Ziele beim Umformen von Gleichungen

für GeoGebraCAS

Letzte Änderung: 29. März 2011

1 Überblick

1.1 Zusammenfassung

Beim Lösen von Gleichungen ist besonders darauf zu achten, dass Schüler/innen den Äquivalenzumformungen ein besonderes Augenmerk schenken und die Ziele, die mit den Umformungen erreicht werden, auch formuliert werden können. Diese Umformungen führen zu neuen äquivalenten Gleichungen, die ein möglichst rasches Finden der Lösungen von Gleichungen ermöglichen.

1.2 Kurzinformation

Schulstufe	5. Schulstufe
Geschätzte Dauer	Eine Unterrichtsstunde
Verwendete Materialien	Ein Arbeitsblatt
Technische Voraussetzungen	GeoGebraCAS auf PC oder Notebook
Schlagwörter Mathematik	Gleichung, Äquivalenzumformungen
Schlagwörter GeoGebraCAS	Äquivalenzumformungen durchführen, Vereinfachen
Autor/in	Walter Klinger, Andreas Lindner
Download von Zusatzmaterialien	-----------

1.3 Vorwissen der Lernenden

Mathematisches Vorwissen	• Grundkompetenzen im Umgang mit Termen (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) • Was heißt Lösen einer Gleichung? • Äquivalenzumformungen kennen • Einfachste Formen von Gleichungen angeben und interpretieren können • Aussagen und Aussageformen unterscheiden können
Technisches Vorwissen	• Elementare Bedienung von GeoGebraCAS

1.4 Lerninhalte und Lernziele

Lehrinhalt	**Lernziel**
Termumformung	Umformungen bzw. Vereinfachungen auf einer Seite einer Gleichung durchführen können.
Lösen von Gleichungen	Ziele des Gleichungsumformens angeben können.
Äquivalenzumformungen bei Gleichungen	• Ziele angeben können, die durch einzelne Äquivalenzumformungen erreicht werden sollen. • Auswirkungen von verschiedenen Äquivalenzumformungen auf dieselbe Gleichung formulieren können. • Entscheidungen für eine bestimmte Umformung begründen können. • Die Umformung auch händisch durchführen können.
Äquivalente Gleichungen	Einfachere äquivalente Gleichungen, die zu einfacheren Formen führen, erzeugen können

1.5 Lernzielkontrolle

Ähnliche Beispiele händisch und mit GeoGebraCAS lösen können und mündlich oder schriftlich die Ziele der Umformungen angeben können.

2 Vorbereitung der Lehrenden

2.1 Vorbereitung des Unterrichts

Arbeitsblatt kopieren oder zum Download vorbereiten. Jede Schülerin/jeder Schüler braucht ein eigenes Notebook oder einen Computer im EDV-Raum.

2.2 Verwendung des GeoGebraCAS

Eingabe von Gleichungen in GeoGebraCAS,
Eingabe von Äquivalenzumformungen in GeoGebraCAS,
Vereinfachen von Termen und Gleichungen,
Eventuell Ausmultiplizieren.

Verwendete Befehle

Multipliziere[Ausdruck]	Multipliziert Ausdrücke bzw. Zahlen aus.
Lösche[a]	Löscht die Variable a

Kontextmenü GeoGebraCAS (rechter Mausklick auf Zeilennummer)

Lösche Zeile n	Löscht die Zeile n

3 Didaktischer Hintergrund

Anhand einer ausgewählten Aufgabenstellung soll der Lernprozess der Schüler/innen bei der Entscheidung für einzelne Äquivalenzumformungen durch die richtigen Rechenvorgänge des CAS derartig unterstützt werden, dass die Zielsetzung und die Begründung im Vordergrund stehen. „Ungeeignete" Umformungen (sodass die Gleichung komplizierter wird oder das Ziel nicht erreicht wird) können sofort erkannt werden und dadurch neue Strategien und Zielsetzungen erarbeitet werden.
Das CAS dient nur als Feedbackinstrument für die Lernenden. Dabei kann auch die im Kopf erfolgten Rechnung (genannt: händische Rechnung) sofort nach seiner Richtigkeit hinterfragt werden.

4 Einsatz im Unterricht

4.1 Verlaufsplan

Phase	Inhalt	Sozial- / Aktionsform	Materialien
Einführung	Wiederholung Gleichungen	Lehrer-/Schülergespräch	
Erarbeitungsphase	Erste mögliche Äquivalenzumformungen angeben können. Ziele, die dadurch erreicht werden sollen, formulieren können. Diese ersten Umformungen durchführen und überprüfen, ob die jeweiligen Ziele erreicht wurden.	Dreifenstertechnik mit GeoGebraCAS	Arbeitsblatt
Zusammenfassung	Verschiedene Ziele verbal angeben können und nach ihrer „Sinnhaftigkeit“ für die Lösung der Gleichung bewerten. Entscheidung für den eigenen Lösungsweg finden.	Plenumsgespräch und schriftliche Zusammen-fassung	Selbst erstellte Mitschrift
Lernzielkontrolle	Neuerliche Anwendung mit selbständiger Beschreibung der Ziele	Einzelarbeit – Partnerarbeit zum Vergleichen und Diskussion	
Anwendung / Differenzierung / Übung / Vertiefung	Ähnliche Beispiele durchführen		

