

Qualität im Mathematikunterricht

Ein Evaluations-Projekt des



Items & Auswertungsrichtlinien

Ein Ziel der Projektgruppe 2: „Qualität im Mathematikunterricht“ im Rahmen des österreichischen Computeralgebra-Projektes III: „Neue Medien und Methodik im Mathematikunterricht“ war die Durchführung einer Untersuchung zum Lernerfolgsvergleich von Klassen mit und ohne CAS-unterstütztem Mathematikunterricht am Ende des Schuljahres 1999/2000. Dazu wurden für jede Schulstufe der Oberstufe (5. bis 8. Klasse) jeweils 13 Aufgaben zu einem Test zusammengestellt, der - angelehnt an TIMSS - sowohl Aufgaben zu mathematischem Allgemeinwissen als auch Aufgaben zu schulstufenspezifischem mathematischem Fachwissen aus der aktuellen und den bereits absolvierten Klassen enthält.

Es wurden ausschließlich Aufgaben ausgewählt bzw. entwickelt, die beide folgenden Kriterien erfüllen:

- Kurze, mit und ohne CAS lösbare Aufgaben.
- Aufgaben, die längerfristig beherrscht werden sollen.

Die Auswertung erfolgt durch ein Punktesystem, wobei grundsätzlich auf eine möglichst vollständige Lösung der Aufgaben Wert gelegt wird. Die folgende Zusammenstellung enthält alle verwendeten Items sowie die nötigen Auswertungsrichtlinien.

Allgemeinwissen

A.1 **Ziel:** Eine Formel deuten und auswerten können.

Eine Telefongesellschaft berechnet einen ihrer Tarife nach folgender Regel:

$$K = 0,03m + 18$$

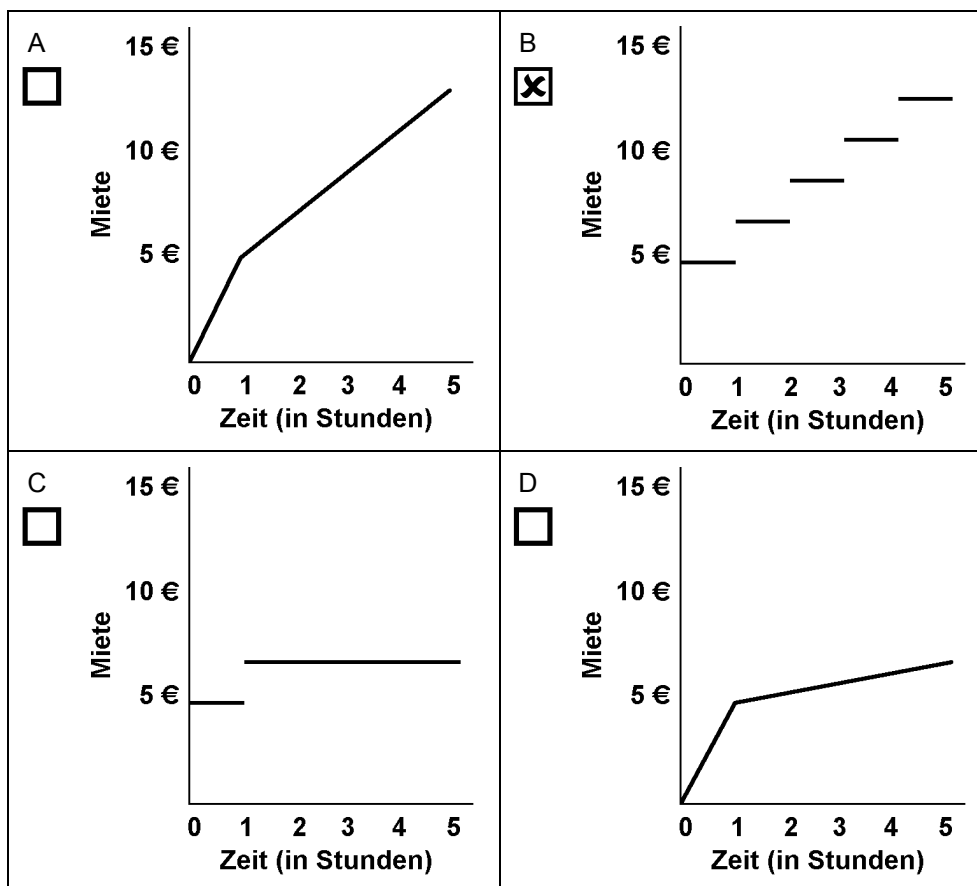
K bezeichnet die monatlichen Kosten in Euro, m ist die Anzahl der Minuten, die in einem Monat telefoniert werden. Diese Regel bedeutet, daß für jede zusätzliche Minute die monatlichen Kosten um wie viele Euro anwachsen?

