Analysisunterricht in vier Schritten

Im schulischen Analysisunterricht geht es in erster Linie um zwei Begriffe: um den Begriff der Änderung (um den sich die Differentialrechnung - 7. Klasse - dreht) und den Begriff der Kumulierung (um den sich die Integralrechnung - 8.Klasse - dreht). Beide Begriffe treten aber schon früher im Unterricht auf und zwar beim Kapitel‚Grenzprozesse und reelle Zahlen‘ - 6.Klasse - , das der Einführung in die Analysis dienen soll. Üblicherweise werden im Rahmen dieses Abschnitts Folgen und hier v.a. diskrete Wachstumsmodelle betrachtet und das sowohl mit rekursiven als auch mit expliziten Darstellungen. Ziel ist es dabei, die Änderungen einer Zustandsgröße zu beschreiben, Zuwachs und Abnahme vorherzusagen.
Ein langfristig angelegter Analysisunterricht - der dem aktuellen Lehrplan entspricht, wenn auch dieser frei interpretiert wird, wie dies bei einem Rahmenlehrplan möglich ist - kann somit in vier Stufen gesehen werden:

Stufe 1: Propädeutik der Analysis: Änderung und Kumulierung bei Wachstumsprozessen
Grundbegriffe: Iteration, mittlere Änderung in einem Zeitintervall, zeit- und zustandsabhängige Zunahme /Abnahme, diskrete und kontinuierliche Modelle
(Für eine erste Skizze - die aber die Anfänge der 10.Jahrgangsstufe - in einen größeren Rahmen einbettet - siehe: LECHNER, 1998)

Stufe 2: Der Begriff der Änderung: Differentialrechnung
Grundbegriffe: Mittlere bzw. momentane (lokale) Änderung (Differenzenquotient, Differentialquotient).
(Die wesentlichen Schritte sind in diesem Kommentar unter Abschnitt 1 ausgeführt.)

Stufe 3: Begriff der Kumulierung: Integralrechnung
Grundbegriffe: Zustandsänderungen, Flächeninhalte, Volumina, Bogenlängen, Mantelflächen, u.a. als Produktsummen. Integral als unendliche Summe von Produkten mit einem unbegrenzt kleinen und einem sich verändernden Faktor. Näherungsweise und exakte Berechnung dieser Produktsummen.
(Die wesentlichen Schritte sind in diesem Kommentar unter Abschnitt 2 ausgeführt.)

Stufe 4: Modellbildung in der Analysis: Änderung und Kumulierung in der Systemdynamik
Grundbegriffe: Zustandsgrößen und Zustandsänderungen. (Diese können von der Zeit, vom Zustand selbst und von anderen Zuständen abhängig sein.)
Differenzen- und Differentialgleichungen als Mittel zur diskreten bzw. kontinuierlichen Beschreibung von Systemen.
Nutzung der entwickelten analytischen Kenntnisse und Fähigkeiten zur Bearbeitung anwendungsorientierter bzw. realitätsnaher mathematischer Modelle.
(Siehe auch Kommentar von H.URBAN zur Systemdynamik)

W.BLUM hat vor kurzem sieben Perspektiven für einen „Analysis-Unterricht 2005" formuliert (W.BLUM, 2000):

- Perspektive 1: Mehr präformale Mathematik

Im Analysisunterricht sollte - beim Begriffsbilden wie beim Beweisen - mehr präformal gearbeitet werden, ohne dabei Abstriche an Strenge zu machen. Schüler sollten angemessene *Grundvorstellungen* insbesondere vom Funktions-, Ableitungsbegriff- und Integralbegriff erwerben.

- Perspektive 2: Mehr Realitätsbezüge

Im Analysisunterricht sollten mehr Realitätsbezüge hergestellt werden, und Schüler sollten mehr Gelegenheit zum *situierten Lernen* erhalten. Sie sollten sowohl *Modellieren* lernen als auch Umgehen mit *Standardmodellen*. Mit realen Anwendungen sollten alle Ziele gefördert und sollte auch eine Antwort auf die Sinnfrage gegeben werden

- Perspektive 3: Mehr intelligentes Üben und Wiederholen

Schüler sollten fortwährend Gelegenheit zum *intelligenten Üben* und *Wiederholen* der wesentlichen Inhalte haben. Dies kann auch durch geeignete *offene Aufgaben* geschehen.

- Perspektive 4: Mehr Computereinsatz

Computer, insbesondere Taschencomputer, sollten systematisch als Hilfsmittel verwendet werden. Lehrer und Schüler sollten sich der inhärenten Probleme und Gefahren bewusst sein und auf diese auch Metawissen entwickeln.

- Perspektive 5: Weniger Kalküle

Das Curriculum sollte zu Lasten von formalen Algorithmen umstrukturiert werden, lokal und global. Dadurch sollten Schüler auch ein ausgewogenes Mathematikbild erwerben.

- Perspektive 6: Angemessene Leistungsbeurteilung

Die *Leistungsüberprüfung* sollte die angestrebten Unterrichtsziele besser widerspiegeln, d.h. weniger als bisher an Kalkülen orientiert sein, auch unter Verwendung von Computern als Hilfsmittel und auch in anderer als schriftlicher Form.

- Perspektive 7: Angemessene Unterrichtsgestaltung

Der *Unterricht* sollte weniger als bisher am Entwickeln und Einüben von Kalkülen und mehr daran orientiert sein, geistige Schüleraktivitäten und Reflexionen zu stimulieren und verschiedene Methoden zu variieren, ohne dabei die zentrale Rolle des Lehrers zu reduzieren.

Der folgende Kommentar sieht sich diesen Perspektiven verpflichtet, er sieht sich aber auch dem aktuellen Lehrplan der Oberstufe verpflichtet und möchte - wie oben angedeutet - einen roten Faden durch den Analysisunterricht der Oberstufe legen.

1. Differentialrechnung

Im Zentrum der Einführung der Differentialrechnung steht die Entwicklung einer tragfähigen Grundvorstellung der mittleren und der momenaten Änderungsrate. Diese soll dann auf verschiedene Weise („inhaltlich“, formal-symbolisch, geometrisch) beschrieben werden.

1.1 Herausarbeiten der Grundvorstellungen

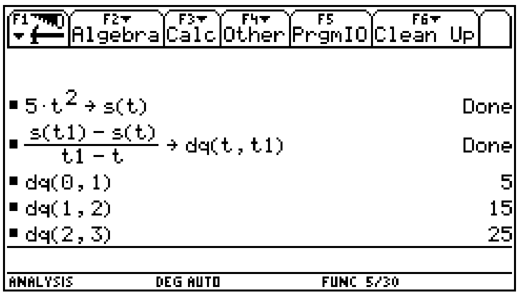
Kenntnisse/Wissen:
Mittlere Änderungsrate = Differenzenquotient = Steigung der Hypotenuse im Steigungsdreieck(Sekantensteigung)
Momentane(lokale) Änderung = Differentialquotient = Steigung der Hypotenuse im Steigungsdreieck (Tangentensteigung)

Fertigkeiten/Fähigkeiten:
Den Begriff der mittleren Änderung in Anwendungssituationen, algebraisch und geometrisch verwenden können

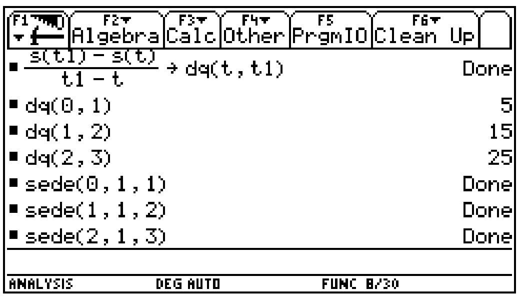
Ex: Der zurückgelegte Weg beim freien Fall lässt sich beschreiben durch $s(t) = \frac{g}{2}t^2$.
Wenn wir $g \approx 10\frac{m}{s^2}$ setzen, bekommen wir also $s(t) = 5t^2$.

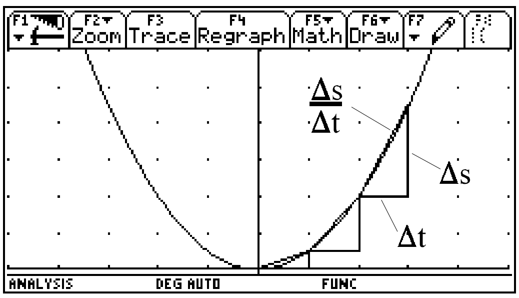
(1) Ermittle die mittlere Geschwindigkeit während der 1., der 2. der 3., ... der n. Sekunde des Fallens.
(2) Gib eine graphische Veranschaulichung der ersten drei Geschwindigkeitswerte an.
(3) Versuche die momentane Geschwindigkeit nach einer Sekunde Fallzeit anzugeben.

(1) Die Ermittlung der mittleren Geschwindigkeit in einem beliebigen Intervall kann durch ein kleines Modul unterstützt werden.

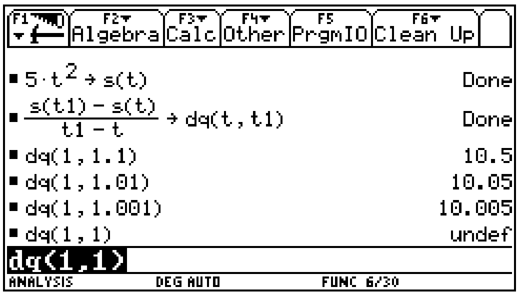


(2) Genauso lässt sich die graphische Veranschaulichung mit einem Modul unterstützen





(3) Durch Wahl entsprechend kleiner Intervalle lässt sich ein Näherungswert für die Momentangeschwindigkeit nach einer Sekunde bestimmen, ein exakter Wert ist aber mit dem Differenzenquotienten allein nicht zu erreichen.



Der wesentliche Schritt in diesem Beispiel ist einerseits die dreifache Darstellung des Differenzenquotienten (inhaltlich, formal, graphisch) und andererseits das Aufzeigen seiner kalkülmäßigen Beschränkung (wenn das Zeitintervall zum Zeitpunkt wird, versagt der Kalkül).

