

# Grenzwert einer Folge

für GeoGebraCAS

Letzte Änderung: 29/ März 2011

---

## 1 Überblick

### 1.1 Zusammenfassung

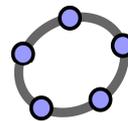
Innerhalb von zwei Unterrichtseinheiten sollen die Schüler/innen zwei Arbeitsblätter mit GeoGebra erstellen, die das Verhalten von Folgen visualisieren, und die Eigenschaften von 10 Folgen hinsichtlich Konvergenz untersuchen.

### 1.2 Kurzinformation

<b>Schulstufe</b>	10. Schulstufe
<b>Geschätzte Dauer</b>	2 Unterrichtseinheiten
<b>Verwendete Materialien</b>	siehe Anhang: Arbeitsanleitung 1, Arbeitsanleitung 2, Aufgabenstellung, Lösungen
<b>Technische Voraussetzungen</b>	GeoGebraCAS, Java
<b>Schlagwörter Mathematik</b>	Folgen, Grenzwert, Limes, $\varepsilon$ -Umgebung
<b>Schlagwörter GeoGebraCAS</b>	Grenzwert/Limit
<b>Autor/in</b>	Andreas Lindner
<b>Download von Zusatzmaterialien</b>	

### 1.3 Vorwissen der Lernenden

<b>Mathematisches Vorwissen</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Explizite Darstellung einer Folge</li> <li>• Eigenschaften von Folgen</li> <li>• <math>\varepsilon</math>-Umgebung</li> <li>• Begriffe Konvergenz, Divergenz</li> </ul>
---------------------------------	--



<b>Technisches Vorwissen</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Grundlegende Fertigkeiten in der Bedienung von GeoGebra</li> </ul>
------------------------------	---

## 1.4 Lerninhalte und Lernziele

Lehrinhalt	Lernziel
Explizites Darstellen von Folgen	Schüler/innen sollen Zahlenfolgen eindimensional auf der Zahlengeraden und zweidimensional im Koordinatensystem darstellen können und die Analogie zu Funktionen erklären können.
Untersuchen von Folgen auf Konvergenz	Schüler/innen sollen erkennen, ob und ab welchem Index $k$ sich die Folgenglieder einem Grenzwert nähern.
Intuitives Erfassen und Definieren des Begriffes Grenzwert	Schüler/innen sollen aus der grafischen Darstellung einer Folge erkennen können, ob sie konvergiert, und eine Formulierung für den Grenzwert einer Folge angeben können.

## 1.5 Lernzielkontrolle

Eine Möglichkeit zu überprüfen, ob die Lernenden die Lernziele erreicht haben, ist die Abgabe und das Überprüfen der ausgefüllten Aufgabenstellungen.

Weiters kann in der nächsten Unterrichtseinheit eine schriftliche **Lernzielkontrolle** (siehe Anhang) erfolgen.

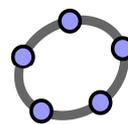
## 2 Vorbereitung der Lehrenden

### 2.1 Vorbereitung des Unterrichts

Vor Beginn der beiden Unterrichtseinheiten müssen die beiden Arbeitsanleitung und die Aufgabenstellung (siehe Anhang) für jede/n Schüler/in kopiert werden.

### 2.2 Verwendung des GeoGebraCAS

Lehrende sollten folgende Befehle und Funktionalitäten von GeoGebra beherrschen:



GeoGebra	GeoGebraCAS
Punkte , Strecken, Gerade erstellen	<b>Grenzwert</b> [Ausdruck, Var, Wert] Limit[Expression, Var, Value]
Eigenschaften von Objekten wie Farbe, Größe,... ändern	Infinity – Unendlichkeit (unendlich)
Listen erstellen	
Schieberegler erstellen	
Texte erstellen	
Ansichten verändern, Zoomen	

### Verwendete Befehle

Befehl	Erklärung des Befehls
<b>Grenzwert</b> [Ausdruck, Var, Wert] Limit[Expression, Var, Value]	berechnet den Limes der Folge