<input type="checkbox"/> 18 €	<input checked="" type="checkbox"/> 0,03 €	<input type="checkbox"/> 18,03 €	<input type="checkbox"/> €
-------------------------------	--	----------------------------------	----------------------------------

- **Für diese Aufgabe ist ein Punkt zu vergeben, wenn die angegebene Alternative als einzige angekreuzt wurde.**

A.2 **Ziel:** Graphen interpretieren können (Quelle: TIMSS).

- a) In einem Park werden Fahrräder vermietet. Die erste Stunde (oder ein Teil davon) kostet 5 €, jede weitere angefangene Stunde kostet 2 €. Welches Diagramm zeigt dies?



- Für die Teilaufgabe (a) ist ein Punkt zu vergeben, wenn die angegebene Alternative als einzige angekreuzt wurde.

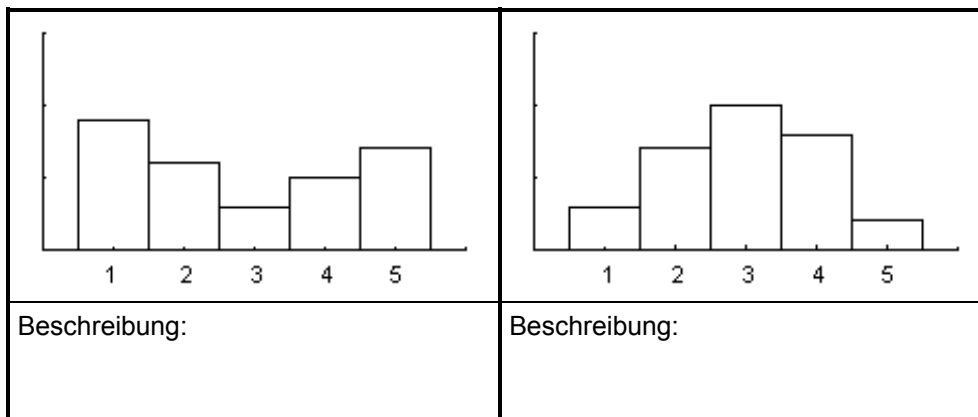
- b) Wähle eines der übrigen Diagramme und beschreibe die hier dargestellte Preisgestaltung mit Worten. Vergiß nicht anzugeben, welches Diagramm (A, B, C, D) du gewählt hast.

Die in Diagramm dargestellte Preisgestaltung bedeutet:

- Für die Teilaufgabe (b) ist ein Punkt zu vergeben, wenn die gewählte Alternative sinngemäß folgendermaßen beschrieben wurde:
 - A** *Genau Abrechnung für beliebig kleine Zeiten; nach der ersten Stunde verbilligter Tarif.*
 - B** *Die erste Stunde (oder ein Teil davon) kostet 5 €, jede weitere angefangene Stunde kostet 2 €.*
 - C** *Die erste Stunde (oder ein Teil davon) kostet 5 €, wird diese Zeit (beliebig lange) überschritten, bezahlt man 7 €.*
 - D** *Genau Abrechnung für beliebig kleine Zeiten; nach der ersten Stunde verbilligter Tarif.*

A.3 **Ziel:** Graphen interpretieren können.

Die Ergebnisse zweier Schularbeiten einer Klasse mit 30 Schülern werden jeweils durch ein Histogramm grafisch dargestellt. Beschreibe mit Worten, wie die beiden Arbeiten insgesamt ausgefallen sind.

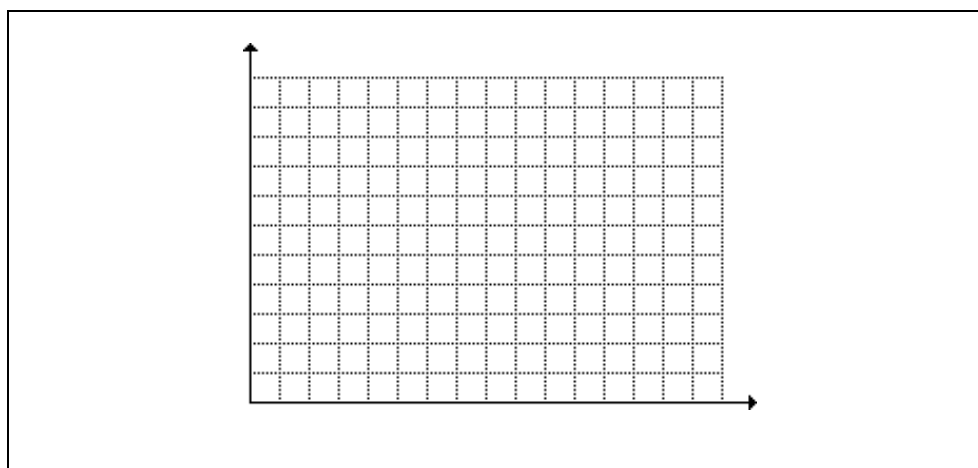


Bei dieser Aufgabe können **2 Punkte** erreicht werden:

- Ein Punkt ist zu vergeben, wenn die beiden Beschreibungen jeweils die wesentliche Eigenschaft der Verteilung beinhalten (viele gute und schlechte Arbeiten, aber wenig mittlere bzw. umgekehrt).
- Ein weiterer Punkt ist zu vergeben, wenn im Text ein Hinweis auf annähernd gleiche Mittelwerte enthalten ist.

