

5. REALITÄT UND MODELL

Manfred Grote, Dr. Karl-Heinz Keunecke, Detlef Kirmse

Modellierung in der Schule:

Um Vorgänge der Natur, der Gesellschaft oder der Wirtschaft zu verstehen und vorherzusagen, sucht man nach entsprechenden mathematischen Modellen der zugrunde liegenden Prozesse. Bei der Aufstellung von Modellen haben mit der Einführung digital arbeitender Rechner diskrete Verfahren und Modelle einen größeren Stellenwert bekommen, da die Rechner nur mit solchen Verfahren numerische Lösungen errechnen können.

Häufig können die Zustandsgrößen und ihre Änderungsraten eines Prozesses mit einem System von Differenzgleichungen beschrieben werden. Mit diesen kann, ausgehend von Anfangswerten, schrittweise die zeitliche Entwicklung des Systems berechnet werden. Solche Iterationen sind oft viel elementarer als die entsprechenden funktionalen Zusammenhänge. Deshalb ist dieses Verfahren auch für die Schule von großem Interesse. Als Beispiel seien Aufgaben der Zinseszinsrechnung genannt. Sie können durch iterative Berechnungen der Zuwächse mit einem Taschenrechner bereits bei der Einführung der Zinsrechnung (Klasse 7) bearbeitet werden, während für eine algebraische Lösung Kenntnisse der Exponential- und der Logarithmusfunktionen erforderlich sind, die erst 3 Jahre später Gegenstand des Lehrplanes werden.

Man hat für die hier beschriebenen numerischen Operationen sehr unterschiedliche Bezeichnungen:

In der Mathematik spricht man von iterativ oder rekursiv definierte Folgen oder Funktionen oder von Systemen von Differenzgleichungen, mit denen ein zeitlich veränderlicher Prozess beschrieben werden kann. In den Naturwissenschaften und der Wirtschaftlehre bezeichnet man die gleichen Prozesse häufig als dynamische Systeme.

Für die Lösung der zugrunde liegenden Differenzgleichungen benötigt man für realistische Berechnungen die Unterstützung durch einen Rechner. Dabei wird auch in der Schule außerordentlich unterschiedlich vorgegangen. In den Naturwissenschaften und auch in den Wirtschaftswissenschaften verwendet man gerne grafikorientierte Modellbildungswerkzeuge (STELLA, MODUS, POWERSIM oder MOEBIUS). Dabei werden die Größen in einem Prozess, wie Zustand, Rate usw. durch Symbole dargestellt und mit einander verknüpft. Auf diese Weise lassen sich auch komplizierte Systeme leicht beschreiben. Nach der Beschreibung hat man nur noch die geeignete Darstellung des Ergebnisses zu wählen.

Im Mathematikunterricht, in dem das Prinzip und die Erarbeitung des Lösungsverfahrens und nicht das Ergebnis im Vordergrund steht, werden die Iterationen entweder programmiert (Basic, Turbo Pascal), oder mit einer Tabellenkalkulation berechnet. Mit GTR und TC können nicht nur diese Verfahren durchgeführt werden. Sie verfügen auch über Folgeneditoren, in denen die Differenzgleichungen direkt eingegeben werden können. Der zeitliche Verlauf kann dann als Graph oder als Tabelle dargestellt werden.

Hat man ein Modell entwickelt, so muss es sich anschließend im Vergleich mit der Realität bewähren. Notfalls sind Verbesserungen erforderlich.

Realisierung im Unterricht:

Für die Einführung von Modellbildungen in den Unterricht sind sich GTR und TC besonders geeignet, da

- 1) mit einfachen Zusatzgeräten, die Realität durch Messung geeigneter Größen, erfasst werden kann,
- 2) die Modellbildung ebenfalls auf dem Rechner vorgenommen werden kann.

Hierfür stehen bei GTR und TC

- ein Tabellenkalkulationssystem,
- ein Folgeneditor für iterativ oder rekursiv definierte Folgen,
- ein Programmeditor
- und häufig auch ein Werkzeug zur numerischen Bestimmung von Differenzialgleichungen

zur Verfügung.

Es wird vorgeschlagen diese Einsetzbarkeit der Geräte an einem Beispiel zu demonstrieren. Als Experiment wird das Fallen oder besser das Sinken eines Papierkegels in Luft vorgeschlagen. Dieser Vorgang wird durch ein System von zwei Differenzgleichungen beschrieben. Dieses kann man veranschaulichen, indem man den bekannten Zusammenhang zwischen den Größen Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung nutzt. In der ersten Gleichung wird iterativ die Geschwindigkeit aus der Beschleunigung berechnet. Mit der zweiten wird dann aus der in der 1. Gleichung bestimmten Geschwindigkeit der zurückgelegte Weg bestimmt.

Bei der Simulation sollten dann unterschiedliche Ansätze für den Einfluss der Luftreibung gemacht werden. Die so entwickelten Modelle sind mit den Messungen zu vergleichen, sodass zum Abschluss der Sinkflug des Kegels möglichst genau simuliert worden ist. Dabei sollten die vier im vorigen Absatz angegebenen Verfahren zur Lösung der Differenzgleichungen nebeneinander verwendet werden, damit Kolleginnen und Kollegen Gelegenheit haben, die für sich und ihre Klasse geeignete Methode auszusuchen.

Die Autoren haben sich vorgenommen, den hier kurz skizzierten Vorschlag weiter auszuarbeiten, so dass er bei Fortbildungsveranstaltungen verwendet werden kann.