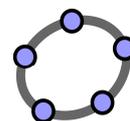
### Verwendete Werkzeuge

Werkzeug	Name des Werkzeugs (siehe Beispiel unten)
	Bewege
	Neuer Punkt
	Strecke
	Schieberegler
ABC	Text einfügen

## 3 Didaktischer Hintergrund

Schüler/innen sollen einen intuitiven Zugang zum Begriff Grenzwert bekommen. Durch das Darstellen mehrerer Folgen auf der Zahlengerade und im Koordinatensystem erhalten die Schüler/innen eine Vorstellung, ob eine Folge konvergiert oder divergiert, je nachdem, ob die Punkte sich mit größer werdendem Index an einen Grenzwert annähern oder nicht.

Durch das Bewegen eines Punktes können Schüler/innen außerdem



auf einfache Weise feststellen, ab welchem Index ein Folgenglied innerhalb einer  $\varepsilon$ -Umgebung liegt. Das dazu notwendige algebraische Lösen der Ungleichung  $|a(n)-b| < \varepsilon$  kann in einer späteren Phase behandelt werden.

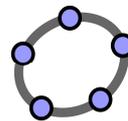
Durch die Verwendung eines CAS ist es für Schüler/innen möglich, in kurzer Zeit eine relativ große Anzahl von Folgen zu untersuchen. Dabei können im Vergleich zu einer händischen Bearbeitung auch solche Folgen betrachtet werden, bei denen nach dem Berechnen der ersten paar Folgenglieder der weitere Verlauf noch nicht genau eingeschätzt werden kann.

Die Zusammenarbeit in Form einer Partnerarbeit unterstützt dabei das „Sprechen über mathematische Inhalte“.

## 4 Einsatz im Unterricht

### 4.1 Verlaufsplan

Phase	Inhalt	Sozial- / Aktionsform	Materialien
<b>Einführung</b>	Aufgabenstellung durch den Lehrer/die Lehrerin	Lehrervortrag	
<b>Erarbeitungsphase</b>	1a) <b>Gruppe A:</b> Erstellen des Arbeitsblattes 1	Einzelarbeit	Arbeitsanleitung 1 (siehe Anhang)
	1b) <b>Gruppe B:</b> Erstellen des Arbeitsblattes 2	Einzelarbeit	Arbeitsanleitung 2 (siehe Anhang)
	2) Untersuchen der Konvergenz/Divergenz von 10 Folgen	Partnerarbeit	Aufgabenstellung (siehe Anhang)
<b>Zusammenfassung</b>	Vergleich und Diskussion der Ergebnisse	Präsentation	Lösung (siehe Anhang)
<b>Lernzielkontrolle</b>	Kontrolle der ausgefüllten Aufgabenstellungen	Lehrer/in	
	Schriftliche Lernzielkontrolle	Einzelarbeit	Lernzielkontrolle (siehe Anhang)



Phase	Inhalt	Sozial- / Aktionsform	Materialien
<b>Anwendung / Differenzierung / Übung / Vertiefung</b>	Vorschläge zur Differenzierung siehe unten	Einzel- oder Partnerarbeit	
<b>Hausübung</b>	Vorschläge zur HÜ siehe unten	Einzelarbeit	

## 4.2 Unterrichtsablauf

### Einführung

Der Lehrende erklärt die Aufgabenstellung. Dazu kann eventuell ein fertiges Arbeitsblatt präsentiert werden, um eine genaue Zielvorgabe geben zu können.

### Erarbeitungsphase

1. Unterrichtseinheit:

Eine Hälfte der Klasse (Gruppe A) erstellt in Einzelarbeit am PC nach der schriftlichen **Arbeitsanleitung 1** (auf Papier, siehe Anhang) das **Arbeitsblatt (GeoGebra-Konstruktion) „Grenzwert einer Folge auf der Zahlengerade“**.