A.4 **Ziel:** Einen Sachverhalt grafisch - mit Skalierung - darstellen können (Quelle: TIMSS).

Zeichne in das vorgegebene Koordinatensystem einen Graphen ein, der die Beziehung zwischen der Körpergröße einer Person und ihrem Alter vom Zeitpunkt der Geburt bis 30 Jahren darstellt. Vergiß nicht, die Grafik zu beschriften und auf jeder Achse einen realistischen Maßstab einzutragen.



- Für diese Aufgabe ist nur dann **ein Punkt** zu vergeben, wenn der Graph alle folgenden Eigenschaften aufweist:
 - beide Achsen müssen sinnvoll beschriftet bzw. skaliert sein;
 - $f(0) > 0$;
 - f monoton wachsend;
 - bei ca. 20 Jahren soll ein „Plateau“ erreicht sein.

A.5 **Ziel:** Mit Prozenten hantieren können.

Laut Statistik leiden ca. 8% aller Männer Europas an Rotgrünblindheit. Wie viele Burschen einer Klasse mit 25 männlichen Schülern sollten demnach von dieser Fehlsichtigkeit betroffen sein?

2

- Für diese Aufgabe ist ein Punkt zu vergeben, wenn „2“ eingetragen wurde.

A.6 **Ziel:** Mit Prozenten hantieren können (Quelle: TIMSS).

Fachleute sagen, daß bei einem Viertel aller schweren Fahrradunfälle Kopfverletzungen auftreten und daß 80% aller Kopfverletzungen tödlich sind.

Wieviel Prozent aller schweren Fahrradunfälle sind mit tödlichen Kopfverletzungen verbunden?

20%

- Für diese Aufgabe ist ein Punkt zu vergeben, wenn „20%“ eingetragen wurde.

A.7 **Ziel:** Mit Prozenten hantieren können.

Wo kauft man günstiger?

Geschäft A: Preis der Ware in Schilling → 10% Rabatt → Umrechnung in Euro.

Geschäft B: Preis der Ware in Schilling → Umrechnung in Euro → 10% Rabatt.

<input type="checkbox"/> A ist günstiger.	<input type="checkbox"/> B ist günstiger.	<input checked="" type="checkbox"/> Beide sind gleich.
---	---	--

- Für diese Aufgabe ist ein Punkt zu vergeben, wenn die angegebene Alternative als einzige angekreuzt wurde.

A.8 **Ziel:** Die mittlere Geschwindigkeit bestimmen können.

Von A nach B sind es 60 km. Ein Auto fährt mit 60 km/h von A nach B und mit 120 km/h von B nach A zurück. Mit welcher mittleren Geschwindigkeit war das Auto unterwegs?

<input checked="" type="checkbox"/> 80 km/h	<input type="checkbox"/> 90 km/h	<input type="checkbox"/> km/h
---	----------------------------------	-------------------------------------

- Für diese Aufgabe ist ein Punkt zu vergeben, wenn die angegebene Alternative als einzige angekreuzt wurde.

5. Klasse

5.1 **Ziel:** Einen gegebenen Text in eine Gleichung übersetzen können.

Beschreibe den folgenden Sachverhalt durch eine Gleichung mit *einer* Unbekannten:

Die Fläche eines rechteckigen Grundstücks, dessen Breite $\frac{3}{4}$ seiner Länge ausmacht, beträgt 675 m^2 .

Die Gleichung lautet:

$$x \cdot \frac{3}{4} \cdot x = 675$$

- Für diese Aufgabe ist ein Punkt zu vergeben, wenn die oben genannte oder eine äquivalente Gleichung eingetragen wurde.

5.2 **Ziel:** Ein einfaches Gleichungssystem lösen können.

Berechne die Unbekannten in folgendem Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l} 3x + y = 20 \\ x - y = 8 \end{array}$$

$$x = 7$$

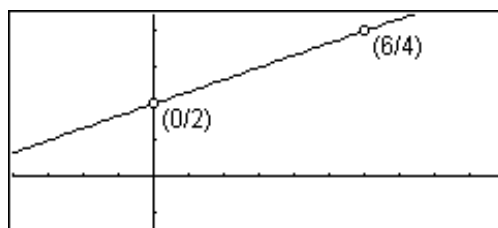
$$y = -1$$

- Für diese Aufgabe ist nur dann ein Punkt zu vergeben, wenn beide Unbekannten richtig berechnet wurden.