Phase	Inhalt	Sozial- / Aktionsform	Materialien
Hausübung	Bei ausgewählten Gleichungen wird die schriftliche Angabe der Ziele die durch Äquivalenzumformungen erreicht werden verlangt	Einzelarbeit	Hü-Mappe bzw. -Heft

4.2 Unterrichtsablauf

Einführung

Wiederholung: Was heißt Lösen einer Gleichung?
Wiederholung: Welche Umformungen sind beim Lösen von Gleichungen erlaubt (Genaue Beschreibung der Äquivalenzumformungen).
Eventuell die Grundlagen beim Arbeiten mit Termen besprechen (Addition und Subtraktion von Termen. Multiplikation und Division von Termen. Besonders das Distributivgesetz, da beide Seiten einer Gleichung von der Umformung betroffen sind.

Erarbeitungsphase

Erhebung der Vorschläge von Schüler/innen für die beiden ersten Umformungen der angegebenen Gleichung $\frac{x}{5} + 4 = \frac{2x+5}{2} - \frac{x}{2}$ und Testen mit GeoGebraCAS. Im Plenum werden danach die ersten Umformungen verglichen und eventuell geeignete erste Umformungen, die noch nicht gewählt wurden in Spalte 3 eingetragen. Die Ziele sollen genau formuliert werden und die Schüler/innen sollen über diese Ziele sprechen und sie begründen.
Danach sollen die jeweiligen „Wege“ weiter bearbeitet werden und die äquivalenten einfachsten Formen hergeleitet werden.
Die Anzahl der jeweiligen Umformungen soll gezählt und eingetragen werden.
Jede Schülerin/jeder Schüler soll aufschreiben, für welche erste Umformung und damit für welchen weiteren Weg sie/er sich entscheidet.

Zusammenfassung

Als Zusammenfassung soll (Heft, Portfolio, Arbeitsblatt) vermerkt werden, dass es mehrere sinnvolle erste Umformungen gibt und dass die Ziele unterschiedlich sind.
Z. B.:
Welches Ziel möchte ich damit erreichen?
(1) Alle Ausdrücke mit der gesuchten Variablen sollen auf einer Seite stehen.
(2) Es sollen bei der Gleichung nur Brüche mit demselben Nenner auftreten.
(3) Die Terme mit Nenner 2 sollen zusammengefasst werden.
(4) Alle konstanten Terme sollen auf einer Seite der Gleichung stehen.
(5) …

Anwendung / Differenzierung / Übung / Vertiefung

Übungen für erste Umformungen.
Übungen, bei denen die äquivalenten Gleichungen gegeben sind und nach der Umformung gefragt wird. Dabei sollen auch Gleichungen auftreten, die nicht äquivalent sind, also nicht durch eine Äquivalenzumformung auseinander hervorgegangen sind.

Hausübung

Beispiele, bei denen zusätzlich das Ziel der ersten Umformung formuliert werden soll. Verschiedene Anwendungen, Differenzierungen und Vertiefungen (siehe oben)

<u>Hinweis</u>: Beispiele

Beispiel 1
Gib an welche Äquivalenzumformungen durchgeführt wurden.
Teste deine Meinung mit GeoGebraCAS! Stelle gegebenenfalls richtig.

a) $37x + 25 = 21x - 7$ **|…**

$x = -2$

b) $(2\cdot x + 3)^2 = 3\cdot x - 9 + 4\cdot x^2$ **|…**

$x = 3$

c) $3-\frac{a}{5}=\frac{2a-3}{2}$ | …

$a=\frac{15}{4}$

d) $4-\frac{1}{y}=5+\frac{2}{y}$ | …

$y = -1$

Lösungen: a) richtig; b) x = -2; c) richtig; d) y = -3

Beispiel 2
Bestimme die einfachste Form der Gleichung und gib die ***Lösungsmenge*** für
(1) G = N und (2) G = R an.
Gib an, welche der Eigenschaften für die jeweiligen Gleichungen gilt: eindeutig lösbar, allgemeingültig oder nicht lösbar!

a) $\frac{x}{2}+3=\frac{5+x}{2}-4$ b) $\frac{2}{x}+1=5-\frac{10}{x}$

c) $\frac{5x}{3}+3=\frac{4x+1}{2}-\frac{x}{3}+\frac{5}{2}$ d) $\frac{3}{x}+2,5=\frac{4}{x}+1$

Lösungen:

a) nicht lösbar	b)	c) allgemeingültig	d)
$L_1 = \{ \}$	$L_1 = \{3\}$	$L_1 = N$	$L_1 = \{ \}$
$L_2 = \{ \}$	$L_2 = \{3\}$	$L_2 = R$	$L_2 = \{\frac{2}{3}\}$

5 Anhang

Arbeitsblatt
(Lösung: x = 5)

Lösungsvorschlag