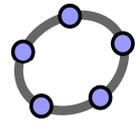
Die andere Hälfte der Klasse (Gruppe B) erstellt in Einzelarbeit am PC nach der schriftlichen **Arbeitsanleitung 2** (auf Papier, siehe Anhang) das **Arbeitsblatt (GeoGebra-Konstruktion) „Grenzwert einer Folge im Koordinatensystem“**.

2. Unterrichtseinheit:

In dieser Unterrichtsstunde bilden jeweils ein Mitglied der Gruppe A und ein Mitglied der Gruppe B ein Team. Sie tauschen sich über die in der 1. Unterrichtseinheit erstellten Arbeitsblätter aus und vergleichen die beiden Darstellungsformen einer Folge.

Anschließend untersuchen sie die Konvergenz bzw. Divergenz von 10 Folgen. Weiters bestimmen sie einen Index  $k$ , ab welchem sich der Punkt  $(a(k), 0)$  auf der Zahlengeraden bzw. der Punkt  $(k, a(k))$  im Koordinatensystem innerhalb der  $\varepsilon$ -Umgebung um den Grenzwert befindet.

Die detaillierten Arbeitsaufträge sind im Anhang unter **Aufgabenstellung** angegeben.



Alternative:

Falls Schüler/innen es nicht schaffen, in der vorgegebenen Zeit das jeweilige **Arbeitsblatt (GeoGebra-Konstruktion)** zu erstellen, können sie mit den zur Verfügung gestellten Lösungsdateien in der 2. Unterrichtseinheit die Aufgabenstellungen bearbeiten.

## Zusammenfassung

Innerhalb von zwei Unterrichtseinheiten sollen die Schüler/innen zwei Arbeitsblätter mit GeoGebra erstellen, die das Verhalten von Folgen visualisieren, und die Eigenschaften von 10 Folgen hinsichtlich Konvergenz untersuchen.

## Anwendung / Differenzierung / Übung / Vertiefung

### Vertiefung – Innere Differenzierung

Gute Schüler/innen, die vorzeitig die Aufgaben richtig gelöst haben, können zusätzlich folgende Verbesserungen und Erweiterungen des Arbeitsblattes anbringen.

- Erstellen eines Vierecks, das das „ $\varepsilon$ -Band“ mit einer Farbe hinterlegt.
- Einfügen eines Textes „ $|a_n - b| < \varepsilon$ ; außerhalb der  $\varepsilon$ -Umgebung“, der nur angezeigt wird unter der Bedingung, dass  $|a_n - b| > \varepsilon$  ist bzw. eines Textes „ $|a_n - b| < \varepsilon$ ; innerhalb der  $\varepsilon$ -Umgebung“, der nur angezeigt wird unter der Bedingung, dass  $|a(n) - b| < \varepsilon$  ist.
- Formulieren weitere Angaben für Folgen, die auf Konvergenz/Divergenz untersucht werden sollen.

## Hausübung

Weitere Folgen auf Konvergenz/Divergenz entsprechend der Aufgabenstellung aus der 2. Unterrichtseinheit untersuchen:

$$1) a(n) = 4 \cdot (-1)^n$$

$$2) a(n) = \frac{3}{n^2} - 7$$

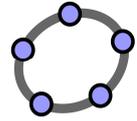
$$3) a(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$4) a(n) = 45 \cdot (1 - 0,3^n)$$

## 5 Anhang

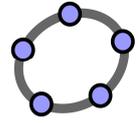
Folgende Materialien stehen für die Schüler/innen bzw. Lehrer/innen zur Verfügung.