5.3 **Ziel:** Eine Geradengleichung aufstellen können.

Eine Gerade geht durch die Punkte P(0/2) und Q(6/4).

- Wie lautet ihre Gleichung?
- Wie groß ist ihre Steigung?



Die Geradengleichung lautet:

$$y = \frac{1}{3} \cdot x + 2$$

Die Steigung der Geraden beträgt:

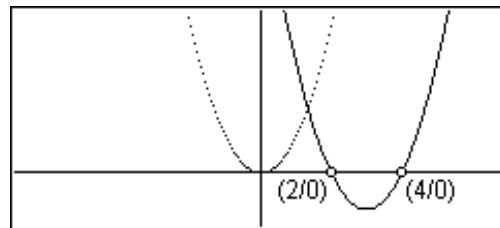
$$\frac{1}{3}$$

- Für die Teilaufgabe (a) ist ein Punkt zu vergeben, wenn die oben genannte oder eine äquivalente Gleichung (eventuell in Vektorform) eingetragen wurde.
- Für die Teilaufgabe (b) ist ein Punkt zu vergeben, wenn der oben genannte Wert eingetragen wurde.

5.4 **Ziel:** Die Faktorisierung einer quadratischen Gleichung wissen und anwenden können.

Die quadratische Parabel $y = x^2$ (gepunktet) ist im Koordinatensystem nach rechts unten verschoben. $N_1 (2/0)$ und $N_2 (4/0)$ sind die Nullstellen der neuen Kurve.

- Wie lautet die Gleichung der neuen Kurve?
- Welche Koordinaten hat ihr Scheitel?

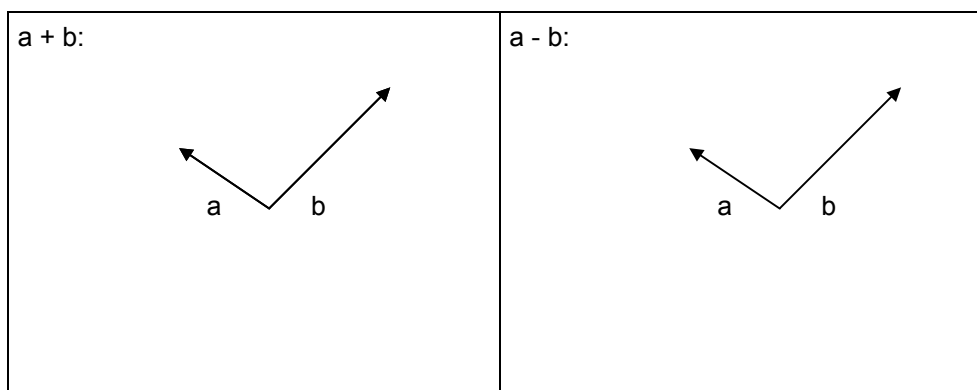


Die neue Parabelgleichung lautet: $y = (x - 2) \cdot (x - 4)$	Ihr Scheitel hat die Koordinaten: $S(3/-1)$
--	--

- Für die Teilaufgabe (a) ist ein Punkt zu vergeben, wenn die oben genannte oder eine äquivalente Gleichung eingetragen wurde.
- Für die Teilaufgabe (b) ist nur dann ein Punkt zu vergeben, wenn beide Koordinaten richtig berechnet wurden.

5.5 **Ziel:** Elementare Rechenoperationen mit Vektoren geometrisch deuten und ausführen können.

Gegeben sind 2 Vektoren a und b. Konstruiere



- Für die Teilaufgabe (a) ist ein Punkt zu vergeben, wenn der Summenvektor richtig eingezeichnet wurde.
- Für die Teilaufgabe (b) ist ein Punkt zu vergeben, wenn der Differenzvektor richtig eingezeichnet wurde.

6. Klasse

6.1 **Ziel:** Potenzen richtig deuten können.

a) Schreibe folgende Ausdrücke als Zehnerpotenz:

ein Hundertstel = 10^{-2}	zehntausend = 10^4	eine Million = 10^6
-----------------------------	----------------------	-----------------------

- Für die Teilaufgabe (a) ist nur dann ein Punkt zu vergeben, wenn alle Zehnerpotenzen richtig eingetragen wurden.

b) Ergänze folgende Tabelle:

Potenz	Bruch / Wurzel	Numerischer Wert
$8^{-1} = 2^{-3}$	$\frac{1}{8}$	0,125
10^{-3}	$\frac{1}{1000}$	0,001
$8^{-\frac{2}{3}}$	$\frac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{4}$	0,25
$\frac{1}{8^3} = 2$	$\sqrt[3]{8}$	2

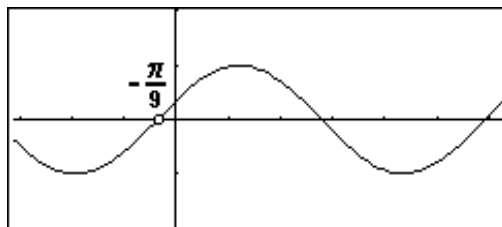
Bei Teilaufgabe (b) können 4 Punkte erreicht werden:

- Pro Zeile ist nur dann ein Punkt zu vergeben, wenn jeweils beide freien Felder richtig ausgefüllt wurden.