Inhaltliche Beschreibung	*Formale Beschreibung*	*Geometrische Beschreibung*
Wegzunahme (Wegintervall)	$\underbrace{s(t_1) - s(t)}_{\Delta s}$	Länge der Kathete parallel zur Ordinate im Sekanten-Steigungsdreieck
vergangene Zeit (Zeitintervall)	$\underbrace{t_1 - t}_{\Delta t}$	Länge der Kathete parallel zur Abszisse im Sekanten-Steigungsdreieck
mittlere Geschwindigkeit im betrachteten Intervall	$\underbrace{\dfrac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t}}_{\frac{\Delta s}{\Delta t}}$	Steigung der Hypotenuse im Sekanten-Steigungsdreieck

1.2 Von der diskreten Beschreibung zur kontinuierlichen

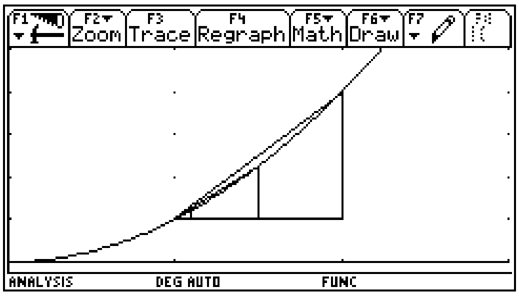
Kenntnisse/Wissen:
Den Übergang von der diskreten Beschreibung der Änderung zur kontinuierlichen Beschreibung anwendungsbezogen, algebraisch und geometrisch deuten können.

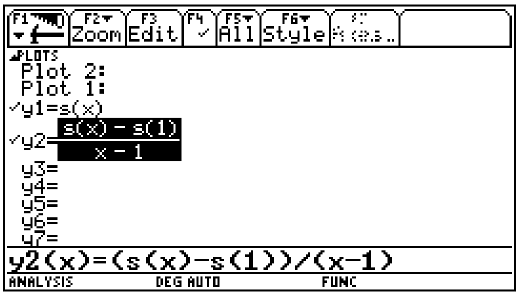
Fertigkeiten/Fähigkeiten:
Den Übergang von der mittleren zur momentanen(lokalen) Änderung mittels Limesbildung beschreiben können.
Den Übergang von der Sekanten- zur Tangentensteigung mittels Limesbildung beschreiben können.

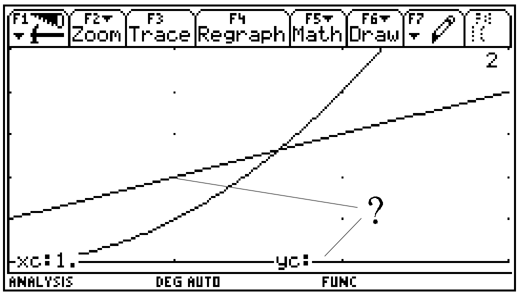
Wir landen also in einem Dilemma, wenn wir die Geschwindigkeit nach einer Sekunde Fallzeit beschreiben wollen. Einerseits besteht kein Zweifel (oder doch?), dass die Geschwindigkeit nach einer Sekunde einen bestimmten Wert hat, andererseits sind wir (noch) nicht fähig, diesen Wert zu bestimmen. Ein bisschen kann nun die oben erarbeitete dreifache Darstellung der

Situation weiterhelfen, das Problem genauer zu fassen.

Problem: An der Stelle t=1 ist der Differenzenquotient nicht definiert. Graphisch wird in diesem Fall aus dem Sekanten-Steigungsdreieck ein unbegrenzt kleines Dreieck („triangulum characteristicum“), das einem Punkt ähnelt.







1. Näherungsversuch: Wir könnten die Situation durch einen faulen Trick lösen:

Fauler Trick: $dq(1,t_1) = \dfrac{s(t_1)-s(1)}{t_1-1} = \dfrac{5\cdot t_1^{\,2} - 5\cdot 1^2}{t_1-1} = \dfrac{5\cdot(t_1-1)\cdot(t_1+1)}{t_1-1} \overset{??}{=} 5\cdot(t_1+1)$

$$v(1) = dq(1,1) = 5\cdot(1+1) = 10$$

Obwohl dieser miese Trick exakt die vermutete Geschwindigkeit liefert, ist er auf Sand gebaut, da die Behebung der ursprünglichen Beschränkung auf dem Kürzen des Faktors (t_1-1) beruht. Dieses Kürzen ist aber gerade für den in Frage stehenden Fall t_1 = 1 ein Kürzen durch 0. Außerdem muss uns klar sein, dass sich nicht jeder beliebig Quotient so „günstig“ kürzen lässt.

2. Näherungsversuch: Mittels unbegrenzter Näherung.

Kommt t_1 dem Wert 1 nur unbegrenzt nahe, dann ist t_1-1 auch nicht Null, sondern Null nur unbegrenzt nahe, also ist nun das Kürzen durch t_1-1 erlaubt. Diese intuitiv-anschauliche Vorstellung vom unbegrenzt „Nahe-Kommen“ soll durch das Symbol ‚lim ...‘ zum Ausdruck gebracht werden.

$$\lim_{t_1\to 1} \frac{s(t_1)-s(1)}{t_1-1} = \frac{5\cdot t_1^{\,2} - 5\cdot 1^2}{t_1-1} = \frac{5\cdot(t_1-1)\cdot(t_1+1)}{t_1-1} = 5\cdot(t_1+1)$$

Betrachten wir zusammenfassend diesen Schritt in unserer dreifachen Darstellung:

Inhaltliche Beschreibung	*Formale Beschreibung*	*Geometrische Beschreibung*
Man kann nicht für einen Zeitpunkt eine Geschwindigkeit angeben!	$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t}$ ist nicht definiert, wenn $t_1 = t$ ist!	Aus dem Sekanten-Steigungsdreieck wird ein Punkt, wenn $t_1 = t$ ist und ein Punkt besitzt keine Steigung
Man kann für ein beliebig kleines Zeitintervall eine Geschwindigkeit angeben! („Momentan-Geschwindigkeit“)	$\frac{ds}{dt} = \lim_{t_1 \to t} \frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t}$ Da t_1 beliebig nahe an t heranrückt, aber *nie* gleich t wird, ist $\lim_{t_1 \to t} \frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t}$ immer definiert! (Differentialquotient)	Aus dem Sekanten-Steigungsdreieck wir ein unbegrenzt kleines Dreieck.

Bemerkung 1: Natürlich ist damit der Grenzübergang nicht vollständig exakt eingeführt worden, für die weitere Behandlung erscheint die Grundvorstellung vom „Unbegrenzten-Nahekommen“ aber durchaus tragfähig (und auch ausreichend). Natürlich kann sich später noch eine Exaktifizierung des Grenzwertbegriffes anschließen.

Bemerkung 2: Die Momentangeschwindigkeit lässt sich (natürlich) auch berechnen, wenn man sich von links dem betrachteten Zeitpunkt t nähert. Dies sollte natürlich auch thematisiert werden.

Bemerkung 3: Selbstverständlich kann (und soll) man auch mit einer anderen Definition des Differenzenquotienten arbeiten, aber nicht zu früh (um nicht durch den Kalkül die Grundideen zu verschütten). Ein kompakterer Formalismus ergibt sich durch eine alternative Angabe der Intervallgrenzen: $[t, t_1] = [t, \underbrace{t + \Delta t}_{t_1}]$

Damit können wir den Differentialquotienten umschreiben:

$$\lim_{t_1 \to t} \frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Diese Transformation sollte man den Schülern nicht ersparen, da der „ Δt-Formalismus “ für die Integralrechnung bzw. für numerische Anwendungen viel besser geeignet ist als die übliche Darstellung.

Bemerkung 4: Selbstverständlich kann man an dieser Stelle auch den Begriff der Ableitung definierten (ob er wirklich notwendig ist, sei dahin gestellt):

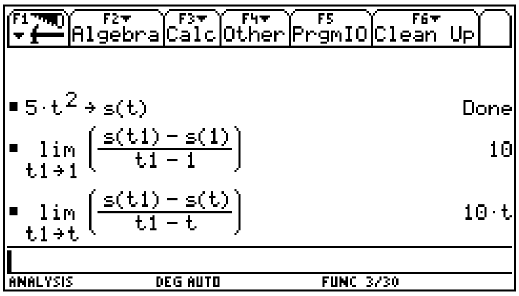
1.3 Ableitungskalkül

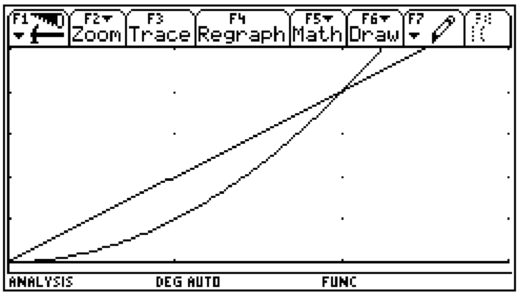
Der bisher dargestellte Zugang soll v.a. eines: eine *tragfähige Grundvorstellung* vom Begriff des Differential- und des Differenzenquotienten vermitteln. Auf die notwendige Exaktheit soll dabei aber nicht verzichtet werden, auch wenn eine intuitiv-heuristische Vorgangsweise eingeschlagen wird. „Vereinfachen, aber nicht verfälschen“ gilt hier einmal mehr. Es sei außerdem darauf hingewiesen, dass der freie Fall nicht der einzige Anwendungskontext bleiben darf. Der freie Fall war nur ein Beispiel, keineswegs hängt dieser Zugang an genau diesem Beispiel. Wer keine besondere Affinität zur Physik verspürt, soll eben einen anderen Kontext wählen.

Kenntnisse/Wissen:
Ableitung an einer Stelle, Ableitung einer Funktion.
Zusammenhang zwischen Ableitung und Steigung.
Verschiedene Schreibweisen für den Differentialquotienten kennen.

Fertigkeiten/Fähigkeiten:
Potenz- und Polynomfunktionen ableiten können, Summen-, Produkt-, Quotienten- und Kettenregel anwenden können. Winkelfunktionen ableiten können.
Ableitungsregel herleiten können.
Kurven ableiten können (Implizites Differenzieren) -> als Einschub bei Ellipse

Der nächste Schritt besteht nun darin, sich von der Momentangeschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt zu lösen und zur Geschwindigkeitsfunktion (die die Momentangeschwindigkeit zu beliebigen Zeitpunkten beschreibt) überzugehen.





Die Frage, wie weit der Ableitungskalkül durchgeführt werden soll, lässt sich sicher nicht allgemein beantworten. Man hat aber nun sozusagen einen Freiheitsgrad gewonnen. Denkbar ist

a) ein Minimalprogramm, bei dem weitgehend auf Ableitungsregeln verzichtet wird,
b) ein Programm, bei dem die Ableitungsregeln mit CAS-Unterstützung behandelt werden,
c) ein Maximalprogramm, bei dem eine Herleitung sämtlicher Ableitungsregeln (ohne CAS) durchgeführt wird.

