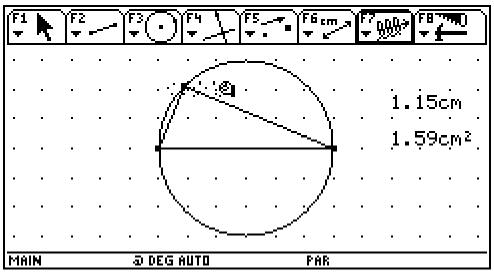


Abb.2

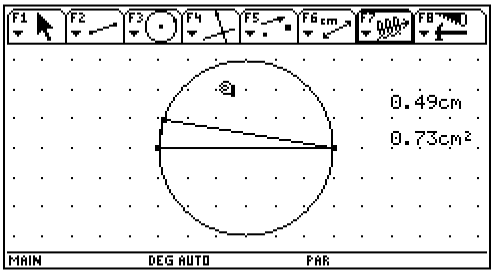


Abb.3

Diese Daten kann man nun mit dem Hilfsmittel F6-7 („Collect Data") speichern (Variable SYSDATA). Dazu müssen zuerst die Eingaben mit F6-7-2 („Define Entry") festgelegt werden. Jeder Wert wird mit ENTER markiert (Abb.4), dabei muss die Reihenfolge beachtet werden. Anschließend kann man mit F6-7-1 („Store Data") die angezeigten Werte in die Variable SYSDATA übertragen. Der TR zeigt die Statusmeldung „Data placed in variable sysdata" an (Abb.5). Führt man nun die oben beschriebene Animation durch, werden alle Daten, die in der Animation durchlaufen werden, in die Variable SYSDATA übertragen. (Achtung: Die Animation muss unmittelbar nach dem Befehl „Store Data" erfolgen!)

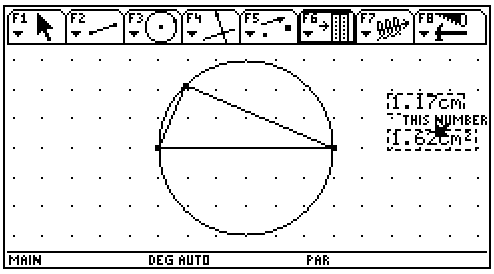


Abb.4

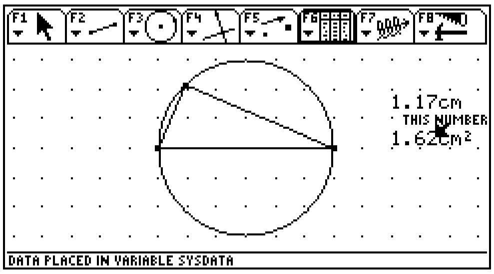
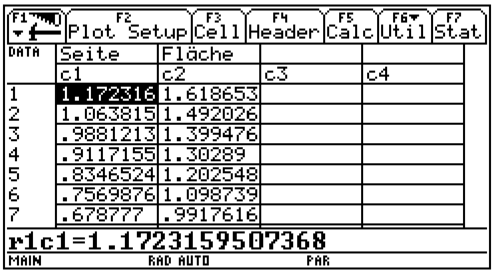


Abb.5

Mit dem Data/Matrix-Editor können die gesammelten Daten eingesehen (Abb.6) und geplottet werden (Abb.7). Deutlich ist in der Zeichnung ein Maximum zu sehen.



DATA	Seite	Fläche		
	c1	c2	c3	c4
1	1.172316	1.618653		
2	1.063815	1.492026		
3	.9881213	1.399476		
4	.9117155	1.30289		
5	.8346524	1.202548		
6	.7569876	1.098739		
7	.678777	.9917616		

r1c1=1.1723159507368

Abb.6

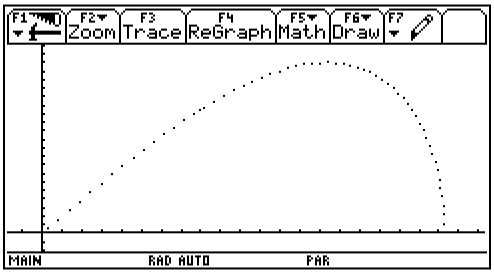


Abb.7

Mit F3 („Trace") kann man in etwa die Seitenlänge bestimmen, für die der Flächeninhalt maximal wird (Abb.8).