6.2 **Ziel:** Eigenschaften der Winkelfunktionen kennen.

Stelle die gegebene Kurve

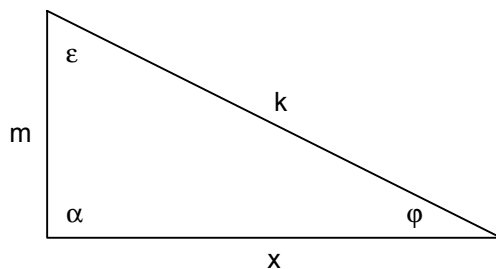
- a) als Sinus-
b) als Cosinusfunktion dar:



$y = \sin \left(x + \frac{\pi}{9} \right) = \sin \left(x - \frac{17\pi}{9} \right)$	$y = \cos \left(x + \frac{29\pi}{18} \right) = \cos \left(x - \frac{7\pi}{18} \right)$
---	--

- Für die Teilaufgabe (a) ist ein Punkt zu vergeben, wenn eine der angegebenen Gleichungen eingetragen wurde.
- Für die Teilaufgabe (b) ist ein Punkt zu vergeben, wenn eine der angegebenen Gleichungen eingetragen wurde.

6.3 **Ziel:** Eigenschaften der Winkelfunktionen kennen.



$\tan \varepsilon = \frac{x}{m}$	$\sin \varphi = \frac{m}{k}$	$\cos \alpha = 0$
----------------------------------	------------------------------	-------------------

Bei dieser Aufgabe können 2 Punkte erreicht werden:

- Ein Punkt ist zu vergeben, wenn sowohl $\tan \varepsilon$ als auch $\cos \varphi$ richtig eingetragen wurden.
- Ein weiterer Punkt ist zu vergeben, wenn auch $\sin \alpha$ richtig eingetragen wurde.

6.4 **Ziel:** Eigenschaften der Winkelfunktionen kennen.

Ergänze die Winkel:

$\cos (27^\circ) = \cos (333^\circ) = \sin (63^\circ) = \sin (117^\circ) = \sin (423^\circ)$
--

Begründe jede deiner Antworten durch eine Skizze.

Bei dieser Aufgabe können 5 Punkte erreicht werden:

- Ein Punkt ist zu vergeben, wenn alle Winkelwerte in obiger Zeile (ohne Einschränkung auf einen bestimmten Quadranten oder das Vorzeichen) richtig eingetragen wurden.
- Je ein weiterer Punkt ist für jede richtige, aussagekräftige Skizze zu vergeben.

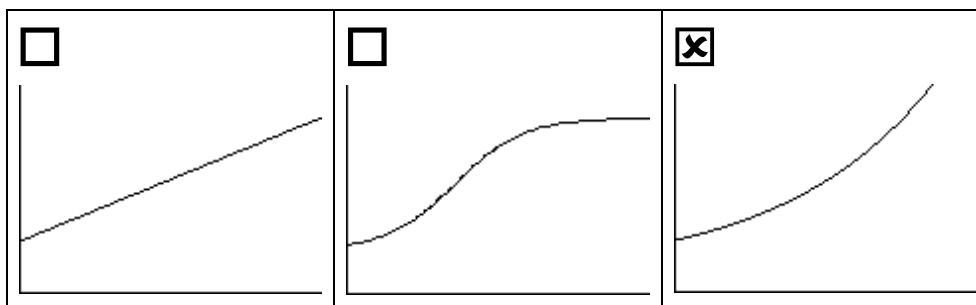
6.5 **Ziel:** Lineares und exponentielles Wachstum unterscheiden können.

a) 30 000 € liegen auf einem Sparbuch mit 3% Zinsen. Das Guthaben nach 2 Jahren beträgt

<input checked="" type="checkbox"/> 31 827 €	<input type="checkbox"/> 31 800 €	<input type="checkbox"/> 39 000 €	<input type="checkbox"/> €
--	-----------------------------------	-----------------------------------	----------------------------------

- Für die Teilaufgabe (a) ist ein Punkt zu vergeben, wenn die angegebene Alternative als einzige angekreuzt wurde.

b) Welcher Graph beschreibt am ehesten das Wachstum des Kapitals?