Was soll im Vordergrund stehen? Das Durchschauen der Funktionsweise und die Anwendungsbereiche. Wie weit man die Ableitungsregeln herleitet, hängt davon ab, welche Bedeutung man ihnen für das Verständnis / für das Verstehen des Differenzierens beimisst.
Dass die sichere Handhabung nicht unbedingt mehr *das* primäres Ziel ist (das CAS beherrscht die Ableitungen sowieso und ist dabei weniger fehleranfällig) liegt auf der Hand.

Bemerkung: Natürlich sollten auch die Grenzen des Ableitungskonzepts thematisiert werden, z.B. durch die Betrachtung von Knickfunktionen, Sprungfunktionen oder Oszillationsfunktionen

1.4 „Kurvendiskussion“ ade?

Die Funktionsdiskussion (fälschlich als „Kurvendiskussion“ bezeichnet) wird sicher in ihrer bisherigen Gestalt verändert. Aus mehreren Gründen wäre aber ein Verzicht wenig sinnvoll. Für das Beibehalten sprechen (nach H.BÜRGER / G.MALLE, 2000) folgende Punkte:

a) Mit Hilfe der Analysis ist überhaupt erst eine vollständige Beschreibung von Funktionen möglich - das Bestreben, die inneren Zusammenhänge von Funktionen zu durchschauen sind umgekehrt auch ein wesentlicher Grund, warum der Kalkül der Analysis entwickelt wurde.

b) Rasches Skizzieren von Graphen, entwickeln von Vorstellungsbildern für Graphen ist erst recht bei CAS-Einsatz wichtig.

c) Bei der Funktionsuntersuchung findet auch die Herleitung theoretischer Ergebnisse statt. Z.B., dass eine Polynomfunktion vom Grad n höchstens n-1 Nullstellen hat oder dass eine Funktion *f* vom Typ $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ die Wendestellen σ und -σ besitzt.

   Traditionell dominiert bei den Funktionsdiskussionen etwa folgendes Schema (das aber meist nur in Ausnahmefällen vollständig bearbeitet wird):

   - Definitionsmenge
   - Nullstellen
   - Extremstellen
   - Wendepunkte / Wendetangenten
   - Monotonieverhalten
   - Krümmungsverhalten
   - Symmetrieverhalten
   - Periodizitätsverhalten
   - Gestalt des Graphen

In dieser Reihenfolge ist die Funktionsdiskussion bei CAS-Einsatz sicher nicht mehr sinnvoll. Von einem Abarbeiten eines Pflichtprogramms wandelt sich das Gewicht hin zum Verständnis der für eine Funktion / einen Graphen wesentlichen Begriffe. Das kann nun auf verschiedenste Weise erfolgen:

a) Durch eine Abarbeitung eines veränderten Schemas (nach H.BÜRGER / G.MALLE 2000):
   - Monotoniebereiche
   - lokale und globale Extremstellen
   - Krümmungsbereiche
   - Wendestellen
   - Skizzieren des Graphen
   - Nullstellen

b) Durch eine Variation von Aufgabenstellungen
   (W.BLUM 2000, H.W.HENN 2000, G.SCHMIDT 2000, H.BÜRGER / G.MALLE 2000)

c) Durch eine Betonung der Umkehrung der Funktionsdiskussion, durch die Behandlung von Spline-Funktionen, ganz generell durch das Modellieren von Funktionen auf Grund von Teilinformationen

1.5 Flexiblere und vielfältigere Anwendbarkeit

Im Anwendungsbereich erfährt die Differentialrechnung sicher die deutlichste Änderung. Hier sind zuerst die verschiedenen Grundtätigkeiten zu nennen, die - direkt oder indirekt - betroffen sind.

a) Betonung mathematischer Grundtätigkeiten

Darstellend-interpretierendes Arbeiten:
Absolute und relative Änderungen (eines Zustandes, eines Bestandes wie z.B. der Geschwindigkeit eines Autos, der Geldmenge auf einem Sparbuch, der zu zahlenden Einkommenssteuer usf.) sind wichtige Aspekte unseres Alltags, der Naturwissenschaft und Technik. Vorgänge und Prozesse mit den Mitteln des Differenzen- und Differentialquotienten zu beschreiben ist eine wichtige Mathematisierung, durch die erst derartige Aspekte unserer Welt einer mathematischen Betrachtung und Analyse zugänglich werden. Zumeist werden dabei Prozesse aus der Realität (alle zeitlichen) als kontinuierlich empfunden.
Durch die (graphische) Mächtigkeit der eingesetzten CAS-Rechner kann vielfach auf eine operative Behandlung überhaupt verzichtet werden, wenn sich Antworten bereits auf der graphischen Ebene finden lassen („Elementarisierung“).

Formal-operatives Arbeiten:
Durch die Möglichkeit, Teile des Differential-Kalküls an das CAS „auszulagern“, wird es einerseits möglich die klassische Reihenfolge von Begriffsbildung - Kalkül - Anwendung zu durchbrechen, andererseits wird es möglich, eine breitere Palette an Funktionen und Fragestellungen einer operativen Behandlung zugänglich zu machen.

Experimentell-heuristisches Arbeiten:
Durch einen flexiblen Einsatz von kleinen Modulen, durch den Einbezug von Programmen der dynamischen Geometriesoftware, durch Gegenüberstellung verschiedener Darstellungsformen werden neue Problemlösungsvarianten möglich.

Begründen, Argumentieren:
Durch das verstärkte Auftreten graphisch-elementarer Methoden erscheint der Bereich des Begründens und Argumentierens umso dringlicher. Eine Exaktifizierung von intuitiv-anschaulichen Vorstellungen fällt in diesen Bereich mathematischer Grundtätigkeiten.

b) Ein neuer Zugang zur Optimierung (nach H.BÜRGER / G.MALLE 2000)
Schematisch durchgeführte Optimierungsaufgaben haben als Einstieg ihre Berechtigung, sie dürfen aber keinesfalls zu einer gedankenlosen Mechanik werden.
Es besteht die Chance, Optimierungsaufgaben in neuem Licht zu sehen: zur Herleitung theoretischer Ergebnisse, etwa innerhalb der Geometrie (Verhältnis von Volumen und Oberfläche), in der Optik (bei Extremalprinzipien wie dem Fermatschen Prinzip), in der Statistik (Methode der kleinsten Quadrate)

c) Stärkere Vernetzung
Gerade die Differentialrechnung eignet sich sehr gut für eine Vernetzung mit anderen Bereichen der Mathematik.

2. Integralrechnung

2.1 Verschiedene Wege zum Integral

Eine Stammfunktion lässt sich auf zwei Arten „rekonstruieren“. Erstens, man kehrt die Operation des Ableitens um („aufleiten“). Da dies aber nicht immer möglich ist, kann man zweitens auch so vorgehen, dass man die Änderungsrate der unbekannten (Stamm-)Funktion ausnützt und schrittweise zur gesuchten Funktion kommt. Man erhält dann eine Summe mit einem variablen Faktor und einem sehr kleinen Faktor. In vielen Fällen ist es auch möglich, die Summenbildung unbegrenzt zu verfeinern und damit eine Termdarstellung für die Stammfunktion herzuleiten. Eine Näherungsdarstellung erhält man auf jeden Fall.

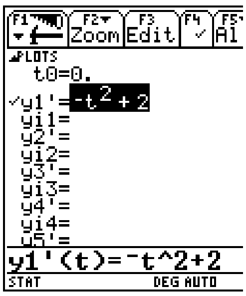
(1) Graphische Rekonstruktion von Stammfunktionen durch Verwendung der Steigung

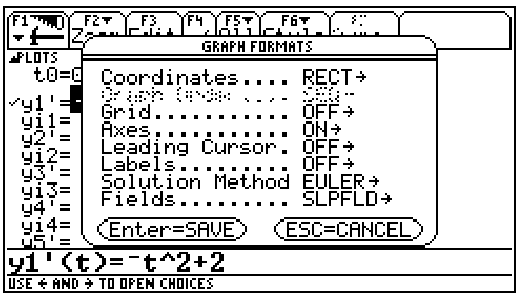
Kenntnisse/Wissen:
Steigungsfeld, Stammfunktion, Unbestimmtes Integral, Anfangsbedingung

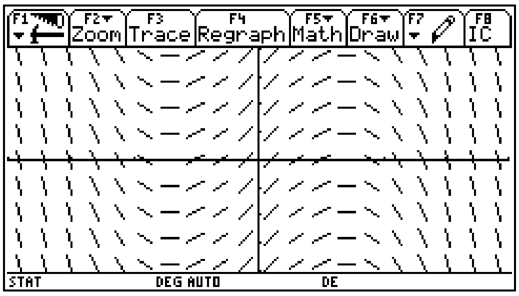
Fertigkeiten/Fähigkeiten:
Stammfunktionen als Umkehrung des Differenzierens ermitteln können.
Richtungsfelder für vorgegebene Funktionen mit CAS zeichnen und Stammfunktionen in ein Richtungsfeld einzeichnen können.
Stammfunktionen durch einen vorgegebenen Punkt aufstellen können bzw. an einen vorgegebenen Anfangswert anpassen können.

Als Einstieg in die Integralrechnung eignen sich Aufgaben, bei denen unter Verwendung des Richtungsfeldes heuristisch bzw. graphisch versucht wird, den Prozess des Ableitens umzukehren.
Dabei soll vom Steigungsfeld einer Funktion ausgegangen werden. Dieses Steigungsfeld lässt sich mit dem TI92+ / TI89 sehr einfach erzeugen. Im y - Editor des DE-Modus wird die entsprechende Funktion eingegeben und einfach geplottet. Als Voreinstellung sollte dabei (mittels ◊-F) SLPFLD gewählt werden

Ex1a): Gegeben ist eine Funktion $f(x) = -x^2 + 2$ („Steigungsfunktion“).
Gesucht ist eine Funktion $F(x)$ mit $F‘ = f$, d.h. jene Funktion, deren Änderungsrate sich mit $-x^2 + 2$ beschreiben lässt.