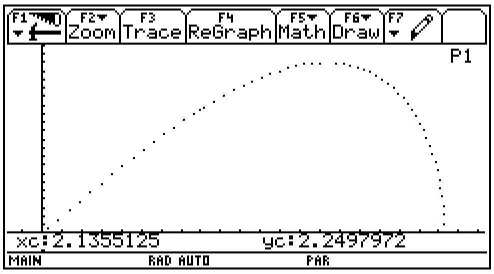


Abb.8

Abschließend soll noch die Gleichung der Funktion bestimmt werden, die die dargestellten Messwerte ergibt. Mit der Hauptbedingung A(a,b) = a·b/2 und der Nebenbedingung $b=\sqrt{9-a^2}$ erhält man die Zielfunktion $A(a) = \frac{a\cdot\sqrt{9-a^2}}{2}$. Mit dem Befehl DrawFunc (F6-2, Variable x) kann man diese Funktion zeichnen und man sieht die Übereinstimmung mit den mit der Geometrieanwendung erhaltenen Daten (Abb.9).

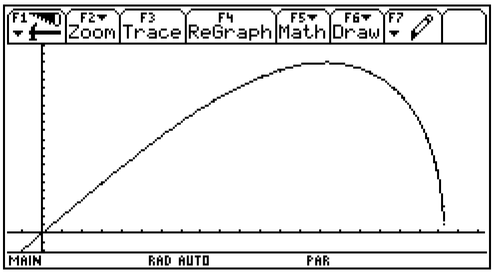


Abb.9

Berechnet man das Maximum mit Hilfe der Differentialrechnung, erhält man für die Seitenlängen $a = b = \frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}$ cm und für den Flächeninhalt A = 2,25 cm^2. Wie man sieht, stimmen die mit der Geometrieanwendung ermittelten Daten mit den exakten Werten überein. (Datei Extrem1.92a)

Konstruktion einer Ortslinie („Locus")

Diese Methode entspricht der im Artikel von Gregor Noll dargestellten. Wie oben zeichnet man einen Kreis mit eingeschriebenem Dreieck, dieses Mal allerdings nicht mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung (Abb.10).

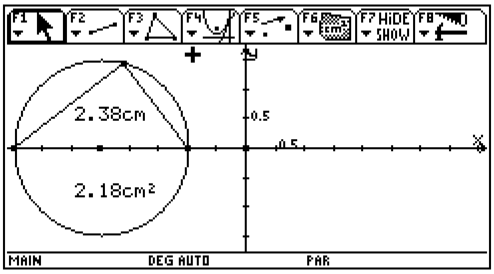


Abb.10

Wieder werden Flächeninhalt und Seitenlänge gemessen. Nun muss man mit dem Befehl F4-9 („Measurement Transfer“) der Wert Seitenlänge auf die x-Achse und der Wert des Flächeninhalts auf die y-Achse übertragen. Es werden dadurch auf den Achsen zwei Punkte gezeichnet, durch die man zwei Hilfsgeraden zeichnet (Abb.11, der Übersichtlichkeit halber wurde das Koordinatensystem nach unten geschoben).

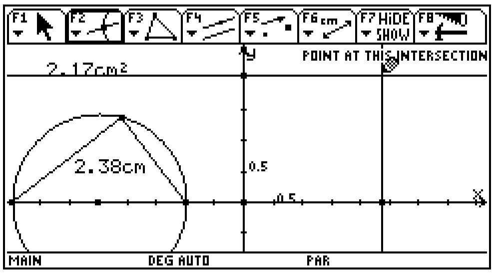


Abb.11

Der Schnittpunkt dieser Geraden wird als Punkt definiert. Ändert man den Punkt C des Dreiecks, so wandert dieser Punkt im Koordinatensystem umher (Abb.12).

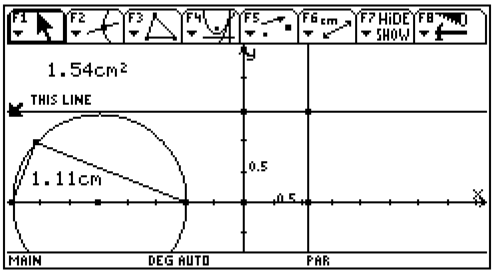


Abb.12

Die Menge aller Punkte kann man sich mit dem Befehl F4-A („Locus“) anzeigen lassen (Abb.13). Die Funktion besitzt ein Maximum. (Datei Extrem1a.92a)