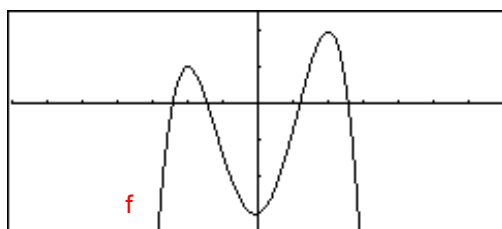
- Für die Teilaufgabe (b) ist ein Punkt zu vergeben, wenn die angegebene Alternative als einzige angekreuzt wurde.

7. Klasse

7.1 **Ziel:** Grundlegende Begriffe in Zusammenhang mit Funktionen kennen.

Gegeben ist eine reelle Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Zeichne in ihrem Graphen (soweit vorhanden) folgende Merkmale jeweils an mindestens einer Stelle ein:

- globales bzw. absolutes Maximum (Max)
- lokales bzw. relatives Minimum (min)
- Wendepunkt (W)
- Nullstelle (N)
- Fixpunkt (F)

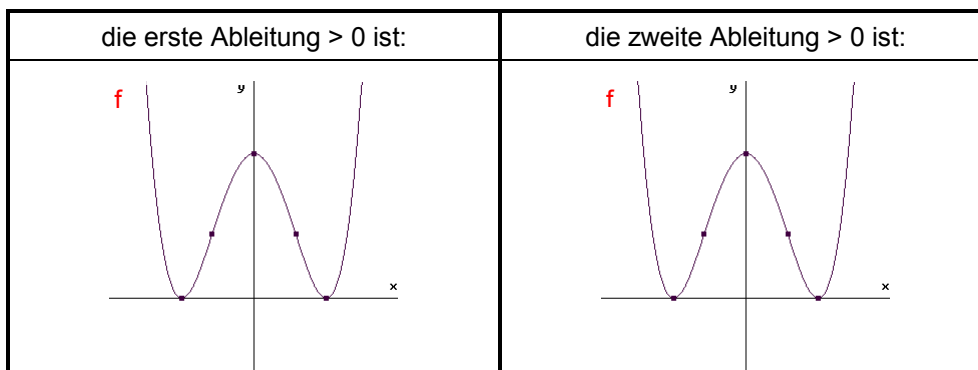


Bei dieser Aufgabe können 5 Punkte erreicht werden:

- Pro Teilaufgabe ist je ein Punkt zu vergeben, wenn mindestens eine richtige Markierung eingezeichnet wurde.

7.2 **Ziel:** Die geometrische Bedeutung der Ableitung kennen.

Kennzeichne mit Farbe jene Bereiche der gegebenen Funktion f , wo



Bei dieser Aufgabe können 2 Punkte erreicht werden:

- Pro Teilaufgabe ist ein Punkt zu vergeben, wenn jeweils der richtige Bereich (entweder als Kurvenstück oder als Intervall auf der x -Achse) richtig markiert wurde.

7.3 **Ziel:** Die Bedeutung der Ableitung kennen und richtig schließen können.

a) Wenn bei $x = x_0$ ein Wendepunkt vorliegt, dann ist $y''(x_0) = 0$.

<input checked="" type="checkbox"/> immer	<input type="checkbox"/> manchmal	<input type="checkbox"/> nie
---	-----------------------------------	------------------------------

- Für die Teilaufgabe (a) ist ein Punkt zu vergeben, wenn die angegebene Alternative als einzige angekreuzt wurde.

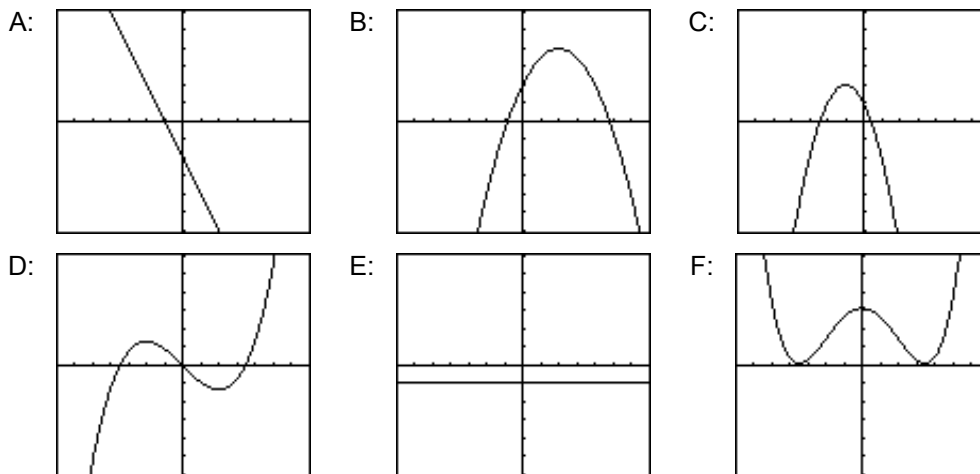
b) Wenn $y''(x_0) = 0$, dann ist bei $x = x_0$ ein Wendepunkt.