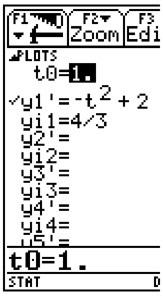


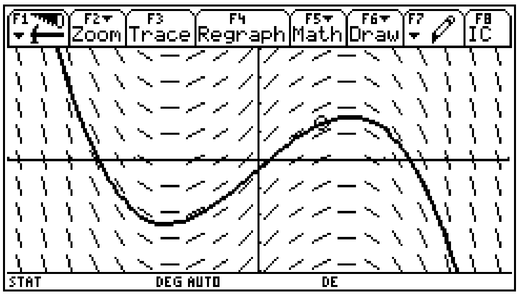




Bemerkung: Es ist eine gute Übung, wenn die Schüler in einem vergrößerten Ausdruck zuerst versuchen, derartige Funktionen einzuzeichnen.
Es zeigt sich sofort, dass unendlich viele derartige Funktionen gefunden werden können. Nur wenn ein Punkt (Start) vorgegeben wird, durch den die gesuchte Funktion gehen soll, wird das Problem eindeutig.

Ex 1b) Graph der Funktion soll z.B. den Punkt (1 | 4/3), ... gehen.
Am TI92+/TI89 kann dann der entsprechende Graph einfach dadurch gewonnen werden, dass man sich (nach Betätigung von F8 - Initial Conditions) an die entsprechende Stelle bewegt (näherungsweise oder durch Eingabe (Strg-V) des entsprechendes Punktes direkt im Graphik-Modus). Man kann den Punkt natürlich auch im y-Editor festlegen:





Eigentlich könnte an dieser Stelle die Integralrechnung beendet werden, wenn man nur an einer problemorientierten Einführung interessiert ist. Es lassen sich ja auf diese Art und Weise für sämtliche ‚Schul-relevanten' Funktionen die entsprechenden Graphen erhalten - und weit mehr als diese.

Bei (derart einfachen) Polynomfunktionen sehen die Schüler aber ohnehin sehr bald, von welcher(n) Funktion(en) diese ‚abstammen': In unserem Fall also von $F(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x + c$. Durch Einsetzen des entsprechenden Punktes erhält man schließlich die konkrete Stammfunktion

$$\mathrm{F(x)} = -\frac{\mathrm{x}^3}{3} + 2x - \frac{1}{3}$$

Bemerkung: Mit diesem Zugang sieht der Schüler einerseits auf ganz natürliche Weise die Notwendigkeit der Integrationskonstanten. Er sieht, dass erst durch eine zusätzliche Information die Angabe einer konkreten Funktion möglich ist. Hier ist auch die richtige Stelle, den Begriff des unbestimmten Integrals (als eine Klasse von Funktionen) zu besprechen.

(2) Numerische und analytische Rekonstruktion der Stammfunktion durch Verwendung der Änderungsrate

Nach diesen Vorübungen soll mit einem anwendungsorientierten Beispiel zum Kern der Sache vorgestoßen werden. Was macht man, wenn man die Stammfunktion nicht „errät“ bzw. durch „aufleiten“ (= Umkehrung des Ableitens) erhalten kann?

Ermittlung von Stammfunktionen durch Verwendung der Änderungsrate

Kenntnisse/Wissen:

Näherungsweise (numerische) Integration (Euler-Cauchy-Verfahren)
Ermittlung von Stammfunktionen durch unbegrenzt feine Summation
Integral als Produktsumme (näherungsweise und exakt)

Fertigkeiten/Fähigkeiten:

Stammfunktionen schrittweise (iterativ) unter Verwendung der Änderungsrate ermitteln können (Euler-Cauchy-Verfahren).
Verbesserungen des Euler-Cauchy-Verfahrens angeben können.
Durch Übergang zu einem Summationsprozess und unbegrenzter Verkleinerung der Schrittweite Termdarstellungen von Stammfunktionen herleiten können

Ex 2: Geschwindigkeit und Weg
Ein Körper (Sportwagen) bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $v(t) = 3t^2 - 12t + 12$, $s(0) = 0$ m.

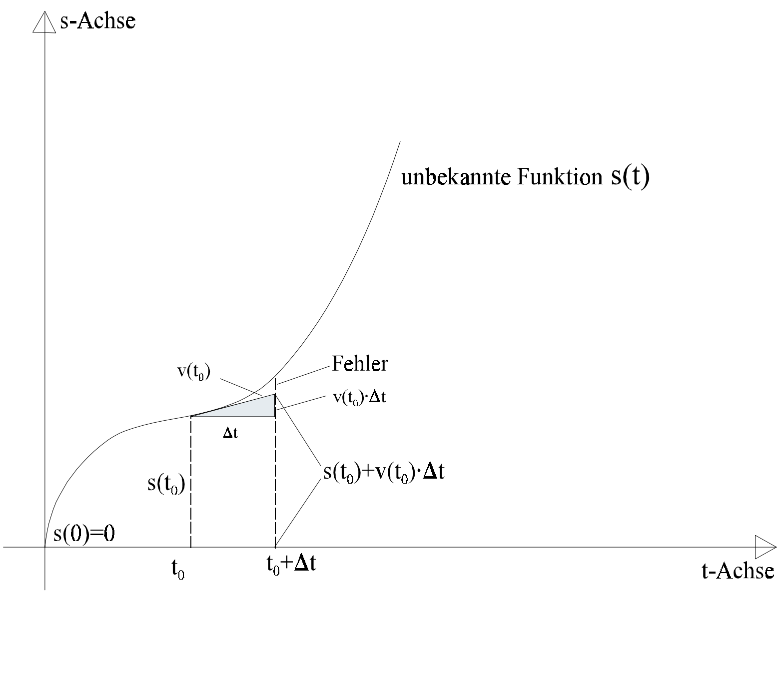
(a) Iteration: Wie groß ist der zurückgelegte Weg nach 2 Sekunden? Berechne dies schrittweise („iterativ“) unter Verwendung der jeweiligen Geschwindigkeit (= momentanen Änderungsrate)

(b) Summation und Integration: Berechne den Weg nach n Zeitschritten und wähle in der Folge unbegrenzt kleine Zeitschritte.

(a) Iteration

Anschließend an die in a) gemachten Erfahrungen (aber selbstverständlich auch unabhängig davon!) lässt sich die näherungsweise Berechnung durchführen.

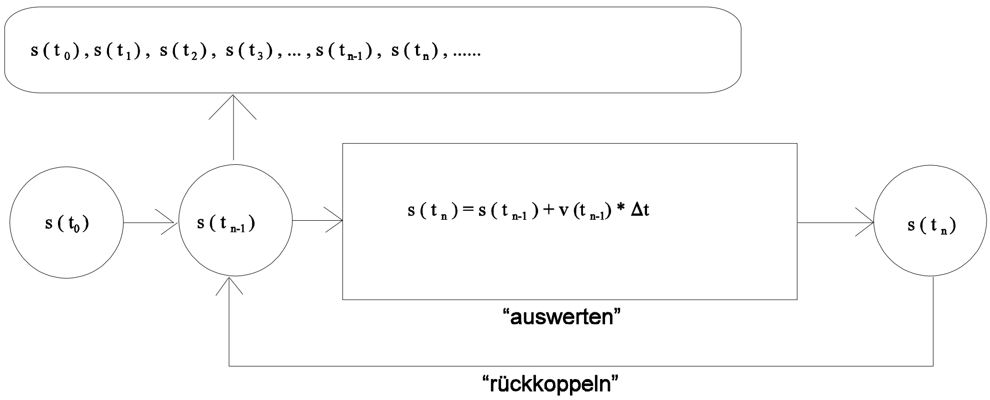
Ausgangspunkt sei dabei diese Graphik:



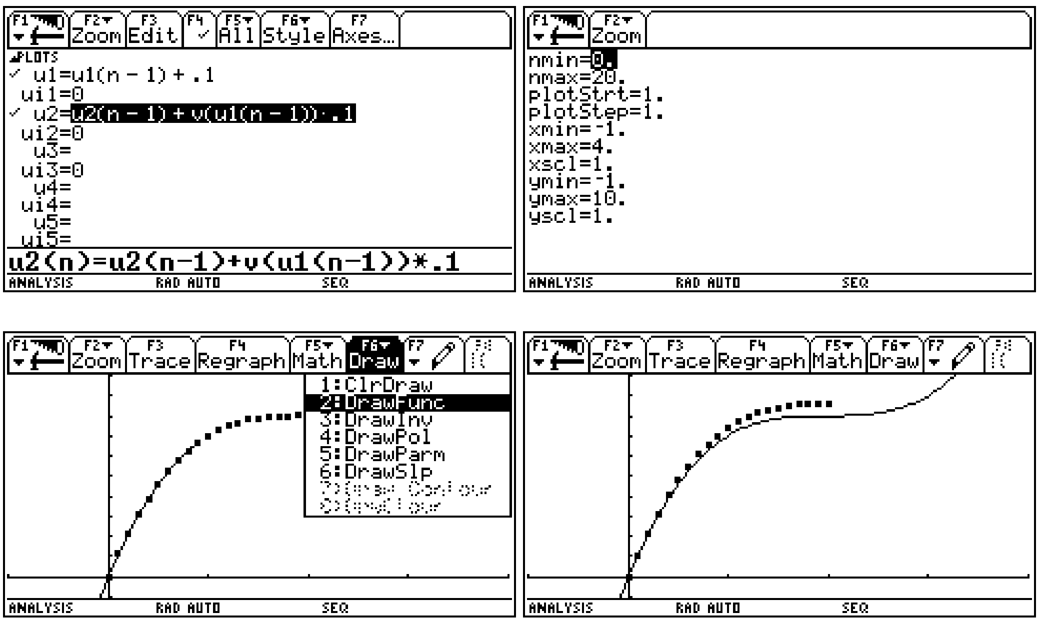
Zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0, so wissen wir, ist der betrachtete Körper $s(t_0)$ Meter vom Ausgangspunkt entfernt, d.h. wir wählen den Startpunkt (t0 | s(t0)). Von diesem aus können wir den Weg nach der (kurzen) Zeitspanne Δt ermitteln, indem wir zu $s(t_0)$ den in dieser Zeitspanne zurückgelegten Weg $v(t_0)\cdot\Delta t$ hinzuaddieren, womit wir also als neuen zurückgelegten Weg $s(t_0) + v(t_0)\cdot\Delta t$ erhalten. Dieses Addieren kleiner Wegstücke können wir natürlich beliebig oft durchführen. Da wir dabei als Geschwindigkeit stets diejenige der betrachteten Stelle nehmen, hält sich auch der Fehler in erträglichem Rahmen (zweifellos ist er aber vorhanden). Das erläuterte Vorgehen können wir in einen Algorithmus kleiden.