- 1) **Arbeitsanleitung 1** zum Erstellen eines Arbeitsblatts „Grenzwert einer Folge auf der Zahlengerade“

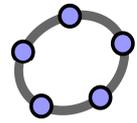


- 2) **Arbeitsanleitung 2** zum Erstellen eines Arbeitsblatts „Grenzwert einer Folge im Koordinatensystem“
- 3) **Aufgabenstellung** zu „Grenzwert einer Folge“
- 4) **Lösungen** zu „Grenzwert einer Folge“
- 5) **Lernzielkontrolle**





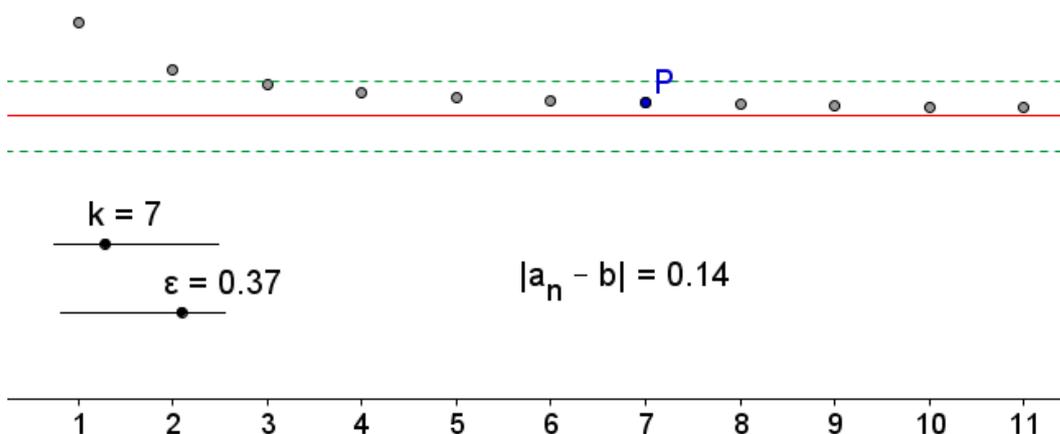
verändern.



## Arbeitsanleitung 2 zum Erstellen eines Arbeitsblatts „Grenzwert einer Folge im Koordinatensystem“

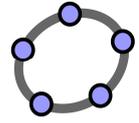
- Definiere im CAS-Fenster die Folge  $a(k)$  mit z. B.  $a(n) = 3 + 1/n$  und blende den angezeigten Graphen (eigentlich der Funktion) aus. Diese Definition der Folge hat den Vorteil, dass du für eine andere Folge nur diesen einen Term in der 1. Zeile im CAS-Fenster ändern musst.
- Erstelle im Algebra-Fenster eine Liste mit den ersten 20 Punkten  $(n, a(n))$ : Folge[(n, a(n)), n, 1, 20]; Formatierung: Farbe z. B. hellgrau
- Erstelle zwei Schieberegler für  $k$  im Bereich von 1 bis 20 (Schrittweite 1) und  $\varepsilon$  im Bereich von 0 bis 0.5 (Schrittweite 0.01)
- Zeichne einen Punkt  $P=(k, a(k))$ , Formatierung: Farbe z. B. blau
- Berechne im CAS-Fenster den Grenzwert der Folge mit  $b:=\text{Grenzwert}[a(n), n, \text{Infinity}]$
- Zeichne drei Geraden zur Darstellung der  $\varepsilon$ -Umgebung:  
Gerade 1:  $y = b$  Diese Gerade zeigt den Grenzwert an.  
Gerade 2:  $y = b + \varepsilon$  Diese Gerade zeigt den oberen Rand des „ $\varepsilon$ -Bandes“ an.  
Gerade 3:  $y = b - \varepsilon$  Diese Gerade zeigt den unteren Rand des „ $\varepsilon$ -Bandes“ an.  
Formatiere die drei Geraden färbig.
- Erstelle einen dynamischen Text, der den Betrag der Differenz von Folgenglied zum Grenzwert anzeigt: " $|a_n - b| =$ " + (abs(y(P) - b))

Das Geometrie-Fenster sollte ungefähr das folgende Aussehen haben.