<input type="checkbox"/> immer	<input checked="" type="checkbox"/> manchmal	<input type="checkbox"/> nie
--------------------------------	--	------------------------------

- Für die Teilaufgabe (b) ist ein Punkt zu vergeben, wenn die angegebene Alternative als einzige angekreuzt wurde.

7.4 **Ziel:** Die geometrische Bedeutung der Ableitung kennen (Quelle: Mathe Online).

Welches Bild gehört wohin?



f_1	f_2	f_3
	f_2 B	f_3 F
f_1' C		f_3' D
f_1'' A	f_2'' E	

Bei dieser Aufgabe können **3 Punkte** erreicht werden:

- Pro richtig ausgefüllter Spalte ist ein Punkt ist zu vergeben.

7.5 **Ziel:** Den relativen Anteil von relativer Häufigkeit unterscheiden können.

Beim Werfen einer Münze gibt es nur zwei mögliche Versuchsergebnisse (Zahl nach oben oder Zahl nach unten), somit ist die Aussage

$$\text{Die Wahrscheinlichkeit von „Zahl nach oben“} = \frac{1}{2}$$

sinnvoll.

- a) Wirft man anstatt einer Münze einen Reißnagel, gibt es ebenfalls nur zwei mögliche Versuchsergebnisse (Spitze nach oben oder Spitze schräg nach unten). Warum ist hier die Aussage

$$\text{Die Wahrscheinlichkeit von „Spitze nach oben“} = \frac{1}{2}$$

nicht sinnvoll?

Die Aussage ist nicht sinnvoll, weil:

- **Für die Teilaufgabe (a) ist ein Punkt zu vergeben, wenn die angegebene Antwort sinngemäß wie folgt lautet:**
 - ... **der Reißnagel unsymmetrisch ist.**
 - ... **die beiden Versuchsausgänge nicht gleich oft auftreten werden.**
 - ... **der Schwerpunkt nicht in der Mitte liegt.**

- b) Wie könnte man auch für den Wurf eines Reißnagels zu einer sinnvollen Aussage über die Wahrscheinlichkeit von „Spitze nach oben“ kommen?

--

- **Für die Teilaufgabe (b) ist ein Punkt zu vergeben, wenn die angegebene Antwort sinngemäß wie folgt lautet:**
 - **Man müßte eine Versuchsserie durchführen und die Häufigkeiten erfassen.**

8. Klasse

8.1 **Ziel:** Eigenschaften von Stammfunktionen kennen.

Welche der angegebenen Funktionen sind Stammfunktion von $f: y = \frac{1}{x}$?

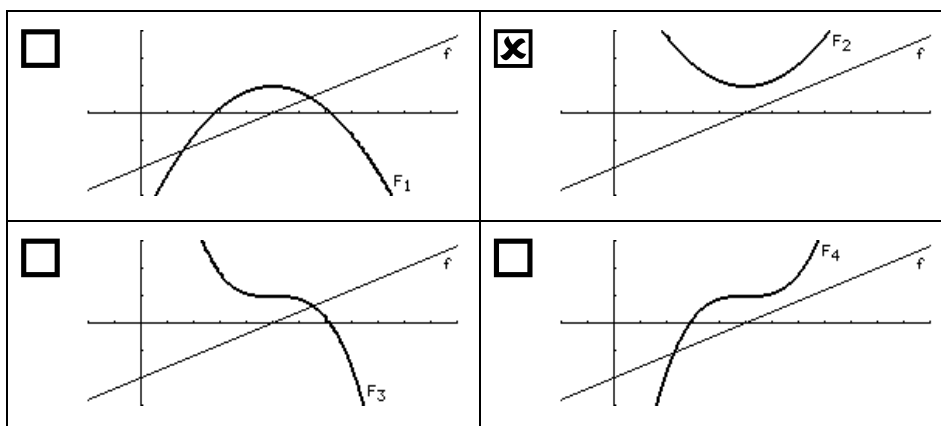
<input checked="" type="checkbox"/> $y = \ln x$	<input checked="" type="checkbox"/> $y = \ln x + 2$	<input type="checkbox"/> $y = \ln (x + 2)$	<input checked="" type="checkbox"/> $y = \ln 2x$
---	---	--	--

Bei dieser Aufgabe können 2 Punkte erreicht werden:

- **Ein Punkt ist zu vergeben, wenn sowohl die erste als auch die zweite Stammfunktion richtig angekreuzt wurden.**
- **Ein weiterer Punkt ist zu vergeben, wenn auch die letzte Stammfunktion richtig angekreuzt wurde.**