Algorithmus zur schrittweisen Integration:

- ☐ Setze den Startpunkt (t0 / s(t0))
- ☐ Schleife:
  - Bewege dich zum Punkt (t0 + Δt / s(t0) + v(t0) *Δt)
  - Mache den neuen Punkt zum alten Punkt

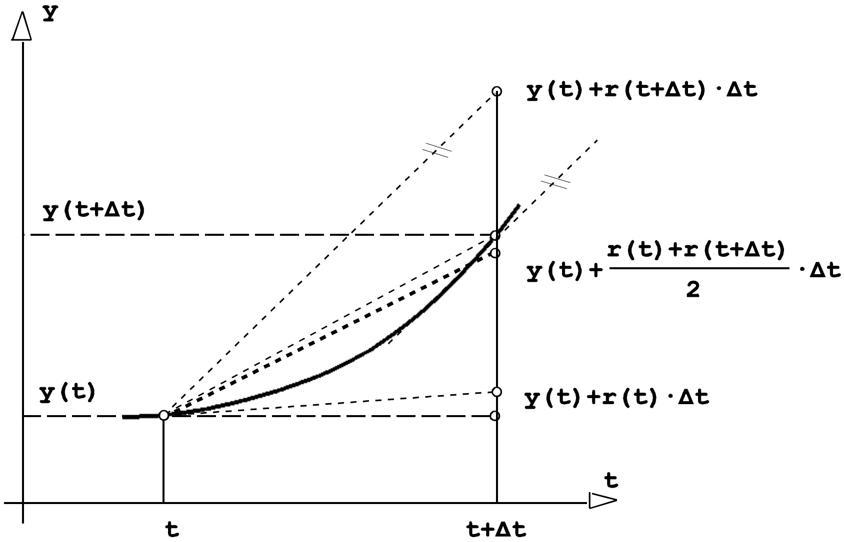


Am TI92 / 92+ / 89 lässt sich dieser Algorithmus am leichtesten im Sequence-Mode realisieren. Wir definieren dazu eine Folge u1, die Zeitschritte beschreibt, und eine Folge u2, die den zurückgelegten Weg (näherungsweise) beschreibt. (Achtung: F7 Axis richtig einstellen, u1 auf Abszisse, u2 auf Ordinate)

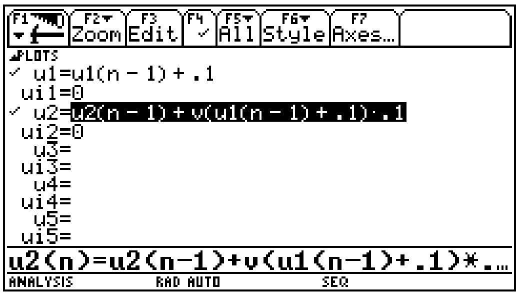


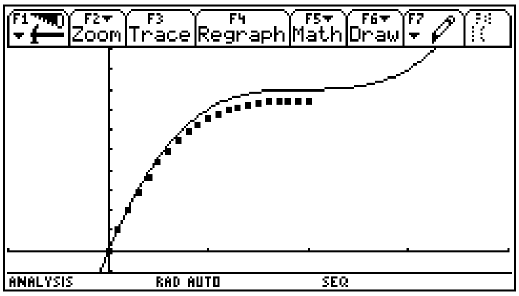
Die letzte Graphik zeigt in der Gegenüberstellung mit der exakten Lösungsfunktion den Fehler, den wir bei diesem Verfahren machen. Damit haben wir - ganz beiläufig - auch ein sehr wichtiges numerisches Verfahren kennengelernt und eingesetzt: das Euler-Cauchy-Verfahren („Sehnenzug-Verfahren“).

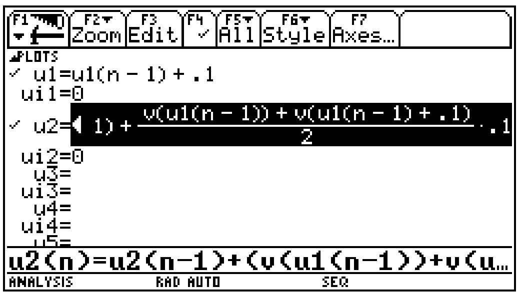
Erweiterung: Wie lässt sich der Iterationsprozess verbessern? Nun wir könnten einfach statt der Änderungsrate am Beginn des betrachteten Intervalls den Mittelwert zwischen Änderungsrate am Beginn und am Ende des Intervalls verwenden. Mit folgender allgemeiner Skizze soll dieses verbesserte numerische Verfahren veranschaulicht werden.

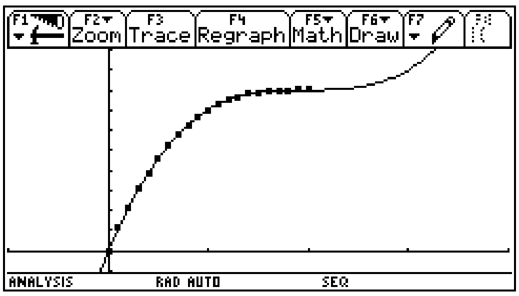


Durch eine entprechende Abänderung der Folge u2 erhält man ein erstaunlich gutes Ergebnis.





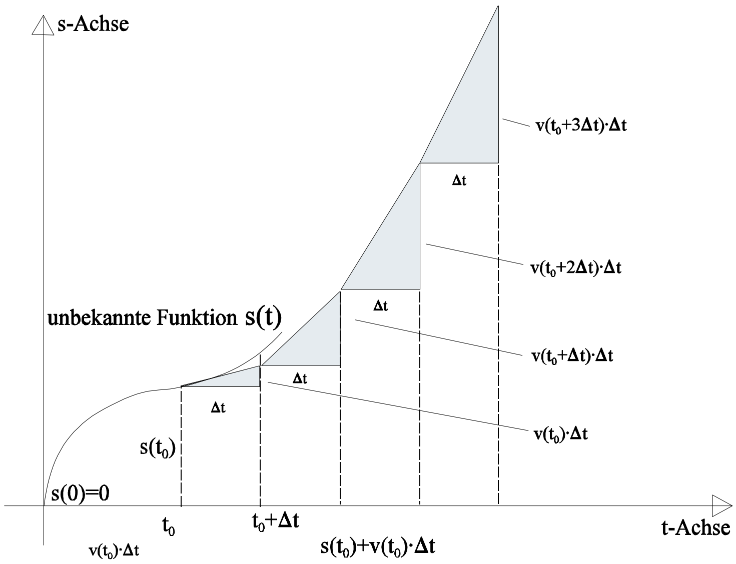




Der Weg über das numerische Verfahren ist aus zwei Gründen kein Selbstzweck: einerseits lernt der Schüler dabei ein für die systemdynamische Modellbildung wichtiges Werkzeug kennen, andererseits lässt sich daraus aber nun (für die wichtigsten Schul-mathematischen) Fälle auch ein Term der Stammfunktion gewinnen.

(b) Summation und Integration

Der Übergang von der Iteration zur Summation ist unser nächstes Ziel. In der durchgeführten Iteration steckt eine Summation. Wir brauchen nur die einzelnen Iterationsschritte aufzusummieren. Das wäre mit der Hand mühsam, mit dem CAS ist dies kein Problem.



Wenn wir also die einzelnen Iterationsschritte aufsummieren, bekommen wir einen Näherungswert für den zurückgelegten Weg nach n Zeitschritten Δt.

$$s(t) \approx s(t_0) + \sum_{i=0}^{n-1} v(t_0 + i \cdot \Delta t) \cdot \Delta t$$

Unsere Iteration hat sich damit in eine Summe verwandelt. Wir sind aber noch immer bei einer diskreten Beschreibung. Wollen wir eine kontinuierliche Darstellung haben, so müssen wir die Diskretisierung der Zeitachse wegbringen. Dies soll im Folgenden gezeigt werden.

Übergang von der diskreten zur kontinuierlichen Beschreibung (Verfeinerung der Summation): Wenn wir die Schrittweite unbegrenzt klein wählen (was dazu führt, dass wir die Anzahl der Schritte dafür unbegrenzt groß wird), erhalten wir einen unbegrenzt genauen Wert für den Weg.

Bem.: Die folgende Darstellung wurde mit dem Programm TI-Interactive 1.0 durchgeführt. Das Programm verfügt über einen Großteil des TI92- Befehlssatzes.

Durchführung des Summationsprozesses

* Es sei $s(0) = 0$

Define $v(t) = 3 \cdot t^2 - 12 \cdot t + 12$ "Done"

$$0 + \sum_{i=0}^{n-1} (v(i \cdot \Delta t) \cdot \Delta t) \qquad \frac{n \cdot \left(2 \cdot n^2 \cdot \Delta t^2 - 3 \cdot n \cdot \Delta t \cdot (\Delta t + 4) + \Delta t^2 + 12 \cdot \Delta t + 24\right) \cdot \Delta t}{2}$$

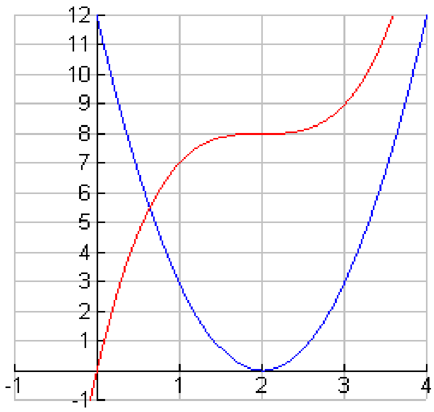
Die Schrittweite Δt ist gleich der vergangenen Zeit *t* geteilt durch die Anzahl *n* der Schritte

$$0 + \sum_{i=0}^{n-1} (v(i \cdot \Delta t) \cdot \Delta t) \mid \Delta t = \frac{t}{n} \qquad \frac{t \cdot \left(\left(2 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 1\right) \cdot t^2 - 12 \cdot n \cdot (n - 1) \cdot t + 24 \cdot n^2\right)}{2 \cdot n^2}$$

Nun machen wir statt einem gleich unbegrenzt viele Schritte

$$\lim_{n \to \infty} \left(0 + \sum_{i=0}^{n-1} (v(i \cdot \Delta t) \cdot \Delta t) \mid \Delta t = \frac{t}{n}\right) \qquad t \cdot \left(t^2 - 6 \cdot t + 12\right)$$

$$s(t) \qquad t \cdot \left(t^2 - 6 \cdot t + 12\right)$$



Damit ist es uns gelungen, die Summation unbegrenzt zu „verfeinern“, wir können nun statt Summe und Limes einfach das Integralzeichen verwenden:

$$s(t) = s(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t) \cdot dt$$

Bemerkung 1: Statt Δt durch n zu ersetzen und dann mit n gegen ∞ zu gehen, kann man natürlich auch n durch Δt ersetzen und anschließend mit Δt gegen 0 gehen.