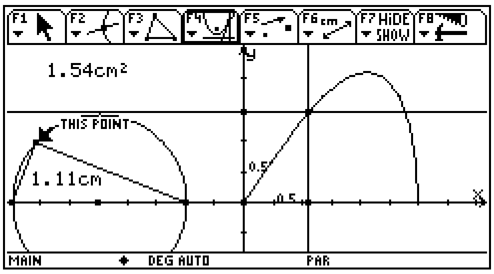


Abb.13

Die Abbildung 14 zeigt die Verallgemeinerung auf beliebige eingeschriebene Dreiecke. (Datei extrem1b.92a)

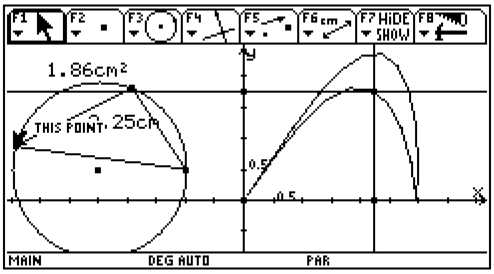


Abb.14

Im Artikel von Gregor Noll wird ein Makro angegeben, um einen Punkt im Koordinatensystem zu konstruieren. Das kann auch am TI-92 nachvollzogen werden (Datei pinkoor.92m). Startobjekte sind ein Koordinatensystem und die beiden Koordinatenwerte.

Konstruktion von Graphen von Funktionstermen

Um die Ortskurve mit einer Funktion zu vergleichen, kann man auch am TR den Funktionsgraphen mit „Calculate“ zeichnen. Hier zeigt sich allerdings ein großer Nachteil des TI-92 im Vergleich zu Cabri Geometry II. Wegen des kleinen Bildschirms und wegen der beschränkten Rechenleistung ist es kaum möglich, die Ortskurve und den Funktionsgraphen gleichzeitig darzustellen.

Daher habe ich den Funktionsgraphen eigens gezeichnet (Abb.15, Datei extrem2.92a). Die Konstruktion erfolgt genauso wie in dem erwähnten Artikel. Abb.16 zeigt einen Zwischenschritt während der Konstruktion.

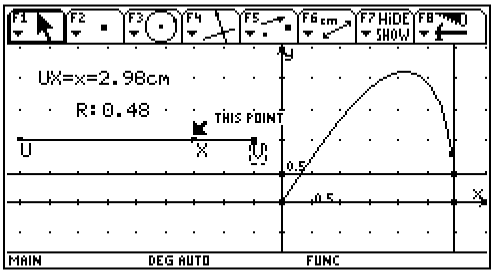


Abb. 15

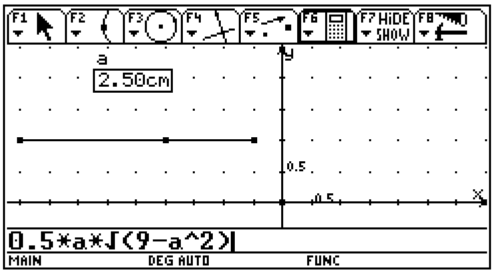


Abb.16

Quadrat und Dreieck

Schreibt man einem Quadrat ein Dreieck ein (Abb.17), so sieht man, dass es kein eindeutiges Maximum gibt (Abb.18). (Datei Extrem3.92a)

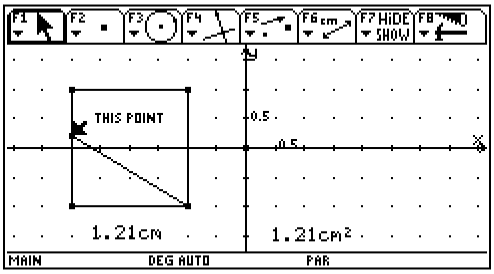


Abb.17

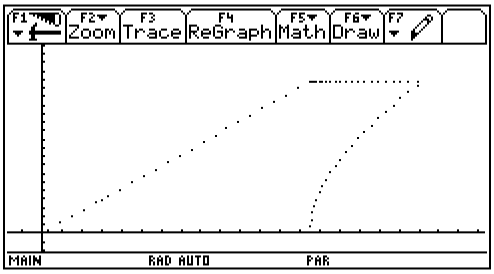


Abb.18

Die Konstruktion mit Hilfe der Ortslinie zeigt Abb.19. (Datei Extrem3a.92a)