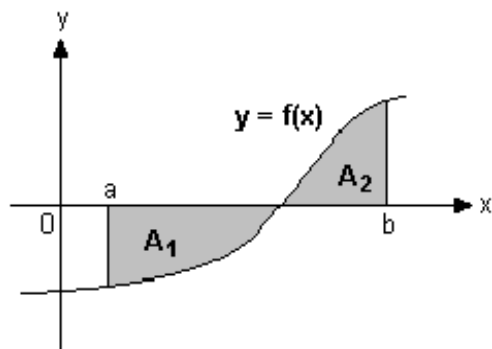
8.2 **Ziel:** Zusammenhänge zwischen Funktion und Stammfunktion analysieren können.

Welche der Funktionen F_i kommt (kommen) als Stammfunktion von f in Frage?



- Für diese Aufgabe ist ein Punkt zu vergeben, wenn die angegebene Alternative als einzige angekreuzt wurde.

8.3 **Ziel:** Zwischen Flächeninhalt und Wert des Integrals unterscheiden können (Quelle: TIMSS).



Die Figur zeigt den Graphen von $y = f(x)$. A_1 ist die Fläche, die von der x -Achse, $x = a$ und $y = f(x)$ begrenzt wird. A_2 ist die Fläche, welche von der x -Achse, $x = b$ und $y = f(x)$ begrenzt wird.

Dabei ist $a < b$ und $0 < A_2 < A_1$. Der Wert von $\int_a^b f(x) dx$ ist

<input type="checkbox"/> $A_1 + A_2$	<input type="checkbox"/> $A_1 - A_2$	<input checked="" type="checkbox"/> $A_2 - A_1$	<input type="checkbox"/> $ A_1 - A_2 $
--------------------------------------	--------------------------------------	---	--

- Für diese Aufgabe ist ein Punkt zu vergeben, wenn die angegebene Alternative als einzige angekreuzt wurde.

8.4 **Ziel:** Die Bedeutung von Mittelwert und Standardabweichung verstehen (Quelle: TIMSS).

Der Mittelwert einer Stichprobe beträgt $\mu = 5$ und seine Standardabweichung beträgt $\sigma = 1$. Falls zu jedem Element dieser Stichprobe 10 addiert wird, was passiert mit Mittelwert und Standardabweichung?

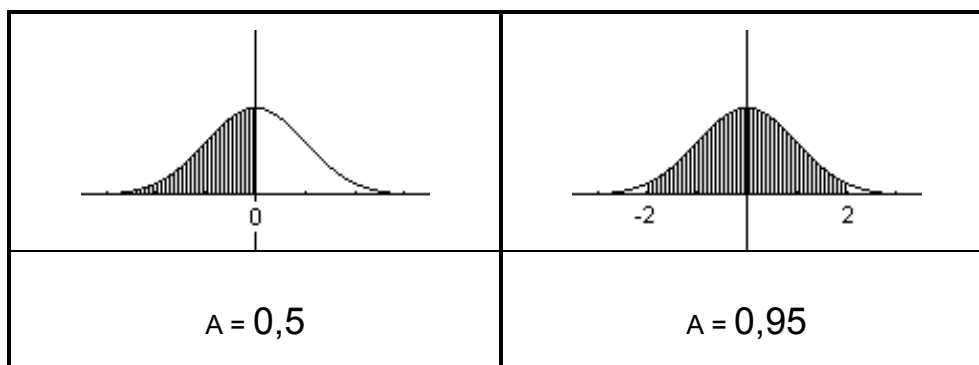
Der Mittelwert	Die Standardabweichung
<input type="checkbox"/> bleibt gleich	<input checked="" type="checkbox"/> bleibt gleich
<input checked="" type="checkbox"/> wird größer um 10	<input type="checkbox"/> wird größer um
<input type="checkbox"/> wird kleiner um	<input type="checkbox"/> wird kleiner um

Bei dieser Aufgabe können 2 Punkte erreicht werden:

- Ein Punkt ist zu vergeben, wenn in der ersten Spalte sowohl die richtige Alternative angekreuzt als auch der Wert „10“ richtig eingetragen wurde.
- Ein weiterer Punkt ist zu vergeben, wenn auch in der zweiten Spalte die richtige Alternative angekreuzt wurde.

8.5 **Ziel:** Die Normalverteilung und ihre Standardabweichung verstehen.

Die folgenden Diagramme zeigen jeweils die Kurve der standardisierten Normalverteilung (Mittelwert $\mu = 0$, Standardabweichung $\sigma = 1$). Wie groß ist jeweils die schraffierte Fläche?



Bei dieser Aufgabe können 2 Punkte erreicht werden:

- Pro richtig ausgefüllter Spalte ist ein Punkt ist zu vergeben.