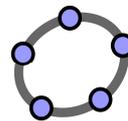


Hinweis: Achte bei allen Folgen auf die richtige Größe des angezeigten Koordinatensystems.

Zoomen kannst du mit dem Scrollrad oder mit dem Werkzeug  Verschiebe Zeichenblatt. Die Skalierung der einzelnen Achsen kannst du durch Ziehen der Achsen mit *Strg* - linke Maustaste



verändern.



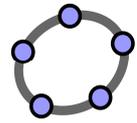
## Aufgabenstellung zu „Grenzwert einer Folge“

Untersuche die in der Liste angegebenen Folgen auf ihre Konvergenz bzw. Divergenz.

Halte schriftlich fest, welche Folge konvergiert und begründe deine Entscheidung.

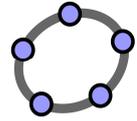
Ab welchem Index  $k$  befindet sich der Punkt  $(a(k), 0)$  bzw.  $(k, a(k))$  innerhalb der „ $\varepsilon$ -Umgebung“?

Folge	konvergent/ divergent	Limes	Begründung	Index $k$
(1) $a(n) = 3 + \frac{1}{n}$ $\varepsilon = 0,30$				
(2) $a(n) = \frac{2+3n}{1+n}$ $\varepsilon = 0,25$				
(3) $a(n) = \sin(n)$ $\varepsilon = 0,10$				
(4) $a(n) = \frac{5-2n}{12n-n^2}$ $\varepsilon = 0,40$				
(5) $a(n) = \frac{\sqrt{n}}{1,2-\sqrt{n}}$ $\varepsilon = 0,45$				
(6) $a(n) = (-1)^n$ $\varepsilon = 0,30$				
(7) $a(n) = -4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$ $\varepsilon = 0,30$				
(8) $a(n) = \sqrt{\frac{3n+1}{n}}$ $\varepsilon = 0,05$				
(9) $a(n) = 10 + \frac{2+n}{n-3}$ $\varepsilon = 0,50$				
(10) $a(n) = \frac{3}{n} + 0,5n$ $\varepsilon = 0,15$				



## Lösungen zu „Grenzwert einer Folge“

Folge	konvergent/ divergent	Limes	Begründung	Index k
(1) $a(n) = 3 + \frac{1}{n}$ $\varepsilon = 0,30$	konvergent	3		k = 4
(2) $a(n) = \frac{2+3n}{1+n}$ $\varepsilon = 0,25$	konvergent	3		k = 4
(3) $a(n) = \sin(n)$ $\varepsilon = 0,10$	divergent		Folgenglieder nehmen Werte zwischen +1 und -1 an.	
(4) $a(n) = \frac{5-2n}{12n-n^2}$ $\varepsilon = 0,40$	konvergent	0		k = 17
(5) $a(n) = \frac{\sqrt{n}}{1,2-\sqrt{n}}$ $\varepsilon = 0,45$	konvergent	-1		k = 15
(6) $a(n) = (-1)^n$ $\varepsilon = 0,30$	divergent		Folgenglieder springen zwischen +1 und -1	
(7) $a(n) = -4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$ $\varepsilon = 0,30$	konvergent	0		k = 4
(8) $a(n) = \sqrt{\frac{3n+1}{n}}$ $\varepsilon = 0,05$	konvergent	$\sqrt{3}$		k = 6
(9) $a(n) = 10 + \frac{2+n}{n-3}$ $\varepsilon = 0,50$	konvergent	11		k = 14
(10) $a(n) = \frac{3}{n} + 0,5n$ $\varepsilon = 0,15$	divergent		Folgen ist ab $n = 3$ streng monoton wachsend	



## Lernzielkontrolle

Untersuche die Folgen auf ihre Konvergenz bzw. Divergenz.  
Halte schriftlich fest, welche Folge konvergiert oder divergiert und begründe deine Entscheidung.

(1)  $a(n) = 2 - \frac{1+3n}{4+n}$

(2)  $a(n) = 3 \cdot (-1)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n$