Bemerkung 2: Es ist sehr wichtig, auch Beispiel zu betrachten, bei denen der Anfangswert nicht bei (0/0) liegt, wie das im folgenden Fall ist.

Nun soll mit einer anderen Anfangsbedingung gearbeitet werden:

* Es sei $s(2) = 8$

$$\text{Define } v(t) = 3 \cdot t^2 - 12 \cdot t + 12 \qquad \text{"Done"}$$

$$8 + \sum_{i=0}^{n-1} \left(v(2 + i \cdot \Delta t) \cdot \Delta t \right) \qquad n^3 \cdot \Delta t^3 - \frac{3 \cdot n^2 \cdot \Delta t^3}{2} + \frac{n \cdot \Delta t^3}{2} + 8$$

Die Schrittweite ist gleich der vergangenen Zeit *t* geteilt durch die Anzahl *n* der Schritte

$$8 + \sum_{i=0}^{n-1} \left(v(2 + i \cdot \Delta t) \cdot \Delta t \right) \mid \Delta t = \frac{t-2}{n}$$

$$\frac{(2 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 1) \cdot t^3 - 6 \cdot (2 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 1) \cdot t^2 + 12 \cdot (2 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 1) \cdot t + 8 \cdot (3 \cdot n - 1)}{2 \cdot n^2}$$

Nun machen wir statt einem gleich unbegrenzt viele Schritte

$$\lim_{n \to \infty} \left(8 + \sum_{i=0}^{n-1} \left(v(2 + i \cdot \Delta t) \cdot \Delta t \right) \mid \Delta t = \frac{t-2}{n} \right) \qquad t \cdot (t^2 - 6 \cdot t + 12)$$

Damit haben wir auch die Termdarstellung der Zeit-Weg-Funktion gewonnen

$$\text{Define } s(t) = \lim_{n \to \infty} \left(8 + \sum_{i=0}^{n-1} \left(v(2 + i \cdot \Delta t) \cdot \Delta t \right) \mid \Delta t = \frac{t-2}{n} \right) \qquad \text{"Done"}$$

$$s(t) \qquad t \cdot (t^2 - 6 \cdot t + 12)$$

Wir sehen also: Man kann (natürlich) zu ein und derselben Zeit-Weg-Funktion kommen, auch dann wenn man verschiedene (aber „zusammengehörige“) Startwerte wählt. Aufpassen muss man allerdings dann, wenn man den Zeitschritt Δt durch die (absolute) Zeit ersetzt.

(3) Integral als Flächeninhalt und als Flächeninhaltsfunktion

Schließlich soll nun auch die Ermittlung von Flächeninhalten durchgeführt werden. Dabei werden wir auf ganz wesentliche Parallelen zum Bisherigen stoßen, die es dem Schüler erleichtern sollen, einen umfassenden Integralbegriff zu erwerben.

Kenntnisse/Wissen:
Berechnungsmethoden für Flächeninhalte (Ober- , Unter-, Mittelsummen), Flächeninhaltsfunktion, Bestimmtes Integral
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Fertigkeiten/Fähigkeiten:
Näherungsweise (nummerische) Berechnung von Flächeninhalten durch Ober- und Untersummen durchführen können.
Verbesserungen der näherungsweisen Berechnung angebenen können (Mittelsumme bzw. Trapezverfahren).
Durch unbegrenzte Verkleinerung der Schrittweite einen exakten Wert für den Flächeninhalt angeben können.
Flächeninhaltsfunktionen näherungsweise und exakt angeben können.
Den Zusammenhang zwischen Flächeninhaltsfunktion und Flächenbegrenzungsfunktion kennen.
Den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung beweisen können.

Ex 1: Ermittle den Flächeninhalt A der durch die Funktion $f(x)=3\cdot(x-2)^2$ und die Koordinatenachsen begrenzt ist

(a) Summation und Integration: Wie groß ist die Fläche im Intervall [0;2]? Berechne durch Ein- und Umschreibung von Rechtecksflächen. Wähle in der Folge unbegrenzt schmale Rechtecksflächen.

(b) Iteration: Ermittle die Funktion A(x), die den Flächeninhalt angibt, der von der Funktion $f(x)=3\cdot(x-2)^2$ und den Koordinatenachsen im Intervall I [0;x] begrenzt wird.

(a) Summation und Integration

Näherungsweise Ermittlung von A durch Zerlegung in Teilflächen. Hier läuft die Berechnung nach dem (hinlänglich) bekannten Muster ab:

Schritt 1: Diskretisierung des betrachteten Intervalls $\Delta x=\dfrac{x_1-x_0}{n}$ $=\dfrac{2-0}{20}=\dfrac{2}{20}=0{,}1$

Schritt 2: Näherungsweise Berechnung mittels Summen

$$O(n)=LS(n)=\sum_{i=0}^{n-1} f(x_0+i\cdot\Delta x)\cdot\Delta x \qquad LS(20)=\sum_{i=0}^{19} 3\cdot(i\cdot 0{,}1-2)^2\cdot 0{,}1=8{,}61$$

$$U(n)=RS(n)=\sum_{i=1}^{n} f(x_0+i\cdot\Delta x)\cdot\Delta x \qquad RS(20)=\sum_{i=1}^{20} 3\cdot(i\cdot 0{,}1-2)^2\cdot 0{,}1=7{,}41$$

Die Obersumme ist hier identisch mit der Linkssumme, die Untersumme identisch mit der

Rechtssumme. Beide Summen lassen sich natürlich direkt berechnen. Drei kleine Hilfsfunktionen (Quelltext siehe Anhang) liefern aber auch neben den Berechnungen gleich entsprechende Visualisierungen.

Direkte Berechnung:

$\text{Define } f(x) = 3\cdot(x-2)^2$ "Done"

Berechnung eines Näherungswertes über Obersummen:

$\text{Define } O(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(i\cdot\Delta x)\cdot\Delta x\right)$ "Done"

$O(n)$ $\dfrac{n\cdot\left(2\cdot n^2\cdot\Delta x^2 - 3\cdot n\cdot\Delta x\cdot(\Delta x+4) + \Delta x^2 + 12\cdot\Delta x + 24\right)\cdot\Delta x}{2}$

Da die Schrittweite = Intervallbreite / Schrittanzahl ist, kann man entsprechend substituieren:

$\text{Define } O(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(i\cdot\Delta x)\cdot\Delta x\right) \mid \Delta x = \frac{2}{n}$ "Done"

$\text{expand}(O(n))$ $\dfrac{12}{n} + \dfrac{4}{n^2} + 8$

$O(20)$ $\dfrac{861}{100}$

$\text{approx}(O(20))$ 8.61

Berechnung eines Näherungswertes über Untersummen:

$\text{Define } U(n) = \sum_{i=1}^{n} \left(f(i\cdot\Delta x)\cdot\Delta x\right)$ "Done"

$U(n)$ $\dfrac{n\cdot\left(2\cdot n^2\cdot\Delta x^2 + 3\cdot n\cdot\Delta x\cdot(\Delta x-4) + \Delta x^2 - 12\cdot\Delta x + 24\right)\cdot\Delta x}{2}$

Da die Schrittweite = Intervallbreite / Schrittanzahl ist, kann man wieder entsprechend substituieren:

$\text{Define } U(n) = \sum_{i=1}^{n} \left(f(i\cdot\Delta x)\cdot\Delta x\right) \mid \Delta x = \frac{2}{n}$ "Done"

$\text{expand}(U(n))$ $\quad \frac{-12}{n} + \frac{4}{n^2} + 8$

$U(20)$ $\quad \frac{741}{100}$

$\text{approx}(U(20))$ $\quad 7.41$

Berechnung eines Näherungswertes über Mittelsummen:

$\text{Define } M(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{f(i \cdot \Delta x) + f((i+1) \cdot \Delta x)}{2} \cdot \Delta x \right)$ $\quad$ "Done"

$M(n)$ $\quad \frac{n \cdot (2 \cdot n^2 \cdot \Delta x^2 - 12 \cdot n \cdot \Delta x + \Delta x^2 + 24) \cdot \Delta x}{2}$

Da die Schrittweite = Intervallbreite / Schrittanzahl ist, kann man noch einmal entsprechend substituieren:

$\text{Define } M(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{f(i \cdot \Delta x) + f((i+1) \cdot \Delta x)}{2} \cdot \Delta x \right) \mid \Delta x = \frac{2}{n}$ $\quad$ "Done"