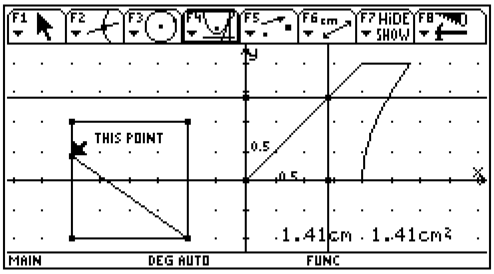


Abb.19

Das Reflexionsgesetz

Nun soll noch das Reflexionsgesetz hergeleitet werden. Wie kommt man auf kürzestem Weg vom Punkt A (auf der y-Achse) zum Punkt B, wenn man einen Umweg über die x-Achse machen soll? Die Konstruktion zeigt Abb.20, x ist der Abstand vom Koordinatenursprung zum Punkt C, zusätzlich wurden noch die Winkel zwischen AC und Lot sowie zwischen Lot und CB gemessen (in Radiant, sonst funktioniert „Collect Data" nicht).

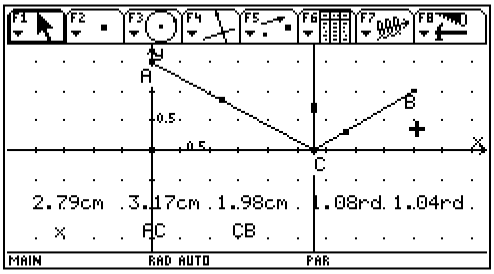
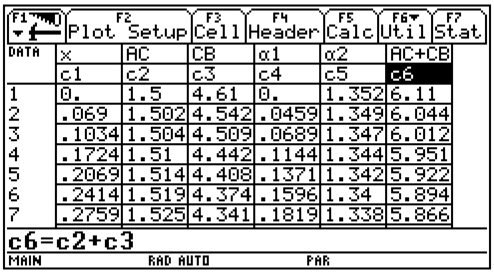


Abb. 20

Mit der oben beschriebenen Methode („Collect Data" und anschließender Animation) erhält man folgende Werte (Abb.21). Für die graphische Darstellung ist es notwendig, die Gesamtstrecke in einer eigenen Spalte auszurechnen (c6=c2+c3).



DATA	x	AC	CB	α1	α2	AC+CB
	c1	c2	c3	c4	c5	c6
1	0.	1.5	4.61	0.	1.352	6.11
2	.069	1.502	4.542	.0459	1.349	6.044
3	.1034	1.504	4.509	.0689	1.347	6.012
4	.1724	1.51	4.442	.1144	1.344	5.951
5	.2069	1.514	4.408	.1371	1.342	5.922
6	.2414	1.519	4.374	.1596	1.34	5.894
7	.2759	1.525	4.341	.1819	1.338	5.866

c6=c2+c3

Abb. 21

Die graphische Darstellung liefert ein Minimum (Abb.22), das man mit F2-9 („Zoom Data") besser sichtbar machen kann (Abb.23). Das Minimum liegt bei etwa x = 2,7 cm.

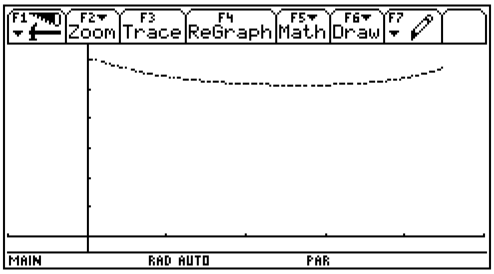


Abb.22

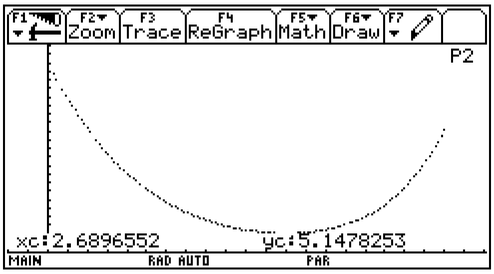
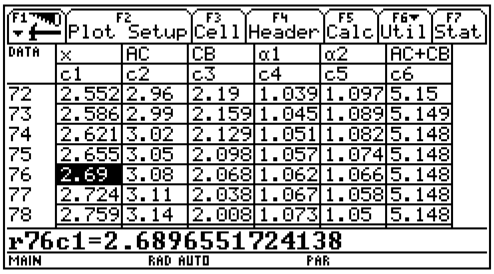


Abb.23

Wie man in der Tabelle überprüfen kann, sind in diesem Fall die beiden Winkel α1 und α2 gleich groß (Abb.24).



DATA	x	AC	CB	α1	α2	AC+CB
	c1	c2	c3	c4	c5	c6
72	2.552	2.96	2.19	1.039	1.097	5.15
73	2.586	2.99	2.159	1.045	1.089	5.149
74	2.621	3.02	2.129	1.051	1.082	5.148
75	2.655	3.05	2.098	1.057	1.074	5.148
76	2.69	3.08	2.068	1.062	1.066	5.148
77	2.724	3.11	2.038	1.067	1.058	5.148
78	2.759	3.14	2.008	1.073	1.05	5.148

r76c1=2.6896551724138

Abb.24

Zuletzt noch die rechnerische Überprüfung des Minimums. Die Zielfunktion lautet $f(x)=\sqrt{2{,}25+x^2}+\sqrt{4+(4{,}5-x)^2}$, mit Hilfe der Differentialrechnung erhält man das Minimum an der Stelle x = 2,7 mit dem Funktionswert f(x) = 5,15.

(Datei Extrem4.92a für die Zeichnung, Datei Extrem4d.92c für die Daten aus Abb.21)

Brechungsgesetz

Ein Lichtstrahl läuft zuerst in Luft vom Punkt A(0/1,5) mit der Geschwindigkeit $c_1 = 3$ und tritt an der x-Achse in ein anderes Medium über, wobei sich die Geschwindigkeit auf $c_2 = 2$ ändert. Der Lichtweg endet im Punkt B(5/–1,5). Wo muss der Lichtstrahl die Grenzfläche passieren, damit die Laufzeit $\frac{AC}{3} + \frac{CB}{2}$ minimal wird?

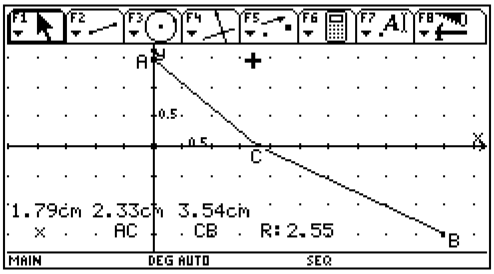
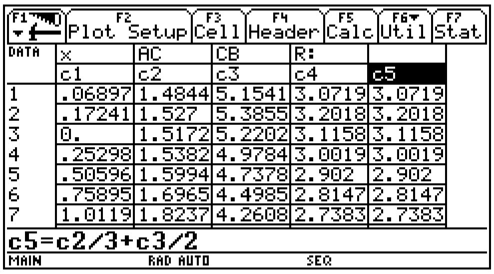


Abb.25

Abb.25 zeigt die Konstruktion, der Wert R wurde mit „calculate“ erhalten. Die mit der Animation erhaltenen Daten zeigt die nächste Abbildung, zur Kontrolle wurde in der letzten Spalte nochmals die Zeit berechnet. Die graphische Darstellung der gesammelten Daten zeigt Abb.27 („Zoom Data“). Das Minimum ist erkennbar.

(Datei Extrem5.92a für die Zeichnung, Datei Extrem5d.92c für die Daten aus Abb.26)



DATA	x	AC	CB	R:	
	c1	c2	c3	c4	c5
1	.06897	1.4844	5.1541	3.0719	3.0719
2	.17241	1.527	5.3855	3.2018	3.2018
3	0.	1.5172	5.2202	3.1158	3.1158
4	.25298	1.5382	4.9784	3.0019	3.0019
5	.50596	1.5994	4.7378	2.902	2.902
6	.75895	1.6965	4.4985	2.8147	2.8147
7	1.0119	1.8237	4.2608	2.7383	2.7383

c5=c2/3+c3/2

Abb.26

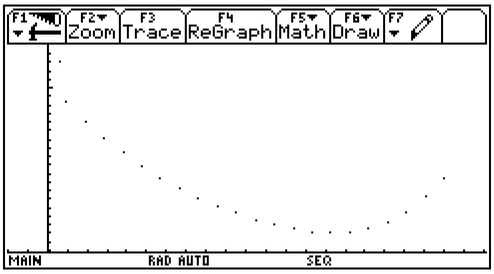


Abb.27

Natürlich kann man auch die Winkel messen und zeigen, dass das Brechungsgesetz gilt (vgl. dazu Station 10 des Stationenbetriebes „Differentialrechnung“).

Ein dem ersten Beispiel ähnliches Java-Applet findet man auf der Web-Seite http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/3/applications.1/index.html. Hier sind auch andere Extremwertbeispiele veranschaulicht.