$\text{expand}(M(n))$ $\quad \frac{4}{n^2} + 8$

$M(20)$ $\quad \frac{801}{100}$

$\text{approx}(M(20))$ $\quad 8.01$

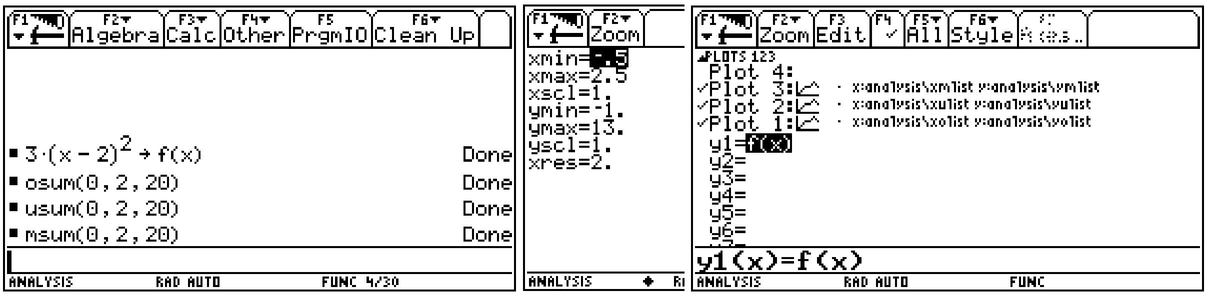
Exakte Berechnung

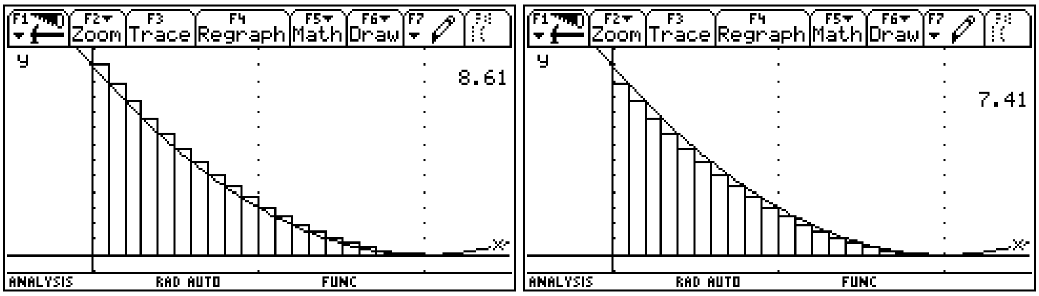
$\lim_{n \to \infty} (O(n))$ $\quad 8$

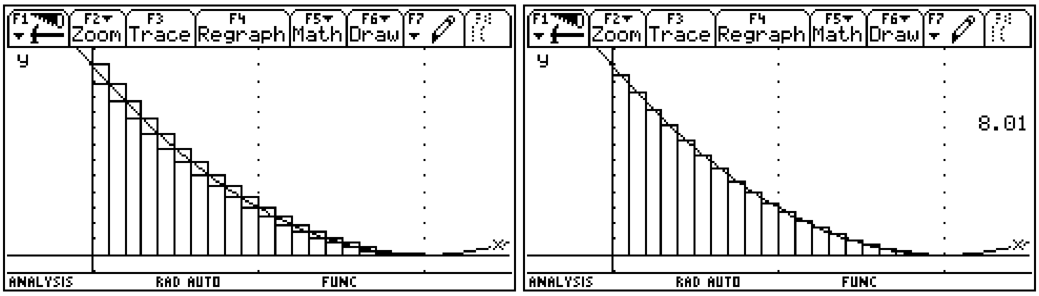
$\lim_{n \to \infty} (U(n))$ $\quad 8$

$\lim_{n \to \infty} (M(n))$ $\quad 8$

Berechnung und Visualisierung:







Es gilt: U(n) ≤ A ≤ O(n)

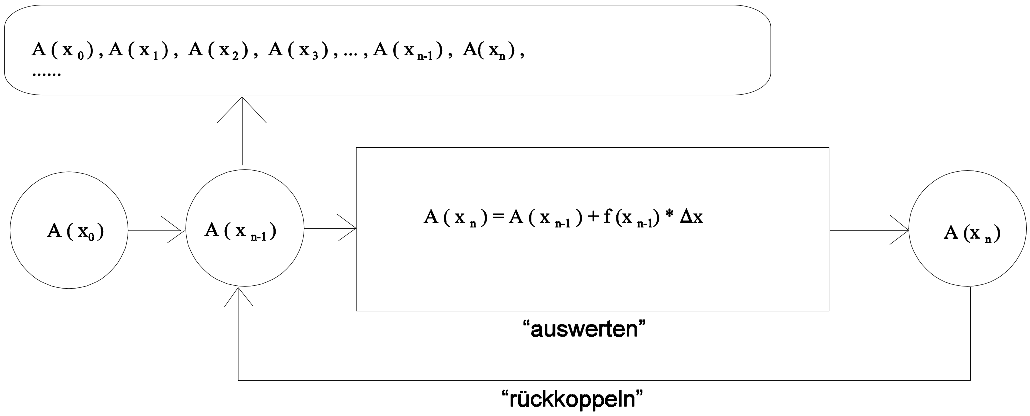
Bem.: Analog zu oben kann man das numerische Verfahren durch Verwendung der Mittelsumme $M(n)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(x_0+i\cdot\Delta x)+f(x_0+(i+1)\cdot\Delta x)}{2}\cdot\Delta x$ verbessert werden (= Trapezverfahren).

(b) Iteration

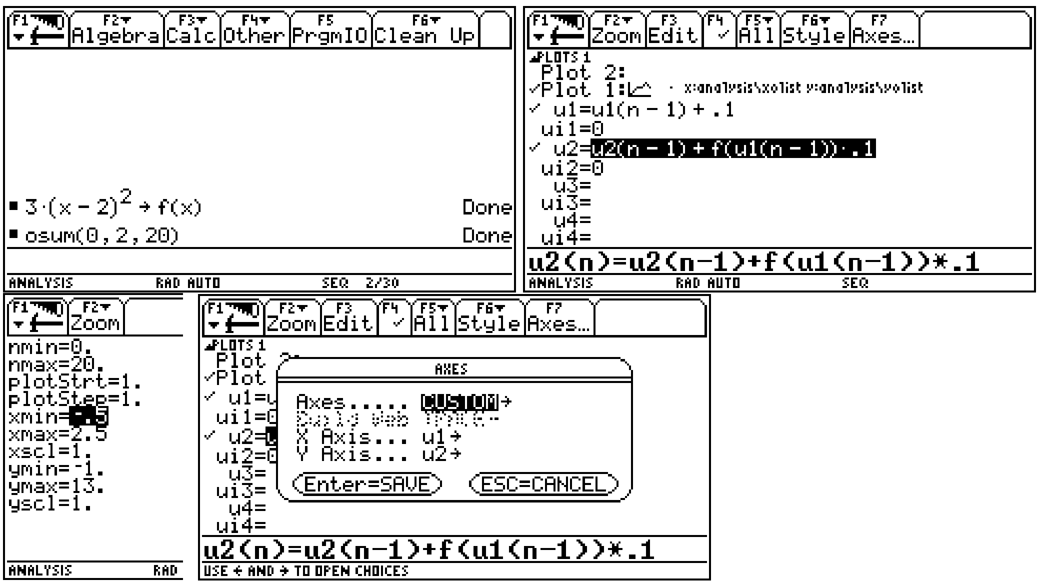
Die Funktion A(x), die den Flächeninhalt angibt, der von der Funktion $f(x) = 3 \cdot (x-2)^2$ und den Koordinatenachsen begrenzt ist, ergibt sich (näherungsweise) durch folgenden Algorithmus:

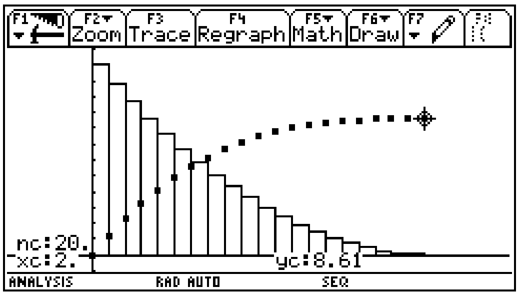
Algorithmus zur schrittweisen Integration:

- Setze den Startpunkt (x0 / A(x0))
- Schleife:
  - Bewege dich zum Punkt (x0 + Δx / A(x0) + f(x0) *Δx)
  - Mache den neuen Punkt zum alten Punkt



Am TI92/92+/ 89 lässt sich dieser Algorithmus wieder am leichtesten im Sequence-Mode realisieren. Wir definieren dazu eine Folge u1, die Zeitschritte beschreibt, und eine Folge u2, die den zurückgelegten Weg (näherungsweise) beschreibt. (Achtung: F7 Axis richtig einstellen, u1 auf Abszisse, u2 auf Ordinate). Plottet man das Ergebnis gemeinsam mit der Funktion f, dann ergibt sich folgende Darstellung (Bild nächste Seite oben)

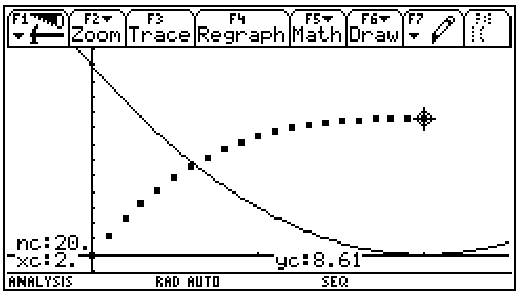




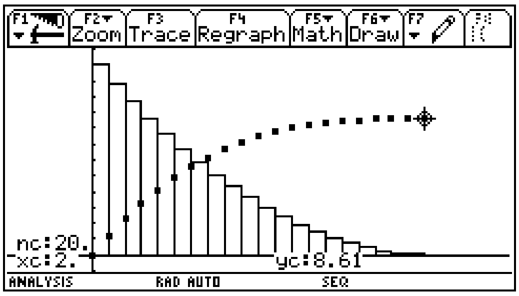
Damit haben wir unser Ziel (zumindest näherungsweise) erreicht: wir kennen nun den Verlauf jener Funktion, die den Flächeninhalt A(x) bis zur Stelle x beschreibt. Die Betrachtung des Flächeninhalts war aber zum oben dargestellten Geschwindigkeits-Weg-Beispiel nicht nur analog, es war sogar identisch! Ein Umstand der den Schülerinnen und Schülern meist erst an dieser Stelle auffällt.

Vergleich: • Rekonstruktion von F(x) auf Grund ihrer Änderungsrate f(x) = F‘(x) und
• Berechnung des Flächeninhalts A(x) unter dem Graphen der Funktion f(x).

Rekonstruktionsfunktion



Flächeninhaltsfunktion



Der Vergleich liefert folgende Vermutung (den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung):

Die Flächeninhaltsfunktion A(x) (rechte Abb.) ist eine Stammfunktion von f(x) (linke Abb.)

Der Inhalt des Hauptsatzes lässt sich dann in den folgenden beiden Spalten darstellen:

Ableiten **(= Bestimmen der momentanen Änderungsrate)**	**Integrieren** **(= Rekonstruktion der Bestandsfunktion auf Grund der Änderung des Zustandes)**
Beschreibung eines Zustandes F ▼ **Beschreibung der Änderung des Zustandes f**	**Beschreibung eines Zustandes F** ▲ **Beschreibung der Änderung des Zustandes f**
$F' = f,\ F'(x) = f(x)$	$\int f = F,\ \ F(x) = F(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(x)dx$

Bisher wurden mehrere Wege zum Integral dargestellt, die aufeinander aufbauen, die aber auch einzeln oder in bestimmten Kombinationen ihre Berechtigung haben:

- Nur Teil (1) wird ausgeführt:
  Graphisch-heuristischer Weg.
  Das Integral muss entweder anwendungsorientiert motiviert werden oder geometrisch (d.h. eine Funktion beschreibt die Steigung einer anderen Funktion, dies kann mittels Steigungs- bzw. Richtungsfeld dargestellt werden. Zeichnet man dieses fein genug, so kann die so beschriebene Funktion rekonstruiert werden). Da der CAS-Rechner die Rekonstruktion in ausreichender Genauigkeit durchführt, ist im Rahmen anwendungsorientierter Aufgaben (insbesondere aber auch innerhalb der Physik) ein derartiges Vorgehen durchaus gerechtfertigt.

- Nur Teil (2) wird ausgeführt:
  Numerisch-analytischer Weg mit Betonung auf der Rekonstruktion von Funktionen.
  Dieser Zugang ermöglicht es numerisch-iterativ zum Ziel zu kommen. Darüber hinaus kommt man in den meisten (für die Schule interessanten) Fällen auch zu einer exakten, d.h. analytischen Darstellung der Stammfunktion. Der Vorteil dieses Weges besteht darin, dass er in natürlicher Weise einen Zugang zu einem wichtigen Werkzeug für spätere Modellbildungen liefert, bzw. an genau die Verfahren anschließt, die möglicherweise bereits in der Jahrgangsstufe 10 bei den Wachstumsprozessen Verwendung fanden.

- Nur Teil (3) wird ausgeführt:
  Numerisch-analytischer Weg mit Betonung auf der Bestimmung von Flächeninhalten.
  Dieser Zugang ist von der Rechentechnik dem Weg 2 völlig gleichzusetzen. Allerdings wird man hier mit der Summation und Integration beginnen, die Iteration erst bei der Bestimmung der Flächeninhaltsfunktion ins Spiel bringen.
  Lässt man hier den iterativen Zugang aus, so reduziert sich dieser Weg auf den traditionellen Zugang zum Integral

- Alle Teile (1,2,3) werden ausgeführt::
  Dieser Weg ist in Realgymnasium-Klassen zu empfehlen, vor allem wird hier eine gute Basis für eine tiefergehende Behandlung systemdynamischer Modelle gelegt.

- Teil (2) und Teil (3) werden kombiniert:
  Die Kombination erfolgt dabei in der Weise, dass z.B. das Produkt von Geschwindigkeit mal Zeit als Flächeninhalt interpretiert wird (HENN, 2000).
  Bei geschickter Vorgehensweise kann dabei die Linkssumme als Euler-Cauchy-Verfahren erkannt werden und das Trapezverfahren als verbessertes Euler-Cauchy-Verfahren.
  Die Kombination ermöglicht auch einen Kurzzugang zum Integral, in dem man die verallgemeinerte Produktsumme als Näherungswert ansetzt und mittels Grenzübergang eine exakte Version (z.B. der Zeit-Weg-Funktion) erzeugt..

Egal welcher Weg nun tatsächlich gewählt wird, folgende Grundidee / Grundvorstellung muss auf jeden Fall angestrebt werden:

2.2 Idee der verallgemeinerten Produktsumme

Das Integral ist eine verallgemeinerte Produktsumme. Dies soll an verschiedenen Anwendungen bzw. Begriffen, die in Anwendungen auftreten, klar werden. Das Aufstellen und das Operieren mit dieser verallgemeinerten Produktsumme kann als eines der wesentlichsten Ziele des Analysisunterrichts betrachtet werden.

Flächeninhalte

Kenntnisse/Wissen:

Vorzeichen bei Flächeninhalten, Uneigentliches Integral

Fertigkeiten/Fähigkeiten:

Flächeninhalte als Produktsumme (unbegrenzt schmaler Rechtecke) anschreiben können.
Flächeninhalte berechnen können, Umkehraufgaben zu Flächeninhalten berechnen können, uneigentliche Integrale berechnen können.

Volumina

Fertigkeiten/Fähigkeiten:

Volumina als Produktsumme (unbegrenzt dünner Querschnittsquader) anschreiben können.
Volumina berechnen können, Drehkörper um beide Koordinatenachsen.

Bogenlängen

Fertigkeiten/Fähigkeiten:

Bogenlängen als Produktsumme (unbegrenzt kurzer Sekantenstücke) anschreiben können.
Bogenlängen berechnen können.

Mantelflächen

Fertigkeiten/Fähigkeiten:

Mantelflächen als Produktsumme (unbegrenzt schmaler Kegelstümpfe) anschreiben können
Mantelflächen berechnen können.

Integrale in der Physik

Fertigkeiten/Fähigkeiten:

Geschwindigkeit, Weg, Arbeit, Energie über Integrale berechnen können.
Geschwindigkeit als Produktsumme von Beschleunigung und Zeitintervall
Weg als Produktsumme von Geschwindigkeit und Zeitintervall
Arbeit bzw. Energie als Produktsummen von Kraft und Wegstücken

Als Abschluss der Integralrechnung kann dann eine Exaktifizierung mittels Riemannschen Integralbegriff treten.

Kenntnisse/Wissen:

Den Riemannschen Integralbegriff als Exaktifizierung des heuristischen Integralbegriffs kennen.

Literatur:

BLUM, W. (2000): Perspektiven für den Analysisunterricht. In: Der Mathematikunterricht, Heft 4-5, September 2000, S.5-17

BÜRGER, H. / G.MALLE. (2000): Funktionsuntersuchungen mit Differentialrechnung. In: Mathematik lehren, Nr.103, S.56-59

HENN, H.-W. (2000): Änderungsraten als Zugang zu den zentralen Begriffen und Resultaten der Analysis. In: Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Bd.6, Computeranwendungen, Hrsg. v.F.Förster, H.-W.Henn, J.Meyer, Franzbecker, Hildesheim.

LECHNER, J. (1998): Wachstum - Skriptum zur Behandlung der Wachstumsprozesse im Unterricht mit CAS. Im Internet: www.acdca.ac.at

SCHMIDT, G. (2000): Analysisunterricht mit CAS als Werkzeug, ein großer Schritt zu den gewünschten Veränderungen? In: Der Mathematikunterricht, Heft 4-5, September 2000, S.46-71.

Anhang: Programme

Programme zur Differentialrechnung

```
sed(x,dx)
Prgm
 {x,x+dx,x+dx,x}→drxx
 {f(x),f(x),f(x+dx),f(x)}→dryy
 NewPlot  1,2,drxx,dryy,,,,5
EndPrgm
```

```
std(x,dx)
Prgm
 {x,x+dx,x+dx,x}→drxx
 {f(x),f(x),f(x)+d(f(x),x)*dx|x=1,f(x)}→dryy
 NewPlot 2,2,drxx,dryy,,,,5
EndPrgm
```

```
sede(x,dx,n)
Prgm
 {x,x+dx,x+dx,x}→#("drx"&string(n))
 {f(x),f(x),f(x+dx),f(x)}→#("dry"&string(n))
 NewPlot  n,2,#("drx"&string(n)),#("dry"&string(n)),,,,5
EndPrgm
```

```
sekd(xa,ya,dx,n)
Prgm
 Local  i,y
 ya→y:{}→xselist:{}→yselist
 For  i,Ø,n-1
   augment(xselist,{i*dx,(i+1)*dx,(i+1)*dx,i*dx})→xselist
   y+r(i*dx)*dx→yn
   augment(yselist,{y,y,yn,y})→yselist
   yn→y
 EndFor
 NewPlot  4,2,xselist,yselist,,,,5
EndPrgm
```

Programme zur Integralrechnung:

```
osum(xa,xe,n)
Prgm
 Local i,dx
 (xe-xa)/n→dx:{}→xolist:{}→yolist
 For  i,0,n-1
   augment(xolist,{i*dx,i*dx,(i+1)*dx,(i+1)*dx})→xolist
   augment(yolist,{0,f(i*dx),f(i*dx),0})→yolist
 EndFor
 NewPlot  1,2,xolist,yolist,,,,5
 Σ(f(i*dx)*dx,i,0,n-1)→nwos
 PtText  string(approx(nwos)),xmax*0.9+xmin*0.1,ymax*0.9+ymin*0.1
EndPrgm
```

```
usum(xa,xe,n)
Prgm
 Local i,dx
 (xe-xa)/n→dx:{}→xulist:{}→yulist
 For  i,0,n-1
   augment(xulist,{i*dx,i*dx,(i+1)*dx,(i+1)*dx})→xulist
   augment(yulist,{0,f((i+1)*dx),f((i+1)*dx),0})→yulist
 EndFor
 NewPlot  2,2,xulist,yulist,,,,5
 Σ(f(i*dx)*dx,i,1,n)→nwus
 PtText  string(approx(nwus)),xmax*0.9+xmin*0.1,ymax*0.8+ymin*0.2
EndPrgm
```

```
msum(xa,xe,n)
Prgm
 Local i,dx
 (xe-xa)/n→dx:{}→xmlist:{}→ymlist
 For i,0,n-1
   augment(xmlist,{i*dx,i*dx,(i+1)*dx,(i+1)*dx})→xmlist

augment(ymlist,{0,(f(i*dx)+f((i+1)*dx))/2,(f(i*dx)+f((i+1)*dx))/2,0}
)→ymlist
 EndFor
 NewPlot 3,2,xmlist,ymlist,,,,5
 Σ((f(i*dx)+f((i+1)*dx))/2*dx,i,0,n)→nwos
 PtText string(approx(nwos)),xmax*.9+xmin*.1,ymax*.7+ymin*.3
EndPrgm
```

Programme zur Integralrechnung:

```
ecl(xa,ya,dx,n)
Prgm
 Local  i,dx,y
 ya→y:{}→xecllist:{}→yecllist
 For  i,Ø,n-1
   augment(xecllist,{i*dx,(i+1)*dx,(i+1)*dx,i*dx})→xecllist
   y+r(i*dx)*dx→yn
   augment(yecllist,{y,y,yn,y})→yecllist
   yn→y
 EndFor
 NewPlot  1,2,xecllist,yecllist,,,,5
EndPrgm
```

```
ecr(xa,ya,dx,n)
Prgm
 Local  i,dx,y
 ya→y:{}→xecrlist:{}→yecrlist
 For  i,Ø,n-1
   augment(xecrlist,{i*dx,(i+1)*dx,(i+1)*dx,i*dx})→xecrlist
   y+r((i+1)*dx)*dx→yn
   augment(yecrlist,{y,y,yn,y})→yecrlist
   yn→y
 EndFor
 NewPlot  2,2,xecrlist,yecrlist,,,,5
EndPrgm
```

```
eci(xa,ya,dx,n)
Prgm
 Local  i,dx,y
 ya→y:{}→xecilist:{}→yecilist
 For  i,Ø,n-1
   augment(xecilist,{i*dx,(i+1)*dx,(i+1)*dx,i*dx})→xecilist
   y+(r(i*dx)+r((i+1)*dx))/2*dx→yn
   augment(yecilist,{y,y,yn,y})→yecilist
   yn→y
 EndFor
 NewPlot  3,2,xecilist,yecilist,,,,5
EndPrgm
```